

Диференціальні інваріанти: знаходження, класифікація, застосування. Приклад алгебри Пуанкаре

Ірина А. Єгорченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Поняття диференціального інваріанта широко використовується в різних галузях математики, але систематичний опис диференціальних інваріантів для довільної розмірності та для наборів функцій досить нещодавня робота.

Диференціальні інваріанти та побудова диференціальних інваріантів були вперше розглянуті Софусом Лі [1] та його наступниками, наприклад, [2,3]. Артур Тресс довів теорему про існування та скінченність функціонального базису диференціальних інваріантів.

Але конкретні задачі систематичного опису диференціальних інваріантів практично не розглядалися до 1980-х років – для практичних задач, наприклад, в механіці, було цілком достатньо описати такі інваріанти для трьох незалежних змінних та однієї чи двох функцій, що досить очевидно.

Існує два способи систематичного опису диференціальних інваріантів - шляхом опису функціонального базису диференціальних інваріантів якогось конкретного порядку, тобто такого набору функцій від всіх відповідних змінних та похідних такого та менших порядків, що кожен диференціальний інваріант певного порядку можна записати як вираз від якихось функцій з цього набору, і цей набір є мінімальним; або через опис фундаментального базису диференціальних інваріантів – тобто набору функцій від всіх відповідних змінних та, можливо, також похідних, що кожен диференціальний інваріант будь-якого порядку можна записати як вираз від результатів дії продовжень оператора інваріантного диференціювання.

Під час навчання в аспірантурі та підготовки кандидатської дисертації я зробила загальний опис функціональних базисів скалярних диференціальних інваріантів другого порядку для довільної кількості незалежних та залежних змінних. Незважаючи на просте формулювання цієї задачі, вони виявились досить складною. Цікаво, що дуже багато спеціалістів вважали цю задачу давно розв'язаною, але рецензент нашої статті не зміг знайти відповідних посилань, і стаття була опублікована [4].

Ми будемо розглядати класифікацію диференціальних інваріантів для алгебр Лі Q , які містять інфінітезимальні оператори першого порядку вигляду $Q_i = \xi_i^s(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta_i^r(x, u)\partial_{u^r}$. Тут $x = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$. Ми будемо припускати підсумовування за індексами, що повторюються. Підкреслимо, що кількості незалежних змінних $n+1$ та залежних скалярних змінних m ут довільні. Ми говоримо про набір скалярних функцій який не є вектором.

Будь-який математично коректний опис нескінченної множини об'єктів потребує класифікації досліджуваних об'єктів з точністю до деякої еквівалентності. Для задачі систематичного опису диференціальних інваріантів дуже важливим є поняття еквівалентності. Вибір відповідного означення еквівалентності для конкретної класифікаційної задачі завжди є суб'єктивним і має відповідати цілям класифікації.

Ми хочемо описати всі можливі диференціальні інваріанти певного порядку найбільш економним способом.

Означення. Функція F від x, u та від частинних похідних u порядку до l , і при цьому

F може бути набором функцій (F_1, \dots, F_N) , називається *відносним диференціальним інваріантом* для алгебри $Q = \{Q_i\}$, якщо вона є інваріантом l -го продовження по Лі цієї алгебри:

$$Q_s^l F(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_s(x, u, u_1, \dots, u) F, \quad (1)$$

де λ_s - деякі функції; якщо $\lambda_i = 0$, F називається абсолютним диференціальним інваріантом (АДІ) алгебри Q ; якщо $\lambda_i \neq 0$ - це відносний інваріант.

Максимальний набір функціонально незалежних інваріантів порядку $r \leq l$ алгебри Лі Q називається функціональним абсолютних диференціальних інваріантів порядку l для алгебри Q .

Оператором інваріантного диференціювання називається оператор, дія якого на абсолютний диференціальний інваріант дає також абсолютний диференціальний інваріант.

Відомі методи та принципи опису та побудови функціональних базисів абсолютних диференціальних інваріантів - кількість інваріантів у базисі дорівнює кількості всіх змінних для відповідного порядку диференціювання (залежних, незалежних та похідних) мінус загальний ранг відповідного продовження операторів алгебри Лі.

Абсолютні диференціальні інваріанти довільного порядку можуть бути одержані з інваріантів фундаментального базису за допомогою операторів інваріантного диференціювання.

Приклад: Алгебра Пуанкаре

Ми розглядаємо диференціальні інваріанти другого порядку для набору m скалярних функцій

$$u^r = u^r(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad n \geq 3.$$

Алгебра Пуанкаре $AP(1, n)$ визначається базисними операторами

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad (2)$$

де μ, ν приймають значення $0, 1, \dots, n$; ми маємо на увазі підсумовування за повторюваними індексами (якщо ці індекси - малі грецькі літери) наступним чином:

$$x_\nu x^\nu \equiv x_\nu x^\nu \equiv x^\nu x_\nu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1). \quad (3)$$

Ми розглядаємо позначення x_ν та x^ν як еквівалентні щодо підсумовування, для того, щоб не плутати позначення похідних та індекси, які є номерами функцій з набору.

Продовження диференціальних операторів відповідних порядків будуються за стандартним алгоритмом Лі, див. наприклад, [5].

Для списків диференціальних інваріантів ми будемо використовувати наступні позначення:

$$\begin{aligned} u_\mu &\equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, & u_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \\ S_k(u_{\mu\nu}) &\equiv u_{\mu_1 \mu_2} u_{\mu_2 \mu_3} \cdots u_{\mu_{k-1} \mu_k} u_{\mu_k \mu_1}, \\ S_{jk}(u_{\mu\nu}, v_{\mu\nu}) &\equiv u_{\mu_1 \mu_2} \cdots u_{\mu_{j-1} \mu_j} v_{\mu_j \mu_{j+1}} \cdots v_{\mu_k \mu_1}, \\ R_k(u_\mu, u_{\mu\nu}) &\equiv u_{\mu_1} u_{\mu_k} u_{\mu_1 \mu_2} u_{\mu_2 \mu_3} \cdots u_{\mu_{k-1} \mu_k} u_{\mu_k \mu_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут ми використовуємо підсумовування за повторюваними індексами від 0 до n , як зазначено вище.

Теорема 1. *Існує функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Пуанкаре $AP(l, n)$ для набору m скалярних функцій u^r , який складається з*

$$m(2n + 3) + (m - 1) \frac{n(n + 1)}{2}$$

інваріантів

$$u^r, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1), \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1).$$

Тут $k = 1, \dots, n + 1$; $j = 0, \dots, k$; $r = 1, \dots, m$.

Для доведення цієї та аналогічних теорем необхідно, перш за все, знайти кількість інваріантів в функціональному базисі. Таких функціональних базисів може бути нескінченна кількість, але кількість інваріантів для всіх таких функціональних базисів фіксована та дорівнює різниці між сумою кількостей залежних та незалежних змінних, та всіх похідних відповідних порядків, та рангом продовжених операторів базису алгебри. Зазначимо, що ранг продовженого базису алгебри Пуанкаре другого порядку буде більшим, ніж ранг основного базису тільки для залежних та незалежних змінних без похідних.

Також необхідно довести, що елементи обраного функціонального базису є функціонально незалежними.

Диференціальні інваріанти застосовуються для опису інваріантних диференціальних рівнянь, для класифікації рівнянь, а також для деяких методів знаходження точних розв'язків. Одне з основних прикладних застосувань диференціальних інваріантів – розпізнавання образів. Комп'ютери легше розпізнають фіксовані зображення, але є потреба також розпізнавати зображення незалежно від їхніх нахилів, зсувів, поворотів, розтягів.

Систематичний опис диференціальних інваріантів алгебр Евкліда та Пуанкаре був використаний нами для побудови функціональних базисів для різних розширень цих алгебр, зокрема, для алгебри Галілея та конформної алгебри.

Ми розглянули знаходження абсолютних диференціальних інваріантів – класифікація відносних диференціальних інваріантів є значно складнішим завданням. Я запропонувала один з методів для такої класифікації, який дає можливість звести задачу опису відносних диференціальних інваріантів певної алгебри до задачі побудови абсолютних інваріантів для розширеної реалізації тієї самої алгебри [6].

Подальші узагальнення поняття диференціальних інваріантів – це умовні диференціальні інваріанти [7]. Також побудову відносних диференціальних інваріантів можна розглядати як частковий випадок умовних диференціальних інваріантів.

За допомогою умовних диференціальних інваріантів можна описати всі рівняння, які можна редукувати за допомогою певного анзацу.

Безпосередній пошук елементів функціонального базису диференціальних інваріантів здійснювався через розв'язання відповідних визначальних диференціальних рівнянь. Також для пошуку диференціальних інваріантів може бути використаний метод рухомого репера, запропонований Елі Картаном.

Для побудови функціонального базису диференціальних інваріантів необхідно було знайти розв'язки нескінченної системи визначальних диференціальних рівнянь, ранг базису алгебри Пуанкаре з нескінченною кількістю операторів, та довести функціональну незалежність елементів базису для довільної кількості залежних та незалежних змінних, що виявилось досить складною задачею.

Подальші дослідження

Існує ще багато алгебр Лі, для яких досить складно описати абсолютні та умовні диференціальні інваріанти. Поки що немає коректного означення диференціальних інваріантів для дискретних аналогів алгебр Лі.

Подяки

Найперша подяка - Збройним силам України, завдяким яким я жива і можу працювати та брати участь в конференціях.

Будь ласка, пам'ятайте, що Росія – країна агресор, і ніякої “науки без політики” не існує. Підтримка російських науковців це завжди підтримка агресії Росії.

Ця робота була підтримана грантом Фонду Саймонса(SFI-PD-Ukraine-00014586, I.A.Y).

Література

- [1] Lie S., Über Differentialinvarianten, *Math. Ann.* **24** (1884), 52–89.
- [2] Tresse A., Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, *Acta Math.* **18** (1894), 1–88.
- [3] Vessiot E., Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles qui admettent des groupes continus de transformations, *Acta Math.* **28** (1904), 307–349.
- [4] Fushchych W.I. and Yegorchenko I.A., [Second-order differential invariants of the rotation group \$O\(n\)\$ and of its extensions: \$E\(n\)\$, \$P\(1, n\)\$, \$G\(1, n\)\$](#) , *Acta Appl. Math.* **28** (1992), 69–92.
- [5] Olver P., Application of Lie groups to differential equations, New York, Springer-Verlag, 1987.
- [6] Yehorchenko I., Extension of Realisations for Low-Dimensional Lie Algebras and Relative Differential Invariants, [arXiv:2212.05657](#).
- [7] Yehorchenko I., Differential invariants and construction of conditionally invariant equations, *Proceedings of Fourth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (9–15 July, 2001, Kyiv)*, Ed.: A.G. Nikitin, V.M. Boyko and R.O. Popovych, Kyiv, Institute of Mathematics, **43**, Part 1, (2002), 256–262; [arXiv:math-ph/0304029](#).