Институт проблем математических машин и систем НАН Украины

50 лет научной деятельности

Киев 2014

Академик В.М. Глушков

Светлой памяти академика
Виктора Михайловича Глушкова
по случаю девяностолетия
со дня его рождения посвящается

УДК 001.32:[519-3:004.3]](477)(091)"388"
ББК 72.4(4Укр)6+73л.г
І-71

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины
50 лет научной деятельности
Монография / кол. авторов. – Киев: Издательство ООО «НПП «Интерсервис, 2014. – 544 с.

ISBN 978-617-696-212-0

Монография печатается по решению Ученого совета Института проблем математических машин и систем НАН Украины.

Под общей редакцией чл.-корр. НАН Украины, д.т.н., профессора А.А. Морозова и д.ф.-м.н., профессора В.П. Клименко

Авторы:
Н.Г. Аронова, Е.А. Бондаренко, В.Г. Бутко, В.В. Вишневский, В.П. Волобоев, И.И. Горбань, В.М. Гринчук, М.И. Железняк, В.И. Журибида, Н.Г. Иевлев, В.В. Казимир, Д.В. Караченец, В.П. Клименко, В.Б. Корбут, Г.Е. Кузьменко, Е.М. Лаврищева, В.И. Легенький, В.А. Литвинов, В.В. Литвинов, С.Д. Лутов, А.Л. Ляхов, А.А. Морозов, Б.Г. Мудла, А.М. Резник, П.С. Сапатый, П.М. Сиверский, В.П. Стрельников, Л.А. Струтинский, В.И. Ходак, В.А. Яффе, В.А. Ященко

Редактор С.Г. Тимчик

ОГЛАВЛЕНИЕ

8.6. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Под «методами компьютерной алгебры» в данном разделе мы будем понимать аналитические вычисления и преобразования, которые выполняются с помощью современных систем компьютерной алгебры (математических пакетов), прежде всего, Maple, Reduce, Mathematica. Конечно, вызывает определенное разочарование отсутствие в данном перечне отечественной разработки – системы АНАЛИТИК. В связи с этим приведем оценку известного специалиста, который работал как с АНАЛИТИКом, так и с современными зарубежными системами [159]: *«Особого разговора заслуживает отечественная система АНАЛИТИК, разработанная под руководством академика В.М. Глушкова и аппаратно реализованная на ЭВМ МИР-2. На языке АНАЛИТИК, во многом совпадающем с обычным математическим языком, можно было подготовить и ввести задания по аналитическому преобразованию выражений: раскрытию скобок, приведению подобных членов, дифференцированию, нахождению неопределенных и определенных интегралов, разложению в ряды, решению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. И все это осуществлялось при оперативной памяти емкостью всего лишь в 8192 13-разрядных слов. С помощью системы АНАЛИТИК было найдено несколько ошибок в таблицах интегралов, сумм, рядов и произведений И.С. Градштейна и И.М. Рыжика [160]. Реализация на ЭВМ МИР-2 символьных вычислений не только открыла принципиально новые возможности использования компьютеров в естественнонаучных и прикладных областях знаний, но и способствовала бурному росту исследований алгоритмических аспектов аналитических вычислений. И можно лишь сожалеть, что передовая отечественная разработка – система АНАЛИТИК – вместе с ЭВМ МИР канули в лету благодаря некомпетентным решениям околокомпьютерных и вовсе некомпьютерных чиновников».*

Мы не будем детально анализировать приведенную мысль, а вместо этого сосредоточимся на рассмотрении более специального вопроса: «Почему аналитические исследования играют столь важную роль именно в теории управления»? Ответ на этот вопрос нуждается в определенном сравнительном анализе изучения естественного движения объектов (что является предметом рассмотрения классической механики) и управляемого движения искусственных объектов (что является предметом теории управления). «Управляемое движение отличается от неуправляемого, – читаем у Г.В. Коренева [171], – прежде всего своей целенаправленностью». Действительно, именно целенаправленность управляемого движения является определяющим отличием. В чем же она состоит, как формализуется? Лаконичный, но точный ответ находим в «Записках ретрограда» И.В. Новожилова [170]: «… в случае управляемых систем набор дифференциальных уравнений замыкается только при заданном законе управления. Без этого нельзя приступать к анализу на компьютере. А подобрать закон управления, работая с непосильно громоздкими для ручных выкладок уравнениями, не удается, исследователь загоняет себя в гносеологический тупик». Действительно, без формирования закона управления (то есть замыкающих соотношений) невозможно даже смоделировать управляемую систему на компьютере. Указанное препятствие частично может быть преодолено при рассмотрении классических линейных систем управления, где действуют принцип суперпозиции и аппарат передаточных функций. Кстати, именно в этом направлении, то есть для задач анализа линейных систем, продолжает развивать систему АНАЛИТИК В.А. Подчукаев [169], который запатентовал новое название – АНАЛИТИК-С. Тем не менее едва ли этой системе удастся конкурировать с возможностями анализа линейных систем, которые имеет, например, система Matlab/Simulink.

Что касается нелинейных управляемых систем, следует отметить следующее. Продолжительное время доминировала мысль, что нелинейная система – это такая система, которая не имеет канонического вида

$$\dot{x} = Ax + bu. \tag{8.24}$$

Но, как было выяснено со временем, некоторые нелинейные системы, которые имеют вид

$$\dot{x}^i = f^i(t,x) + g^i_j(t,x)u, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8.25}$$

– так называемые аффинные (по управлению) системы, могут быть сведены нелинейными преобразованиями к виду (8.24). Существование и конструктивные алгоритмы нахождения таких замен переменных были связаны с анализом векторных полей, ассоциированных с системой (8.25), и открыли путь к широкому применению методов дифференциальной геометрии, теории групп, дифференциальной алгебры к проблемам, связанным с нелинейными системами управления. Волна таких исследований прокатилась по всему миру. В Украине следует упомянуть, в первую очередь, такие фамилии, как Кухтенко А.И., Самойленко Ю.И., Кунцевич В.М., Ковалев А.М., Кириченко М.Ф., Семенов В.Н., Коробов В.И., Легенький В.И.; в России – Гамкрелидзе Р.В., Аграчев А.А., Вахрамеев С.А., Сарычев А.В., Павловский Ю.Н., Крищенко А.П., Яковенко Г.Н., Елкин В.Н., Павлов В.Г., Гараев К.Г., Летов А.М., Хрусталев М.М.; в Соединенных Штатах – Kalman R.E., Brockett R.W., Krener A., Wilkens G.R., Lobry C., Elliot D.L., Sussman H.J., Gardner R., Zelenko I., Murray R., Sontag E.D., Sastry S.; во Франции – Fliss M., Levine J., Martin P., Rouchon P., Pomet J.-B.; в Германии – Rudolph J., Spindler K., Colon C., Colonius F.; в Австралии – Vassiliou P., Lisle J., Prince J.; в Канаде – Shadwick W., Guay M., Reid G.; в других странах Европейского Союза – Brunovsky P., Niemeyer G., van der Shaft A., Miele A., Isidori A. (наш перечень, безусловно, не является исчерпывающим). В конце концов сформировалась мощная исследовательская сеть, усилиями которой ряд проблем, связанных с нелинейными управляемыми системами, как то управляемость, наблюдаемость, плоскостность (flatness), нашли свое решение. Следует вспомнить, что для освещения этой проблематики в Институте кибернетики (Украина) под руководством акад. А.И. Кухтенко издавался журнал «Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления».

Не будем останавливаться подробно на той или иной проблеме теории управления, а попробуем выяснить важный методологический аспект, а именно: в чем состоит секрет успеха применения дифференциально-алгебраических и дифференциально-геометрических методов к проблемам теории управления, что является их движущей силой? По мнению автора, в основе успеха применения той или иной теории к конкретной проблеме всегда лежит определенная математическая операция (процедура), которая мгновенно решает существующую проблему (или некоторую ее часть). Приведем несколько примеров.

Предположим, мы имеем два алгебраических уравнения:

$$x^5 + ax + 1 = 0, \quad x^6 + bx + 1 = 0. \tag{8.26}$$

Необходимо выяснить, при каких условиях на коэффициенты (a, b) эти уравнения имеют одинаковый корень (или, например, два одинаковых корня). Получить ответ на этот вопрос, опираясь на уровень математики средней школы (или даже технического Вуза) невозможно, потому что для уравнений выше пятого порядка отсутствует общая формула зависимости корней уравнения от его коэффициентов. Вместе с тем ответ легко получается с использованием понятия (конструкции) результанта (соответственно – субрезультанта) в рамках алгебраической теории исключения [179]. Согласно теории исключения, для двух полиномов

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \tag{8.27}$$

из их коэффициентов можно сформировать так называемую матрицу Сильвестра (M), которая имеет порядок *(m+n)*(m+n)*:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{m-1} & \dots & & \dots & b_0 & 0 \\ \vdots & & & \dots & & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & & b_0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & & b_0 & 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{array} . \tag{8.28}$$

Результант (в форме Сильвестра) – это выражение, связанное с определителем матрицы M, а именно:

$$\mathcal{R}(f,g) = (-1)^{n(n-1)/2} \det M. \tag{8.29}$$

Нули результанта (соответственно – определителя матрицы М) свидетельствуют о наличии общего корня и дают для этого случая уравнения на коэффициенты полиномов. Таким образом, для ответа на поставленный в начале этого примера вопрос нужно выписать соответствующую матрицу Сильвестра, вычислить определитель 11-го порядка и, приравняв его к нулю, получить соответствующее уравнение на коэффициенты (*a*, *b*). Обобщение на большее количество общих корней достигается введением понятия субрезультанта [179]. Подытоживая, заметим, что в данном случае понятие результанта было ключевой конструкцией для получения ответа о наличии общих корней.

Наш второй пример будет связан с системой (8.25). А вопрос будет стоять таким образом: при выполнении каких условий на функции $f^i(t,x), g^i_j(t,x)$ система (8.25) будет управляемой? Для специалистов, которые усвоили базовые понятия об управляемости на примере линейной системы (8.24) и ассоциируют его с определением ранга соответствующей «матрицы управляемости» в виде

$$[b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^nb] \tag{8.30}$$

поставленный вопрос имеет шокирующий характер: для них будет неясно, с чего следует начинать и на какие базовые конструкции опираться. Тем не менее, в нелинейной теории управления [162–165], управляемость трактуется как отсутствие инвариантных поверхностей $\omega^i(t,x) = C^i$ у ассоциированного с исходной системой векторного поля:

$$X_0 = \partial_t + (f^i(t,x) + g^i_j(t,x)u^j)\partial_{x^i}, \tag{8.31}$$

то есть, как отсутствие решений уравнения $X_0\omega(t,x) = 0$. Последнее условие сводится к анализу отсутствия общих решений системы уравнений

$$\hat{X}_0\omega(t,x) = (\partial_t + f^i(t,x)\partial_{x^i})\omega(t,x) = 0, \quad X_j\omega(t,x) = (g^i_j(t,x)\partial_{x^i})\omega(t,x) = 0. \tag{8.32}$$

Здесь и в дальнейшем мы используем правило Эйнштейна, то есть, предполагаем суммирование по повторяющимся индексам. Исчерпывающий ответ относительно наличия общих решений системы (8.32) достигается путем анализа полноты системы операторов $(\hat{X}_0, X_j)$, а базовой процедурой является, соответственно, коммутатор этих векторных полей, то есть векторное поле, которое определяется по формуле

$$[X_0, X_j] = (X_0(g^i_j(t,x)) - X_j(f^i(t,x)))\partial_{x^i}. \tag{8.33}$$

Дальнейшие детали можно найти, например, в монографии Г.Н. Яковенко [185]. Акцентируем внимание на том, что для ответа на поставленный вопрос нам понадобилась ключевая конструкция – коммутатор и соответствующая теория полных систем (теория Фробениуса). Векторные поля имеют свой двойственный аналог – дифференциальные 1-формы. Иногда теория управляемости нелинейных систем излагается в терминах производного флага ассоциированной системы дифференциальных 1-форм [165]. Вообще становление базовых понятий и операций дифференциальной геометрии происходило в тесном взаимодействии с решением прикладных задач (обзор [167] относительно производной Ли). Глубинная сущность этой связи лежит в аксиоматике. «Для аксиоматического построения аналитической механики не потребовалось вводить какие-либо новые аксиомы, так как аксиоматика дифференциальной геометрии (в ее теперешнем состоянии) и аналитической механики оказалась общей» [161].

Применение дифференциально-геометрических методов к анализу нелинейных систем управления позволило выявить отдельные важные факты:

1. Некоторые нелинейные системы, с помощью нелинейных же преобразований могут быть сведены к линейным.

2. Для некоторых нелинейных систем также возможно выполнение принципа суперпозиций.

3. Факт нелинейности нивелируется наличием достаточного количества управляющих воздействий, а именно: когда число управляющих воздействий не меньше числа степеней свободы управляемой системы (системы с избыточным количеством управлений).

4. Нелинейные системы, в которых количество управляющих воздействий меньше, чем число степеней свободы (underactuated systems), являются наиболее сложными при решении задач управления, но нахождение таких решений значительно упрощается при наличии широкой группы симметрий, которая допускается данной системой управления.

Подытоживая, можно отметить, что наиболее сложными для анализа являются нелинейные системы с бедной групповой структурой (низкой размерностью допускаемых групп симметрий). Для таких систем аналитические потуги в их исследовании существенно ограничены. Тем не менее сам факт существования допускаемой группы для каждой конкретной системы должен быть установленным (то есть, должен быть проведен групповой анализ исходной системы управления), а последующие шаги должны коррелировать с результатами этого анализа.

Для выявления тех или иных дифференциально-геометрических свойств, кроме имеющегося математического аппарата, важно иметь соответствующие средства компьютерной алгебры. Действительно, возвращаясь к рассмотренному примеру нахождения условий существования общих корней системы (8.26), выясняем, что необходимо вычислять определитель матрицы 11 порядка. Конечно, подсчет определителей матрицы присутствует во всех системах аналитических вычислений, но здесь дело не только в подсчете определителя, а и в определенных правилах формирования (заполнения) самой матрицы. Поэтому желательно иметь специальный оператор, который автоматически подсчитывает результант для заданных полиномов. Эта функция реализована также в большинстве систем, в частности, в Reduce, Maple, Mathematica.

А вот более тонкий подсчет субрезультантов реализован только в системе Mathematica. Более того, облачный (интернет) вариант этой системы Wolframalpha позволяет вычислить все субрезультанты, введя один-единственный оператор (http://www.wolframalpha.com/input/?i=subresultants%5Bx%5E5%2Ba*x%2B1%2Cx%5E6%2Bb*x%2B1%2Cx%5D):

subresultants[x5+a*x+1,x6+b*x+1,x],

чтобы получить исчерпывающий ответ в виде списка субрезультантов:

$$\{a^6 - a^5 b + 2a^3 + 4a^2 b^2 - 13a^2 b + 9a^2 + a b^4 - 9 a b^3 +$$
$$+ \ 21 a b^2 - 19 a b + 6a - b^5 + 5 b^4 - 10 b^3 + 10 b^2 - 5 b + 2,$$
$$a^5 + a^2 + 3 a b^2 - 6 a b + 3a + b^4 - 4b^3 + 6b^2 - 4b + 1, -a^3, 0, 0, 1\}$$

Едва ли мы отважились бы экспериментировать с вычислением субрезультантов, варьируя уравнения, их порядок, коэффициенты и тому подобное при отсутствии мгновенной возможности получить нужный результат. Это подтверждает давно известную мысль, что «... вычислительные методы, средства и традиции в значительной степени стихийно формируют всю «математическую идеологию»: какие задачи надо сводить к каким (например, как отметил Л.А. Люстерник, именно из-за этого мы сводим линейные автономные дифференциальные уравнения к алгебраическим, а не наоборот), на каком этапе задача признается решенной и т.д.» [168]. Для тех, кто интересуется алгебраическими уравнениями, рекомендуем статью автора [208].

О некоторых новых дифференциально-геометрических и дифференциально-алгебраических конструкциях, связанных с разными задачами исследования управляемых систем и возможностью их реализации в современных системах компьютерной алгебры, пойдет речь ниже.

Для вычислений, как правило, использовались следующие специализированные пакеты:

- в системе Reduce: Excalc – (сокращение от Exterior Calculus (Внешние вычисления), разработчик – Dr. Eberhard Schruefer, Германия); EDS (EDS – аббревиатура от Exterior Differential Systems (внешние дифференциальные системы), разработчик – David Hartley, Австралия), CRACK и LIEPDE – пакеты для вычисления симметрий и законов сохранения (разработчик – Prof. Thomas Wolf, Канада);
- в системе Maple: Differential Geometry – разработчики Prof. I.M. Anderson (США), E.S. Cheb-Terrab (Канада) и др.; Rif – пакет для вычислений в области дифференциальной алгебры (разработчик – Dr. Alan Wittkopf, Канада); Differential Algebra – разработчик Prof. F. Boulier (Франция).

Терминология и обозначения, приводимые ниже, приняты в современной дифференциальной геометрии и соответствуют указанным в монографиях [172, 175, 184, 186–188]. Соответствующие дополнительные пояснения даются прямо по тексту.

В отличие от известных уравнений классической математической физики, как то уравнение теплопроводности или уравнение Шредингера, – управляемые системы довольно разные, чтобы остановиться на рассмотрении какого-то конкретного уравнения или системы уравнений, описывающих некоторую отдельную управляемую систему. Вместо этого мы сосредоточим наши исследования на системах общего вида, ограничив сначала порядок управляемой системы, которую будем рассматривать, а именно: рассмотрим класс нелинейных управляемых систем второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x^1} &= F(t, x^1, x^2, u), \\ \dot{x^2} &= u, \end{aligned} \tag{8.34}$$

где t – время, (x^1, x^2) – фазовые координаты, u – управление, $F(t, x^1, x^2, u)$ – произвольная дифференцированная функция указанных аргументов. С точки зрения теории дифференциальных уравнений, система (8.34) – недоопределенная: уравнений меньше, чем переменных, а с точки зрения теории управления, система (8.34) – незамкнутая. Один из возможных путей доопределения (замыкания) системы (8.34) состоит в дописывании дополнительного дифференциального уравнения на функцию управления

$$\dot{u} = G(t, x^1, x^2, u), \tag{8.35}$$

которое бы придавало замкнутой системе (8.34)+(8.35) некоторые заданные свойства. Понятно, что, пользуясь произвольностью функции $G(t, x^1, x^2, u)$, мы имеем возможность придавать замкнутой системе любые полезные качества. Казалось бы, нет никаких априорных оснований для выделения какой-либо одной специализации функции $G(t, x^1, x^2, u)$. Тем не менее, это не совсем так. Существует один замечательный класс замыкающих уравнений, в котором функция $G(t, x^1, x^2, u)$ определенным образом «сконструирована» из функции $F(t, x^1, x^2, u)$. Это уравнение имеет вид

$$\dot{u} = F_{uu}^{-1}\Big(F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2}\Big). \tag{8.36}$$

Системе (8.34)+(8.35) можно поставить в соответствие векторное поле

$$X = F_{uu} X_0 + (F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2}) U, \tag{8.37}$$

где $X_0 = \partial_t + F\partial_{x^1} + u\partial_{x^2}$ – векторное поле (дифференциальный инфинитезимальный оператор), ассоциированный с системой (8.34), а $U = \partial_u$. Таким образом, уравнение, полученное действием оператора (8.37) на любую произвольную функцию $S(t, x^1, x^2, u)$, будет выглядеть следующим образом:

$$F_{uu}(S_t + F S_{x^1} + u S_{x^2}) + (F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2}) S_u = 0. \tag{8.38}$$

Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, проблема управляемости системы (8.24), возможность ее линеаризации, проблема групповой классификации системы (8.24), а также задача оптимального синтеза – весь этот ряд проблем будет связан с уравнением (8.38). Вследствие этой важной роли будем называть замыкание (8.36) – универсальным, а оператор (8.37) – оператором характеристического продолжения.

Остановимся на свойствах уравнения (8.38). Это линейное однородное уравнение в частных производных относительно функции $S(t, x^1, x^2, u)$. Уравнения (8.34) и (8.36) образуют для данного уравнения систему характеристик (характеристических уравнений), которые можно также переписать в более симметричном виде:

$$dt = \frac{dx^1}{F(t, x^1, x^2, u)} = \frac{dx^2}{u} = \frac{F_{uu} du}{F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2}}. \tag{8.39}$$

Общее решение уравнения (8.38) может быть представлено в виде

$$S = S(\omega^1, \omega^2, \omega^3), \tag{8.40}$$

где функции

$$\omega^i(t, x^1, x^2, u) = C^i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{8.41}$$

образуют систему первых интегралов системы (8.39). Уравнение (8.38) имеет особые решения при одновременном выполнении условий:

$$F_{uu} = 0, \quad F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2} = 0. \tag{8.42}$$

Выполнение первого условия в (8.42) приводит к появлению линейной по управлению системы, то есть

$$F = \alpha(t, x^1, x^2)u + \beta(t, x^1, x^2). \tag{8.43}$$

Если выполняется второе условие в (8.42), то имеет место случай $\dot{u} = 0$, то есть рассматриваются собственные движения системы (8.34): $u = const$. Одновременное выполнение обоих условий с (8.42) возможно лишь в случае

$$F(t, x^1, x^2, u) = -Q_{x^1}^{-1}[Q_t + uQ_{x^2}], \tag{8.44}$$

где $Q = Q(t, x^1, x^2)$ – произвольная функция.

Проиллюстрируем связь уравнения (8.38) с основными свойствами исходной системы (8.34) – управляемостью, линеаризуемостью, проблемой оптимального синтеза и проблемой групповой классификации.

1. Условия неуправляемости (инвариантности) как особые решения уравнения (8.38). Проблемы управляемости и инвариантности, которые сегодня известны как дуальные проблемы, исторически возникли в разных областях математики. В то время, как классические результаты по проблеме управляемости были получены П. Рашевским и W. Chow в области классической дифференциальной геометрии [173, 176], практическая постановка задачи инвариантности впервые была сделана в работе Г.В. Щипанова [177]. Напомним, что под управляемостью системы (8.34) на геометрическом языке понимают отсутствие у системы (8.34) инвариантных поверхностей вида $\omega(t, x^1, x^2) = C$. Это условие (с использованием прежде введенных векторных полей (X_0, U)) может быть эквивалентно представлено в виде системы

$$X_0\omega = 0, \qquad U\omega = 0. \tag{8.45}$$

Для решения вопроса о количестве функционально независимых решений системы (8.45) ее надо подвергнуть процедуре пополнения, то есть последовательно вычислить коммутаторы операторов (X_0, U) и исследовать их на линейную связанность. Последовательно будем иметь:

$$\begin{aligned} X_1 &= [U, X_0] = F_u \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ X_2 &= [U, X_1] = F_{uu} \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ X_3 &= [X_0, X_1] = (F_{ut} + F F_{ux^1} + u F_{ux^2} - F_u F_{x^1} - F_{x^2}) \frac{\partial}{\partial x^1}, \end{aligned} \tag{8.46}$$

где $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор операторов, $F_u = \partial F/\partial u, \ldots$ Наличие первых интегралов означает одновременное выполнение условий линейной связанности операторов

$\{U, X_0, X_1, X_2\}$ и $\{U, X_0, X_1, X_3\}$. В первом случае это приводит к равенству нулю определителя матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F & u \\ 0 & 0 & F_u & 1 \\ 0 & 0 & F_{uu} & 0 \end{vmatrix} = F_{uu} = 0, \tag{8.47}$$

а во втором – к выполнению условия

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F & u \\ 0 & 0 & F_u & 1 \\ 0 & 0 & F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_uF_{x^1} - F_{x^2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.48}$$

Раскрытие последнего определителя приводит к выполнению условия

$$F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_uF_{x^1} - F_{x^2} = 0. \tag{8.49}$$

Таким образом, наблюдаем, что выполнение условий (8.47) и (8.48) в точности совпадает с условиями (8.42). Возможный альтернативный путь получения условий (8.47) и (8.48) – использование алгоритмов дифференциального исключения из дифференциальной алгебры, теоретическую основу которых составляют работы [183, 188]. Соответствующая Maple -программа и результат вычисления приведены ниже.

```
restart;
with(DifferentialAlgebra) : with(PDEtools) : declare(F(t, x, y, u)) :
s := S(t, x, y, u) : f := F(t, x, y, u) :
eq := [diff(s, t) + f·diff(s, x) + u·diff(s, y), diff(s, u)] :
R := DifferentialRing(blocks = [s, f], derivations = [t, x, y, u]) :
G := RosenfeldGroebner(eq, R) :
Eqs := remove(has, Equations(G[1], solved), s);
```

$F(t, x, y, u)$ *will now be displayed as* F

$$\left[F_{t,u} = -F_{x,u}F - F_{y,u}u + F_xF_u + F_y, F_{u,u} = 0\right]$$

2. <u>Проблема линеаризации системы (8.34) и ее связь с уравнением (8.38).</u>

Хорошо известно, что попытка распространения канонических форм Бруновского на нелинейные системы привела к возникновению понятий «flatness» («плоскостность») и «flat systems» («плоские системы») [174]. Суть этого подхода состоит в приведении системы путем замены переменных к каноническому (линейному) виду. Системы, для которых существует такая замена переменных (фазовых координат и управляющих воздействий), и являются «плоскими системами».

Для нелинейной системы второго порядка, которая является предметом нашего рассмотрения, это означает существование такой замены:

$$\hat{t} = \hat{t}(t, x, u), \quad \hat{x} = \hat{x}(t, x, u), \quad \hat{u} = \hat{u}(t, x, u), \tag{8.50}$$

при которой наша система приобретает вид

$$\dot{\hat{x}}^1 = \hat{x}^2, \quad \dot{\hat{x}}^2 = \hat{u}. \tag{8.51}$$

Возможность приведения системы (8.34) к системе (8.51) проверяется с помощью соответствующей теоремы Енгеля из теории дифференциальных форм и состоит в выполнении требований к производной системе дифференциальных форм, ассоциированных с исходной системой. Для системы (8.34) ассоциированная система дифференциальных форм имеет вид

$$\omega^1 = dx^1 - Fdt, \quad \omega^2 = dx^2 - udt, \tag{8.52}$$

а ее первая производная система $I^{(1)}$ образована единственной дифференциальной формой

$$I^{(1)} = \{\hat{\omega} = dx^1 + (uF_u - F)dt - F_u dx^2\}. \tag{8.53}$$

Формирование желаемой замены переменных начинается с поиска «нового времени» (первая формула в (8.50)) в соответствии с условием

$$d\hat{\omega} \wedge \hat{\omega} \wedge d\hat{t} = 0. \tag{8.54}$$

Символ $\wedge$ обозначает внешнее произведение соответствующих дифференциальных форм. Раскрывая формулу (8.54) и принимая во внимание, что

$$d\hat{t} = \frac{\partial \hat{t}}{\partial t}dt + \frac{\partial \hat{t}}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial \hat{t}}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial \hat{t}}{\partial u}du, \tag{8.55}$$

получим соответственно формулу

$$F_{uu}(\hat{t}_t + F\hat{t}_{x^1} + u\hat{t}_{x^2}) + (F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - FF_{ux^1} - uF_{ux^2})\hat{t}_u = 0, \tag{8.56}$$

которая полностью совпадает с уравнением (8.38), только в качестве функции $S(t, x^1, x^2, u)$ выступает функция $\hat{t}(t, x^1, x^2, u)$. Таким образом, возможность аналитического поиска желаемой замены переменных находится в полной зависимости от аналитического решения уравнения (8.38).

3. <u>Групповая классификация системы (8.34) и ее связь с уравнением (8.38).</u>

Поскольку предметом нашего анализа не является конкретная система второго порядка, а класс управляемых систем второго порядка с произвольной функцией $F(t, x^1, x^2, u)$, то вполне естественной является постановка задачи групповой классификации системы (8.34), то есть, согласно [178], поиск групп (или соответствующих алгебр) симметрий уравнения (8.34) для любых специализаций функции $F(t, x^1, x^2, u)$, при которых эта группа расширяется. Поиск симметрий сводится к поиску коэффициентов $(\tau(t, x^1, x^2, u), \xi^i(t, x^1, x^2, u), \varphi(t, x^1, x^2, u))$ инфинитезимального оператора симметрий

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}. \tag{8.57}$$

Условия симметрии могут быть представлены в разных эквивалентных формах, но, как вытекает из исследований, приведенных в статье [216], наиболее короткий путь к вычислениям – использование условий симметрии для ассоциированных с системой (8.34) дифференциальных форм (8.52), (8.53). Эти условия имеют вид:

$$X_0 \lrcorner\, \mathcal{L}_X \omega^i = 0, \quad U \lrcorner\, \mathcal{L}_X \omega^i = 0, \quad i = \overline{1,2}, \tag{8.58}$$

где $\mathcal{L}_X$ – производная Ли векторного поля X, а $\lrcorner$ – знак внутреннего произведения. Целесообразно также при расчетах использовать производящую функцию симметрий, которая вводится формулой

$$\sigma = X \lrcorner \hat{\omega}. \tag{8.59}$$

Тогда все коэффициенты оператора X могут быть получены через образующую функцию симметрий, а для вычисления самой функции σ будем иметь единственное уравнение:

$$F_{uu}(\sigma_t + F\sigma_{x^1} + u\sigma_{x^2}) + (F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - FF_{ux^1} - uF_{ux^2})\sigma_u = F_{uu}F_{x^1}\sigma. \tag{8.60}$$

Это линейное неоднородное уравнение, однородная часть которого целиком совпадает с уравнением (8.38). Заметим, что полная тождественность достигается лишь при условии $F_{x^1} = 0$.

4. Задача оптимального синтеза и ее связь с уравнением (8.38).

Пусть для системы (8.34) поставлена задача оптимального синтеза: найти синтезирующую функцию $u(t, x^1, x^2)$, которая обеспечивает оптимальный по времени

$$I = \min_{u \in U^*} t_f \tag{8.61}$$

переход системы (8.34) из некоторого начального состояния $x^1(0) = x_0^1, x^2(0) = x_0^2$ в конечное состояние $x^1(t_f) = x_f^1, x^2(t_f) = x_f^2$. При условии, что оптимальные управления всегда являются внутренней точкой множества допустимых управлений, то есть

$$u_{\text{opt}} \in \text{Int}U^*, \tag{8.62}$$

для функции оптимального качества Беллмана $S(t, x^1, x^2)$ должно выполняться условие

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{u \in U^*} \left(F(t, x^1, x^2, u) \frac{\partial S}{\partial x^1} + u \frac{\partial S}{\partial x^2} \right) = 0. \tag{8.63}$$

Это условие эквивалентно двум уравнениям:

$$S_t + FS_{x^1} + uS_{x^2} = 0, \quad F_u S_{x^1} + S_{x^2} = 0. \tag{8.64}$$

В этих уравнениях есть две неизвестных функции: $S(t, x^1, x^2)$ и $u(t, x^1, x^2)$. Если удается алгебраическим образом исключить функцию $u(t, x^1, x^2)$, то приходим к классическому уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана. По мнению автора, альтернативой этому классическому подходу является исключение функции $S(t, x^1, x^2)$. Для этого уже нужна техника дифференциального исключения. Заметим, что уравнения (8.64) могут быть переписаны в виде

$$X_0 S = 0, \quad X_1 S = [U, X_0] S = 0. \tag{8.65}$$

Ранее введенная форма $\hat{\omega}$ аннулируется операторами X_0, X_1, поэтому простейшее дифференциально-геометрическое условие исключения функции $S(t, x^1, x^2)$ из уравнений (8.64) состоит в выполнении условия

$$\hat{\omega} \wedge d\hat{\omega} = 0. \tag{8.66}$$

Его следствием является дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для синтезирующей функции:

$$F_{uu}(u_t + F u_{x^1} + u u_{x^2}) - (F_u F_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - F F_{ux^1} - u F_{ux^2}) = 0. \tag{8.67}$$

Это уравнение может быть тоже переписано в эквивалентной форме (8.36). Соответствующая программа для расчета синтезирующей функции в системе Reduce и сам результат расчета приведены ниже.

```
Reduce (Free CSL version), 14-apr-11 ...

1: in ipm;
load_package "excalc";
*** redefined
off fancy$
pform {t,x1,x2,u,F}=0$
fdomain F=F(t,x1,x2,u)$
Y1:=@ t+F*@ x1+u*@ x2$
UU:=@ u$
Y2:=Y1 |_ UU$
volume:=d td x1d x2$
omega:=Y1 _| (Y2 _| volume)$
fdomain u=u(t,x1,x2)$
omegad omega$
factor @(@(f,u),u)$
ws/volume;

@ f*(@ u + @ u*f + @ u*u) + @ f + @ f*f + @ f*u - @ f*@ f - @ f
 u u t x1 x2 t u u x1 u x2 u x1 x2

end$
```

Итак, дифференциально-геометрический подход к классическим задачам анализа и синтеза управляемых систем позволяет унифицировать соответствующие вычисления, сделать прозрачными структуру найденных решений и получить конечные результаты для целых классов управляемых систем. Развитие систем компьютерной алгебры позволяет не только адаптировать теоретические заделы прошлых лет, но и решать задачи, которые почти невозможно выполнить вручную. Более детально результаты, полученные автором на протяжении более чем 20 лет, изложены в статьях [189–216].

Литература к разделу 8

1. Hearn A.C. Computation of Algebraic Properties of Elementary Particle Reactions Using a Digital Computer / A.C. Hearn // CACM. – 1966. – Vol. 9, N 8. – P. 573–577.
2. Hearn A.C. REDUCE. User's Manual. Version 3.4. The RAND Corporation / Hearn A.C. – Santa Monica, 1991. – 284 p.
3. Sammet J.E. Introduction to FORMAC / J.E. Sammet, E. Bond // IEEE Trans. Electron. Computers. – 1965. – Vol. EC, N 13. – P. 386–394.
4. Trufyn N.A. Guide to Formac / Trufyn N.A. – Toronto: Univ. of Toronto, 1970. – 80 p.
5. Fateman R.J. The MACSYMA «Big Floating-Point» Arithmetic System / R.J. Fateman // SYSMSAC. – 1976. – P. 209–213.
6. Moses J. Macsyma – the fifth years / J. Moses // ACM SIGSAM Bull. – 1976. – Vol. 8, n 3. – P. 105–110.
7. MACSYMA Reference Manual. Version 9 / R. Bogen, J. Golden, M. Genesereth [et al.]. – MIT Mathlab Group, 1977.
8. Computer Aided Mathematics Group MACSYMA Reference Manual. Version 13. Symbolics Inc. – Cambridge, MA, 1988.
9. Criesmer J.H. Scratchpad I. An Interactive Fasility for Symbolic Mathematics / J.H. Criesmer, R.D. Jenks // Proc. of the 2nd Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation. – N.Y.: ACM Headquarters, 1971. – P. 42–58.
10. Jenks R.D. Scratchpad II: An Abstract Datatype System for Mathematical Computation / R.D. Jenks, R.S. Sutor, S.M. Watt // Science Software. IMA Volumes in Mathematics and its Applications. – N.Y.: Springer-Verlag, 1989. – Vol. 4. – P. 157–182.
11. АНАЛИТИК (алгоритмический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований) / В.М. Глушков, Б.Г. Бондарчук, Т.А. Гринченко [и др.] // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 102–134.
12. АНАЛИТИК-74 / В.М. Глушков, Б.Г. Бондарчук, Т.А. Гринченко [и др.] // Кибернетика. – 1978. – № 5.– С. 114–150.
13. Клименко В.П. К вопросу о распознавании функциональных свойств аналитических выражений на машинах серии МИР / В.П. Клименко, С.Б. Погребинский, Ю.С. Фишман // Кибернетика. – 1973. – № 2. – С. 43–52.
14. О внешнем математическом обеспечении электронной вычислительной машины МИР-2 / В.М. Глушков, И.Н. Молчанов, С.Б. Погребинский [и др.] // Кибернетика. – 1975. – № 5. – С. 111–114.

15. Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2 / В.М. Глушков, Т.А. Гринченко, В.П. Клименко [и др.]. – К.: Наукова думка, 1976. – 223 с.
16. Newell A. Report on a General Problem Solving program / A. Newell, J. Shaw, H. Simon // Proc. Int. Conf. Information Processing (UNESCO). – Paris, 1959. – P. 256.
17. Вычислительные машины и мышление / Под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. – М.: Мир, 1967. – 552 с.
18. Хант Э. Искусственный интеллект / Хант Э. – М.: Мир, 1978. – 560 с.
19. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект – основа новой информационной технологии / Поспелов Г.С. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
20. Толковый словарь по искусственному интеллекту / Аверкин А.Н., Гаазе-Рапопорт М.Г., Поспелов Д.А. - М: Радио и связь, 1992. – 256 с.
21. Абрамов С.А. Компьютерная алгебра / С.А. Абрамов, Е.В. Зима, В.А. Ростовцев // Программирование. – 1992. – № 5. – С. 4–25.
22. Компьютерная алгебра в научных и инженерных приложениях / Н.Н. Васильев, В.П. Гердт, В.Ф. Еднерал [и др.] // Программирование. – 1996. – № 6. – С. 34–47.
23. Васильев Н.Н. Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях / Н.Н. Васильев, В.Ф. Еднерал // Программирование. – 1994. – № 1. – С. 70–82.
24. Piskunov G.V. Hihg-order model for the stress-strain state of composite beams / G.V. Piskunov, A.V Goryk, A.L. Lyakhov // Proc. of the Second International Conference on Composite Science and Technology, (ICCST/2, 9–11 June 1998, Durban, South Africa). – Department of Mechanical Engineering University of Natal, Durban South Africa, 1998. – P. 333–338.
25. Iterative process for calculations of composite bars and results by computer algebra / V.G. Piskunov, S.G. Buryhin, A.V. Goryk [et al.] // Composite science and technology". International conference (ICCST/3). – Durban South Africa, 2000. – P. 235–241.
26. High order model of the stress-strain state of composite bars and its implementation by computer algebra / V.G. Piskunov, A.V. Goryk, A.L. Lyakhov [et al.] // Composite Structure.– 2000. – N 48. – P. 169–176.
27. Rozdestvensky Yu.V., Lyakhov A.L. Analytic description of roll passes' profile//Steel in Trans.London. – 1997. – 27(1). – P. 59–62.
28. Stifler S. Computer algebra in CAD/CAM: Instances from Industrial Experience / S. Stifler; Fleisher J. [et al.] (eds.) // Computer Algebra in Science and Engineering. – Singapore: World Scientific, 1995. – P. 299–302.
29. Zarifian A. Elaboration of computer model of an electric locomotive / A. Zarifian, P. Kolpahchyan // The Proc. of International Workshop «New Computer Technologies in Control System». – Pereslavi-Zalessky, Russia. – 1995. – P. 76–77.
30. Горик А.В. Решение задач изгиба композитных брусьев кусочно-однородной структуры / А.В. Горик, А.Л. Ляхов // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сб. докладов III-го Всероссийского семинара. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – Т. 1. – С. 59–69.
31. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитных брусьев при изгибе в двух плоскостях / А.В. Горик, А.Л. Ляхов, В.Г. Пискунов [и др.] // Проблемы прочности. – 1999. – № 3. – С. 95–103.
32. Построение и реализация в системе компьютерной алгебры АНАЛИТИК неклассической итерационной модели напряженно-деформированного состояния композитных брусьев / А.В. Горик, А.Л. Ляхов, В.Г. Пискунов [и др.] // Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике / Под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого. – Гомель: ИММС НАНБ, 1999. – С. 378–379.
33. Дануца Л.Б. Применение системы компьютерной алгебры АНАЛИТИК-93 для решения пространственных задач теории упругости / Л.Б. Дануца, Е.А. Калина, А.Л. Ляхов // Математические машины и системы. – 1997. – № 1. – С. 100–104.
34. Иртегов В.Д. О моделировании и исследовании некоторых задач с помощью компьютерной алгебры / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титаренко // Программирование. – 1997. – № 1. – С. 68–74.

35. Генерирование в среде АНАЛИТИК файлов обмена данными с другими системами программирования / В.П. Клименко, И.В. Алексеева, А.Л. Ляхов [и др.] // Математические машины и системы. – 1999. – № 2. – С. 38–47.
36. Клименко В.П. Автоматическое формирование аналитического решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений / В.П. Клименко, А.Л. Ляхов, Ю.С. Фишман // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000, памяти М.А. Лаврентьева): Тезисы докладов. Ч. IV. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. – С. 107.
37. Клименко В.П. Деякі властивості системи програмування АНАЛІТИК / В.П. Клименко, А.Л. Ляхов, Ю.С. Фишман // The 4-th INTERNATIONAL MODELLING SCHOOL of AMSE-UAPL. – Crimea, Alushta, Ukraine, 1999. – September 10–15.
38. Клименко В.П. Аналитическое моделирование решения некоторого класса краевых задач / В.П. Клименко, А.Л. Ляхов, Т.Н. Швалюк // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2000. – № 2 (4). – С. 82–87.
39. Клименко В.П. Організація символьно-чисельного інтерфейсу в деяких задачах про розрахунки електричних полів у кусково-однорідних середовищах / В.П. Клименко, О.Л. Ляхов, Ю.С. Фішман // 3-я міжн. наук.-техн. конф. "Математичне моделювання в електротехніці та електроенергетиці", (Львів, 25-30 жовтня 1999 р.). Тези доп. – Львів: Львівська політехніка, 1999. – С. 118–119.
40. Программирование решения инженерных задач в среде системы АНАЛИТИК / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман, А.В. Горик [и др.] // Перша міжнар. наук.-практ. конф. з програмування (УкрПРОГ'98): зб. праць. – Київ: Кібернетичний центр НАН України, 1998. – С. 553–562.
41. Лычев С.А. Формализация процедуры вывода уравнений динамики для трехслойных оболочек в системе компьютерной алгебры MATHEMATICA / С.А. Лычев, Ю.В. Сидоров // Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады III-го Всероссийского семинара. – Т. 1. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – С. 267–284.
42. Ляхов А.Л. Вычисление методами компьютерной алгебры интегралов по плоской области с кусочно-гладкой границей / А.Л. Ляхов // Математические машины и системы. – 1999. – № 1. – С. 53–61.
43. Ляхов А.Л. Решение задач теории упругости композитных материалов в среде системы программирования АНАЛИТИК / А.Л. Ляхов // Математические машины и системы. – 1998. – № 2. – С. 100–108.
44. Ляхов А.Л. Синтез уравнения кусочно-гладкой линии методами компьютерной алгебры // Математические машины и системы. – №1. – 1998. – С. 32–37.
45. Ляхов А.Л. Синтез уравнения упругой линии прогиба бруса методами компьютерной алгебры / А.Л. Ляхов // Управляющие системы и машины. – 1999. – № 4. – С. 18–23.
46. Ляхов О.Л. Методи комп'ютерної алгебри в задачах згину брусів кусково-однорідної структури / О.Л. Ляхов // Четвертий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. Тези доповідей. – Львів: Кінпатрі ЛТД, 1999. – С. 68–69.
47. Аналитическое моделирование напряженно-деформированного состояния изгибаемых композитных брусьев / В.Г. Пискунов, А.В. Горик, А.Л. Ляхов [и др.] // Численные и аналитические методы расчета конструкций". Труды международной конференции. – Самара, 1998. – С. 163–167.
48. УкрПРОГ-98. Перша міжнар. наук.-практ. конф. з програмування (УкрПРОГ'98), (Київ, 2-4 вересня 1998 р.). – К.: Кібернетичний центр НАН Укрііни, 1998. – 611 с.
49. Четвертий міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: Кінпатрі ЛТД, 1999. – 151 с.
50. Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике / Под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого. – Гомель: ИММС НАНБ, 1999. – 420 с.
51. Численные и аналитические методы расчета конструкций // Труды международной конференции. – Самара: СГАСА, 1998. – 323 с.

52. Еднерал В.П. Локальное построение общего решения уравнения ЧУ-ЛОУ с помощью ЭВМ / В.П. Еднерал // Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. – Дубна: ОИЯ И, 1980. – С. 159–169.
53. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / Олвер П. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
54. Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. – К.: Наукова думка, 1989. – 336 с.
55. Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций / А. Кадич, Д. Эделен. – М.: Мир, 1987. – 168 с.
56. Теллес Д.К.Ф. Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач / Теллес Д.К.Ф. – М.: Стройиздат, 1987. – 161 с.
57. Сєров М.І. Нелокальна формула розмноження розв'язків рівняння SINE-Гордона / М.І. Сєров // Всеукраїнська коференція «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь», присвяч. 70-річчю від дня народж. проф. В. Скоробогатько (15–19 вересня 1997): Тези доповідей. – К.: Ін-т математики, 1997. – С. 101.
58. Солитоны / Под ред. С.П. Новикова. – М.: Наука, 1983. – 408 с.
59. Theory and application of the sine-Gordone equations / A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee [et al.] // Riv. Nuovo Cim. – 1971. – N 1. – P. 227–267.
60. Bullongh R.K. Solitons / R.K. Bullongh // Interaction of radiation and condensed matter. International Atomic Energy Agency. – 1977. – Vol. 1. – P. 381–469.
61. Пискунов В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.
62. Горик О.В. Некласична ітераційна модель напружено-деформованого стану композитних брусів / О.В. Горик // Доп. НАН України. – 1999. – № 10. – С. 45–53.
63. Тимошенко С.П. Теория упругости / Тимошенко С.П. – М.: ОНТИ, 1934. – 452 с.
64. Определение теоретической подачи вертикального дифференциального растворонасоса с качающейся насосной колонкой / А.В. Головкин, А.Г. Онищенко, Д.Г. Тищенко [и др.] // Проблеми теорії і практики залізобетону: зб. наук. праць. – Полтава: ПДТУ імені Юрія Кондратюка, 1997. – С. 98–101.
65. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. – М.: Мир, 1979. – 535 с.
66. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М: Мир, 1982. – 416 с.
67. АНАЛИТИК. Численно-аналитическое решение задач на малых ЭВМ: Справочное пособие / Б.А. Бублик, В.П. Клименко, С.Б. Погребинский [и др.]. – К.: Наукова думка, 1987. – 144 с.
68. АНАЛИТИК-79 / Глушков В.М., Бондарчук Б.Г., Гринченко Т.А., Дородницына А.А., Драх А.М., Клименко В.П., Погребинский С.Б., Савчак О.Н., Фишман Ю.С., Царюк Н.П. – К.: 1983. – № 12. – 73 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики).
69. АНАЛИТИК-89 / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман, Б.А. Бублик [и др.]. – М.: ВИНИТИ, 1989. – 77 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.06.89, №4305-В89.
70. Основные свойства алгоритмического языка АНАЛИТИК-91 / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 117–128.
71. АНАЛИТИК-93 / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – С. 127–157.
72. АНАЛИТИК-2000 – язык компьютерной алгебры (ориентированный на задачи, требующие высокого уровня искусственного интеллекта) / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман, А.Л. Ляхов [и др.] // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000, памяти М.А. Лаврентьева): Тезисы докладов. Ч. IV. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. – С. 107–108.

73. АНАЛИТИК-2000 / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман [и др.] // Математичні машини і системи. – 2001. – №1–2. – С. 66–99.
74. Jenks R.D. AXIOM. The Scientific Computation System / R.D. Jenks, R.S. Sutor. – Oxford: Springer-Verlag, 1992. – 742 p.
75. Postel F. A Review of the ODE Solvers of AXIOM, Derive, Maple, MATHEMATICA, MACSYMA, MuPAD and REDUCE / F. Postel, P. Zimermann // Proc. of the 5th Rhine Workshop on Computer Algebra, (April 1-3, 1996). – Saint-Louis, France. This review, together with log files for each of systems, is available from. – Режим доступу: http:// www.loria.fr//~zimmerma/ ComputerAlgebra/.
76. Аладьев В.З. Введение в среду пакета MATHEMATICA 2.2 / В.З. Аладьев, М.Л. Шишаков. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1997. – 368 с.
77. Дьяконов В.П. Системы символьной математики MATHEMATICA 2.0 и MATHEMATICA 3.0 / Дьяконов В.П. – М.: СК ПРЕСС, 1998. – 328 с.
78. Wolfram S. The Mathematica Book. Third Edition. Mathematica Version 3 / Wolfram S. – Cambridge: University Press, 1998.
79. Капустина Т.В. Компьютерная система MATHEMATICA 3.0 / Капустина Т.В. – М.: СОЛОН – Р, 1999. – 240 с.
80. Heal M., Hansen L.M., Rickard K.M. Maple V Release 5. Learning Guide / Heal M., Hansen L.M., Rickard K.M. – Springer, 1998. – 284 p.
81. Maple V Realise 5. Programming Guide / B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal [et al.] – Springer, 1998. – 380 p.
82. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE v R3/ R4/ R5 / Дьяконов В.П. – М.: Солон, 1998. – 400 с.
83. Манзон Б.М. Maple V Power Edition / Манзон Б.М. – М.: Филинъ, 1998. – 240 с.
84. Манзон Б. Maple 6 – качественно новый уровень математических расчетов / Б. Манзон // Мир ПК. – 2000. – № 9. – С. 62–69.
85. Попов Б. А. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. – К.: Наукова думка, 1984. – 600 с.
86. Берзтисс А.Т. Структуры данных / Берзтисс А.Т. – М.: Мир, 1974. – 408 с.
87. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
88. Канторович Л.В. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машине / Л.В. Канторович // ДАН СССР. – 1957. – Т. 113. – С. 738–741.
89. Канторович Л.В. О математической символике, удобной при вычислениях на машине / Л.В. Канторович, Л.Т. Петрова // Труды III Всесоюзного математического съезда. – М.: Наука, 1956. – Т. 2. – С. 151.
90. Клименко В.П. Выполнение операций над выражениями / В.П. Клименко // Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем. – К.: Ин-т кибернетики, 1968. – Вып. 2. – С. 33–49.
91. Клименко В.П. Об интерпретации выражений / В.П. Клименко // Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем. – К.: Ин-т кибернетики, 1968. – Вып. 2. – С. 12–31.
92. Клименко В.П. Основные принципы построения систем интерпретации языков, проблемно ориентированных на научные и инженерные задачи / В.П. Клименко // Кибернетика. – 1990. – №1. – С. 49–56.
93. Гринченко Т.А. Машинное представление и обработка аналитических выражений / Т.А. Гринченко // Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем. – К.: Ин-т кибернетики, 1968. – Вып. 2. – С. 50–71.
94. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Ван дер Варден Б.Л. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
95. Клименко В.П. АНАЛИТИК-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман // Параллельное программирование и высокопроизводительные структуры: Тез. докл. VII Всесоюз. семинара. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1988. – С. 173–174.

96. Клименко В.П. Система распознавания для автоматической реализации аналитических методов / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман // Проблемы теоретической кибернетики: Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции. – Горький: ГГУ, 1988. – С. 152–153.

97. Морозов А.А. Принципы построения системы программирования АНАЛИТИК-91 (ориентированной на более совершенную технологию программирования научных и прикладных задач) / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман // Упр. системы и машины. – 1992. – № 3. – С. 60–69.

98. Фишман Ю.С. Основные особенности создания и применения средств реализации численно-аналитических методов / Ю.С. Фишман // Математические машины и системы. – 1997. – № 2. – С. 9–18.

99. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Сибирский математический журнал. – 1971. – № 12. – С. 1142–1145.

100. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа / Ю.И. Кулаков // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201, № 3. – С. 570–572.

101. Кон П. Универсальная алгебра / Кон П. – М.: Мир, 1968. – 352 с.

102. Александров П.Я. Комбинаторная топология / Александров П.Я. – М.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1947. – 660 с.

103. Человек и вычислительная техника / В.М. Глушков, В.И. Брановицкий, А.М. Довгялло [и др.]. – Киев: Наукова думка, 1971. – 296 с.

104. Пойа Дж. Математическое открытие / Пойа Дж. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

105. Бенерджи Р. Теория решения задач. – М.: Мир, 1972. – 224 с.

106. Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия. – 1988. – 847 с.

107. Фишман Ю.С. Базовые процедуры компьютерной алгебры / Ю.С. Фишман // Математические машины и системы. – 1997. – № 2. – С. 26–33.

108. Клименко В.П. Аппарат применения формул в системе компьютерной алгебры / В.П. Клименко, Ю.С. Фишман, Т.Н. Швалюк // Математичні машини і системи. – 2002. – № 2. – С. 56–63.

109. Зацерковний В.І. Обчислювальна техніка: Історія розвитку від лампових комп'ютерів до комп'ютерів на інтегральних схемах / Зацерковний В.І., Литвинов В.В., Клименко В.П. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2013. – 438 с.

110. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: ИПММС, 2007. – 181 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/ gorban_i_i/ index.html.

111. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/ gorban_i_i/index.html.

112. Горбань И.И. Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях. [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2008. – 272 с. – Режим доступа: http://www.immsp. kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

113. Gorban I.I. New approach in optimization of space-time signal processing in hydroacoustics / Gorban I.I. // Course notes to the Tutorial on the conference «Ocean'98». – France, IEEE, 1998. – 69 p.

114. Gorban I.I. Mobile Sonar Systems: Optimization of Space-Time Signal Processing / Gorban I.I. – Kiev: Nauk. dumka, 2008. – 240 p.

115. Горбань И.И. Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров / Горбань И.И. – К: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. – 150 с.

116. Горбань І.І. Основи теорії випадкових функцій і математичної статистики / Горбань І.І. – К.: КІ ВПС МЗС України, 2000. – 245 с.

117. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів [Електронний ресурс] / Горбань І.І. – К.: ІПММС НАН України, 2003. – 245 с. – Режим доступу: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html.
118. Уваров Б.М. Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками / Б.М. Уваров, Ю.Ф. Зіньковський. – Луганськ: ЛНПУ, 2011. – 180 с.
119. Уваров Б.М. Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками / Б.М. Уваров, Ю.Ф. Зіньковський. – Луганськ: ЛНПУ, 2011. – 212 с.
120. Горбань И.И. Критерии и параметры статистической неустойчивости / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 4. – С. 106 – 114.
121. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.
122. Горбань И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 171 – 184.
123. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / I.I. Gorban // Information Models of Knowledge. – Kiev – Sofia: ITHEA, 2010. – P. 398–410.
124. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры шельфовой зоны окраинных морей / И.И. Горбань, Н.И. Горбань, В.В. Новотрясов [и др.] // Седьмой Всероссийский симпозиум «Физика геосфер». – Владивосток, 2011. – С. 542 – 547.
125. Горбань И.И. Статистическая устойчивость колебаний температуры воздуха и количества осадков в районе Москвы / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2011. – №3. – С. 97 – 104.
126. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability (part II) / I.I. Gorban // International Journal of Information Theories and Applications. – 2011. – Vol. 18, N 4. – P. 321–333.
127. Горбань И.И. Статистическая устойчивость излучения астрофизических объектов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 155–160.
128. Горбань И.И. Гиперслучайные явления и их описание / И.И. Горбань // Акустический вестник. – 2005. – Т. 8, № 1–2. – С. 16–27.
129. Gorban I.I. Hyper-random phenomena: definition and description / I.I. Gorban // Information Theories and Applications. – 2008. – Vol. 15, N 3. – P. 203–211.
130. Gorban I.I. Cognition Horizon and the Theory of Hyper-random Phenomena / I.I. Gorban // International Journal of Information Theories and Applications. – 2009. – Vol. 16, N 1. – P. 5–24.
131. Горбань И.И. Статистическая неустойчивость физических процессов / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, № 9. – С. 40–52.
132. Зиньковский Ю.Ф. Гиперслучайность алгоритмов моделирования современной радиоэлектронной аппаратуры / Ю.Ф. Зиньковский, Б.М. Уваров // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011.– Т. 54, № 3. – С. 39–46.
133. Уваров Б.М. Методы представления характеристик радиоэлектронной аппаратуры на основе теории гиперслучайных явлений // Известия вузов. Радиоэлектроника.– 2010.– № 10.– С. 35–42.
134. Gorban I.I. Space-time signal processing for moving antennae / I.I. Gorban // Elsevier, Advances in Engineering Software. – 2000. – Vol. 31. – P. 119–125.
135. Горбань И.И. Расходящиеся последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 1. – С. 106–118.
136. Горбань И.И. Многозначные величины, последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 147–161.
137. Gorban I.I. Divergent and multiple-valued sequences and functions / I.I. Gorban // Problems of Computer Intellectualization. – Sofia – Kyiv, 2012. – P. 359–374.
138. Волобоев В.П. Компьютерная система обработки сигналов, управления, отображения и контроля двухкоординатной радиолокационной станции кругового обзора / В.П. Волобоев, В.П. Клименко, В.Д. Лосев // Математичні машини і системи. – 2005. – №3. – С. 67–80.

139. Бондаренко Е.А. Стелс-технологии в кораблестроении и методы противодействия радиолокационных станций берегового (морского, воздушного) базирования / Е.А. Бондаренко, В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2006. – № 4. – С. 73–82.
140. Раскин Д. Интерфейс. Новые направления в проектировании компьютерных систем / Раскин Д. – Санкт-Петербург-Москва: Символ, 2006. – 268 с.
141. http://en.wikipedia.org/wiki/Typer.
142. http://ru.wikipedia.org/wiki/Предиктивный_ввод_текста.
143. http://ru.wikipedia.org/wiki/T9.
144. http://ru.wikipedia.org/wiki/Spell_Cheking.
145. http://citforum.ru/nets/services/services0312.shtml.
146. Card S.K. The Psychology of Human-Computer Interaction / S.K. Card, T.P. Moran, A. Newell. – Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1983. – 488 с.
147. Kieras D. Using the Keystroke-Level Model to Estimate Execution Times, University of Michigan [Електронний ресурс] / D. Kieras. – Режим доступу: ftp://www.eecs.umich/edu/people/rchong/kieras/GOMS/KLM.pdf.
148. Кузьменко Г.Е. Декомпозиция ментальных операторов в моделях GOMS-KLM применительно к интерфейсу пользователя в задачах ввода и контроля данных / Г.Е. Кузьменко, В.А. Литвинов, И.Н. Оксанич // Интеллектуальный анализ информации IX междунар. конф. имени Т.А. Таран ИАИ-2009, (Киев, 19–22 мая 2009 г.). – Киев, 2009. – С. 212–218.
149. Оксанич И.Н. Модель декомпозиции ментальных операторов в проблемно-ориентированном интерфейсе пользователя и ее экспериментальное исследование / И.Н. Оксанич // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 105–112.
150. Интеллектуализованный интерфейс пользователя информационно-поисковой системы в задаче поиска по ключевому слову («образцу») с упреждающей подсказкой / Г.Е. Кузьменко, В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко [и др.] // Математичні машини і системи. – 2011. – № 1. – С. 61–71.
151. Литвинов В.А. Логико-вероятностная модель пошаговой подсказки в интерфейсе пользователя поисковой системы по ключевому слову / В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко, И.Н. Оксанич // Математичні машини і системи. – 2011. – № 2. – С. 41–49.
152. Литвинов В.А. Объем порции пошаговой подсказки и эффективность интерфейса пользователя системы поиска по ключевому слову / В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко, И.Н. Оксанич // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 81–87.
153. Литвинов В.А. Относительная производительность ускоренного ввода ключевого слова в поисковой системе с пошаговой подсказкой / В.А. Литвинов, И.Н. Оксанич, С.Я. Майстренко // Математичні машини і системи. – 2013. – № 2. – С. 91–95.
154. Рякин О.М. Автоматизация процессов. Пакет контроля и локализации ошибок при входной обработке документальной информации / О.М. Рякин // Логическое управление. – М.: Атомиздат, 1978. – С. 85–90.
155. Кузьменко Г.Є. Алгоритми і моделі автоматичної ідентифікації та корекції типових помилок користувача на основі природної надмірності / Г.Є. Кузьменко, В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко [и др.] // Математичні машини і системи. – 2004. – № 2. – С. 134–148.
156. Литвинов В.А. Исправление ошибок пользователя на основе совместного применения помехозащитных кодов и виртуального словаря допустимых слов / В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко, Ю.Г. Пилипенко // Математичні машини і системи. – 2007. – №1. – С. 67–76.
157. Литвинов В.А. Экспериментальная оценка эффективности автоматического обнаружения типовых ошибок пользователя по словарям русского и украинского языков / В.А. Литвинов, С.Я. Майстренко, О.П. Юденко // Міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології» SAIT-2012, (Kyiv, April 24, 2012). – Kyiv, 2012.

158. Литвинов В.А. Контроль достоверности и восстановление информации в человеко-машинных системах / А.В. Литвинов, В.В. Крамаренко. – Киев: Техника, 1986. – 200 с.
159. Есаян А.Р. Управляющие структуры и структуры данных в Maple / Есаян А.Р. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2007. – 316 с.
160. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962.
161. Кухтенко А.И. Кибернетика и фундаментальные науки / Кухтенко А.И. – К.: Наукова думка, 1987. – 144 с.
162. Sontag E.D. Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-Dimensional Systems, volume 6 of Texts in Applied Mathematics / Sontag E.D. – New-York: Springer-Verlag, 1998. – 531 p.
163. Sastry S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and control / Sastry S. – Springer-Verlag, 1999. – 667 c.
164. Isidori A. Nonlinear Control Systems / Isidori A. – Springer-Verlag, 1995. – 549 p.
165. Nijmeijer H. Nonlinear Dynamical Control Systems / H. Nijmeijer, A.J. van der Schaft. – New-York: Springer-Verlag, 1990. – 467 p.
166. Chernousko F.L. Control of Nonlinear Dynamical Systems / Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 396 c.
167. Trautman A. Remarks on the history of the notion of Lie differentiation / A. Trautman // Variations, Geometry and Physics in honour of Demeter Krupka’s sixty-fifth birthday / O. Krupková, D.J. Saunders (Editors). – Nova Science Publishers, 2008. – P. 297–302.
168. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. – Киев: Наукова думка, 1976. – 270 с.
169. Подчукаев В.А. Теория автоматического управления (аналитические методы) / Подчукаев В.А. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 392 с. (см. также http://www.sgau.ru/analitik_c).
170. Новожилов И.В. Записки ретроград / И.В. Новожилов // Мир ПК. – 1998. – № 3. – С. 106–109 (см. также http://www.osp.ru/pcworld/1998/03/158704/_p2.html и http://osp.aanet.ru/pcworld/1998/03/106.htm).
171. Коренев Г.В. Введение в механику управляемого тела / Коренев Г.В. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
172. Exterior Differential Systems / R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner [et al.] // Springer-Verlag. – 1991. – Vol. 18.
173. Chow W.L. Uber Systeme von linearen partieller Differentialgjeichungen erster Ordnung / W.L. Chow // Math. Ann. – 1940. – N 1. – P. 98–105.
174. Flatness and defect of nonlinear systems:introductory theory and examples / M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin [et al.] // Int. J. Control. – N 61(6). – P. 1327–1361.
175. Krasil'shchik I.S. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics / I.S. Krasil'shchik, A.M. Vinogradov (Eds.) // Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1999.
176. Рашевский П.К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией / П.К. Рашевский // Уч. записки Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. – (Серия «Физ.-мат. наук»). – 1938. – № 2. – С. 83–94.
177. Щипанов Г.В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов / Г.В. Щипанов // Автоматика и телемеханика. – 1939. – № 1. – С. 4–37.
178. Ovsiannikov L.V. Group Analisys of Differential Equations / L.V. Ovsiannikov. – New-York: Academic Press, 1982.
179. Калинина Е.А. Теория исключения: Метод. указ. к курсу высшей алгебры / Е.А. Калинина, А.Ю. Утешев. – СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
180. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Олвер П.; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
181. Ritt J.F. Differential Algebra / Ritt J.F. – Dover Publications Inc, 1950.
182. Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic groups / Kolchin E.R. – Academic Press, 1973.

183. Wittkopf A.D. Algorithms and Implementations for Differential Elimination / Wittkopf A.D. – PhD Thesis, Simon Fraser University, 2004. – 326 p.
184. Burke W. Applied Differential Geometry / Burke W. – Cambridge University Press, 1985. – 410 p.
185. Яковенко Г.Н. Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа / Яковенко Г.Н. – М.: МЗ Пресс, 2006. – 120 с.
186. Abraham R. Foundations of Mechanics / R. Abraham, J.E. Marsden. – Addison-Wesley Publishing Company, lnc., 1978. – 806 p.
187. Stormark O. Lie's Structural Approach To Pde Systems / Stormark O. – Cambridge Univ. Press, 2000.
188. Diop S. Elimination in Control Theory / Diop S. // Math. Control Signals Systems. – 1991. – N 4. – P. 17–32.
189. Легенький В.И. Синтез оптимального управления гладкими динамическими системами как задача группового анализа / В.И. Легенький // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики: сб. науч. тр. / АН УССР. Ин-т математики. – Киев, 1990, – С. 40–43.
190. Легенький В.И. Теоретико-групповой алгоритм решения задач синтеза оптимального управления / В.И. Легенький // Кибернетика и вычислительная техника: Респуб. межведомств. сб. науч. тр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – Киев, 1991. – Вып. 91: Сложные системы управления. – С. 41–48.
191. Легенький В.И. Симметрии и проблема редукции в синтезе оптимальных систем / В.И. Легенький // Кибернетика и вычислительная техника: Респуб. межведомств. сб. науч. тр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – Киев, 1992. – Вып. 95: Сложные системы управления. – С. 12–18.
192. Легенький В.И. Приложение групп Ли к решению задач программного управления полетом самолета / В.И. Легенький // Автоматика. – 1992. – № 6. – С. 26–33.
193. Легенький В.И. Использование системы аналитических вычислений "REDUCE" при синтезе алгоритмов оптимального управления / В.И. Легенький, Ю.М. Саранчук // Оборудование летательных аппаратов: сборник статей ВНО. – Киев: КВВАИУ, 1992. – Ч. 3. – С. 24–26.
194. Легенький В.И. Точечные симметрии и управляемость динамических систем с управлением / В.И. Легенький // Доклады НАН Украины. – 1995. – № 3. – С. 15–17.
195. Легенький В.И. О минимально-параметрической форме уравнений движения летательных аппаратов / В.И. Легенький // Прикладная механика. – 1995. – № 10. – С. 81–87.
196. Легенький В.И. К вопросу о минимуме максимальной скорости пикирующего самолета / В.И. Легенький // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 129–134.
197. Lehenkyi V. Point symmetries of control systems and their applications / V. Lehenkyi // Proc. of the 1-st International Conference «'Symmetry in nonlinear mathematical physics». Math. Phys. – 1997. – Vol. 4, N 1–2. – P. 168–172.
198. Lehenkyi V. The integrability of some underdetermined systems / V. Lehenkyi // Proc. of the 3-d International Conference "Symmetry in nonlinear mathematical physics". – 2000. – Vol. 30, Part 1. – P. 157–164.
199. Легенький В.И., Рудольф Й. Групповая классификация управляемых систем второго порядка / В.И. Легенький, Й. Рудольф // Праці ін-ту математики НАН України. – 2001. – Т. 36. – С. 167–176.
200. Легенький В.И. О симметриях уравнений движения "неголономного автомобиля" / В.И. Легенький, Й. Рудольф // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – № 6. – С. 74–76.
201. Lehenkyi V. A characteristic prolongation for second order control systems / V. Lehenkyi, J. Rudolph // Institut des Hautes Etudes Scientifigues (IHES, France), Preprint/M/03/54. – 2003. – 16 p.

202. Легенький В.И. О построении систем управления с инвариантной программой / В.И. Легенький // Математичні машини і системи. – 2004. – № 1. – С. 115–121.
203. Lehenkyi V. Towards the Group Classification of Control Systems / V. Lehenkyi, J. Rudolph // Proc. of the 5-th International conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Ukraine, Kiev. – 2004. – Vol. 50, Part 1. – 2004. – P. 170–175.
204. Легенький В.И. Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t,x,\dot x,...) + \varepsilon F(t,x,\dot x,...)=0$ к виду $G(\hat t,\hat x,\dot \hat x,...) = 0$ / В.И. Легенький // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 2. – С. 94–102.
205. Lehenkyi V. On a characteristic vector field for systems reducible to order two / V. Lehenkyi, J. Rudolph // 16th IFAC World Congress, (Prague, Czech Republic, July 3–8, 2005). – Prague, 2005. – 6 p.
206. Легенький В.И. Пи-теорема в проблеме параметрической редукции динамических систем / В.И. Легенький // Симетрія і інтегрованість рівнянь математичної фізики. – Київ: Інститут математики, 2006. – С. 187–196.
207. Легенький В.И. О минимально-параметрических моделях в динамике полета / В.И. Легенький // Труды Пятого междунар. Аэрокосмического конгресса IAC'06, (Москва, 27–31 августа 2006 г.). – Информрегистр, № 0320702706 / 14.12.2007. – С. 223–226.
208. Легенький В.И. О расслоении алгебраических уравнений / В.И. Легенький // Симметрии дифференциальных уравнений: межвед. сб. ст. – М.: МФТИ, 2008. – С. 121–131.
209. Легенький В.И. Безразмерные переменные: теоретико-групповой подход // Симметрии дифференциальных уравнений: межвед. сб. ст. / В.И. Легенький, Г.Н. Яковенко. – М.: МФТИ, 2008. – С. 132–142.
210. Ochkov V.F. Physical quantities, dimensions and units of measurement in mathematical packages / V.F. Ochkov, V.I. Lehenkyi, E.A. Minaeva // Mathematical Machines and Systems. – 2009. – N 1. – P. 78–90.
211. Чоха Ю.Н. Практическое использование комплексного контрольно-расчетного метода в процессах диагностирования сложных динамических объектов авиатехники / Ю.Н. Чоха, В.И. Легенький // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 162–170.
212. Легенький В.И. Синтез оптимальных законов управления ориентацией летательных аппаратов / В.И. Легенький // Сборник пленарных и избранных докладов Шестого междунар. Аэрокосмического конгресса. – Москва, 2010. – С. 251–262.
213. Легенький В.И., Рудольф Й. Методы дифференциальной алгебры в синтезе оптимальных законов управления ЛА / В.И. Легенький, Й. Рудольф // Информационные технологии в управлении сложными системами. Тезисы докладов. – Днепропетровск: Изд-во "Свидлер А.Л.", 2011. – С. 106–107.
214. Легенький В.І. Групові властивості систем керування третього порядку / В.І. Легенький, Й. Рудольф // Математичні машини і системи. – 2011. – № 4. – С. 116–124.
215. Легенький В.И. Похідний тип та симетрійний аналіз систем керування третього порядку з одним керуючим впливом / В.И. Легенький, Й. Рудольф // Зб. наук. праць за матеріалами "II Всеукраїнського наукового семінару Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи (до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)". – Полтава: ПолтНТУ, 2012. – С. 24–29.
216. Легенький В.И. Об условиях симметрии управляемых систем / В.И. Легенький // Сьома міжнародна конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2012". Тези доповідей. – Чернігів, 2012. – С. 123–124.
217. Система автоматизации производства программ – АПРОП / В.М. Глушков, Е.М. Лаврищева, А.А. Стогний [и др.]. – Киев: ИК АН УССР, 1976. – 136 с.
218. Лаврищева Е.М. Технологические аспекты создания ППП / Е.М. Лаврищева, Д.С. Хоролец // Общесистемное обеспечение банков данных сетей и комплексов ЭВМ. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1986. – С. 76–81.

219. Лаврищева Е.М. Принципы технологической подготовки разработки ППО СОД / Е.М. Лаврищева // Проектирование и разработка пакетов программ. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. – С. 34–40.
220. Лаврищева Е.М. Основы технологической подготовки разработки программ СОД / Лаврищева Е.М. – Киев, 1987. – 29 с. (Препринт 87-5 / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР).
221. Лаврищева Е.М. Технологичекая подготовка и инженерия разработки программных средств / Е.М. Лаврищева // Программное обеспечение ЭВМ. Индустрия программного обеспечения. Тезисы докладов Междунар. конф. – Калинин, 1987. – Секция 4. – Ч. 1. – С. 50–53.
222. Лаврищева Е.М. Технологическая подготовка и программная инженерия / Е.М. Лаврищева // УСиМ. – 1988. – № 1. – С. 48–52.
223. Лаврищева Е.М. Модель процесса разработки программных средств / Е.М. Лаврищева // УСиМ. – 1988. – № 5. – С. 43–46.
224. Комплекс программных средств, обеспечивающих построение ППП на основе формализованных спецификаций модулей – АПФОРС / Е.М. Лаврищева, Д.С. Хоролец, А.Т. Вишня [и др.]. – Деп. в ЕрНУЦ СНПО "Алгоритм", 1985, Инв. 104 и РФАП АН УССР, 1987, Инв. АД0002.
225. Программно-технологический комплекс ведения разработки ППО. Технологические документы / Е.М. Лаврищева, Г.И. Коваль, Т.М. Коротун. – Киев: 1988. – 571 с. – Деп. в РФАП АН УССР, Инв. АП0218-И.
226. Лаврищева Е.М. Сборочное программирование / Е.М. Лаврищева, В.М. Грищенко. – Киев: Наукова думка, 1991. – 213 с.
227. Капитонова Ю.В. Парадигмы и идеи академика В.М. Глушкова / Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский. – Киев: Наукова думка, 2003. – 355 с.
228. Глушков В.М. Кибернетика, ВТ, информатика (АСУ). Избр. труды в 3-х т. / Глушков В.М. – Киев: Наукова думка, 1990. – 262 с., 267 с., 281 с.
229. Глушков В.М. Фундаментальные основы и технология программирования / В.М. Глушков // Программирование. – 1980. – № 2. – С. 3–13.
230. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики / Глушков В.М. – Москва: Наука, 1982. – 552 с.
231. Система автоматизации производства программ (АПРОП) / В.М. Глушков, Е.М. Лаврищева, А.А. Стогний [и др.]. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1976. – 134 с.
232. Глушков В.М. О применении метода формализованных технических заданий к проектированию программ обработки структур данных / В.М. Глушков, Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский // Программирование. – 1978. – № 6. – С. 31–40.
233. Вельбицкий И.В. Технологический комплекс автоматизации программ на машинах ЕС ЭВМ и БЭСМ–6 / Вельбицкий И.В., Ходаковский В.Н., Шолмов Л.И. – М.: Финансы и статистика, 1980. – 253 с.
234. Лаврищева Е.М. Связь разноязыковых модулей в ОС ЕС / Е.М. Лаврищева, В.Н. Грищенко. – Москва: Финансы и статистика, 1982. – 127 с.
235. А.с. 45292. Инструментально-технологический комплекс разработки и обучения приемам производства программных систем / Е.М. Лаврищева, В.М. Зинькович, А.Л. Колесник [и др.]. – Государственная служба интеллектуальной собственности Украины. – Опубл. 27.08.2012. – 103 с.