Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова

С. Я. Янченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

yan.sergiy@gmail.com

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ $\big(\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}\big)$ — анізотропні класи Нікольського–Бєсова [1, 2].

Найкращим наближенням функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій назвемо величину $E_{\nu_1,\dots,\nu_d}(f)_p = \inf\limits_{g_{\nu_1,\dots,\nu_d}} \|f - g_{\nu_1,\dots,\nu_d}\|_p$, де $g_{\nu_1,\dots,\nu_d}(x_1, \dots, x_d)$ ціла функція степеня $\nu_1, \dots, \nu_d$ по кожній змінній $x_1, \dots, x_d$ відповідно.

Далі, нехай функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ представлена інтегралом Фур'є

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \text{ де } \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) \text{ — перетворення Фур'є функції } f.$$

Тоді відрізком інтегралу Фур'є функції f назвемо вираз

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \dots \int_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Нехай $D_{\boldsymbol{a}^s} = D_{a_1^s,\dots,a_d^s}$ — d-вимірний паралелепіпед: $|\lambda_j| < a_j^s$, $j = \overline{1, d}$, $s \geqslant 0$, і $\Gamma_{\boldsymbol{a}^s} = D_{\boldsymbol{a}^s} - D_{\boldsymbol{a}^{s-1}}$ при $s \geqslant 1$ та $\Gamma_{\boldsymbol{a}^0} = D_{\boldsymbol{a}^0}$. Покладемо

$$f_{\boldsymbol{a}^s} = S_{\boldsymbol{a}^s}(f) - S_{\boldsymbol{a}^{s-1}}(f) = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \ s \geqslant 1, \text{ і } f_{\boldsymbol{a}^0} = S_{\boldsymbol{a}^0}(f) = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Для f можемо записати [3]:

$$f = f_{\boldsymbol{a}^0} + \sum_{s=1}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}.$$

Розглянемо величину $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді для* $g(\boldsymbol{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *має місце порядкове співвідношення*

$$E_{\boldsymbol{a}^n}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)},$$

де

$$\frac{1}{g(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j}, \ a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}, \ j = \overline{1, d}.$$

1. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 244 – 278.
2. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1961, 60, 42 – 81.
3. Лизоркин П. И. Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$. Сиб. мат. журн., 1968, 9, № 5, 1127 – 1152.