

Симетрійний аналіз нелінійних рівнянь математичної фізики: внесок української наукової школи та роль жінок-науковиць

Алла І. ВОРОБІЙОВА

Чорноморський національний університет імені Петра Могили, Миколаїв, Україна

E-mail: a.vorobyova@chmnu.edu.ua

Світлій пам'яті Вільгельма Ілліча Фуцича (18.12.1936 – 7.04.1997) з нагоди 90-річчя від дня народження. З вдячністю Вчителю.

Українська наукова школа симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, заснована Вільгельмом Іллічем Фуцичем, є однією з провідних у галузі математичної фізики. Вона поєднує класичну теорію груп Лі з сучасними методами дослідження нелінійних диференціальних рівнянь. У межах цієї школи розроблено методи вивчення симетрій, побудови точних розв'язків і класифікації рівнянь за їх інваріантними властивостями.

Особливістю школи є системний підхід до аналізу математичних моделей та орієнтація на їх практичне застосування у фізиці, механіці та інженерії. Ідеї В.І. Фуцича стали основою для розвитку нових напрямів, зокрема теорії умовних симетрій та сучасних методів аналізу диференціальних рівнянь математичної фізики. Сьогодні ця школа продовжує активно розвиватися, об'єднуючи кілька поколінь науковців і зберігаючи високий рівень української математичної науки у світі.

Від початку формування наукової школи В.І. Фуцичем було закладено не лише високі наукові стандарти, а й певні неписані принципи наукової етики та організації дослідницької роботи. Значний вплив на його науковий світогляд мав його вчитель – Остап Степанович Парасюк. Принципи Парасюка ґрунтувалися на безкомпромісній науковій чесності, глибокій строгості математичних доведень та вимогливості до обґрунтованості кожного результату. Водночас важливе місце посідали інтелектуальна самостійність дослідника, критичне мислення та відповідальність за отримані наукові висновки. Саме ці засади були сприйняті та розвинуті В.І. Фуцичем у межах власної наукової школи.

В.І. Фуцич вирізнявся винятковою працездатністю та вимогливістю до якості наукових результатів, формуючи команду дослідників із високим рівнем підготовки та внутрішньою мотивацією до науки. До складу школи, як правило, входили найкращі випускники провідних математичних факультетів, передусім Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Саме вони становили основу наукового колективу на ранніх етапах розвитку школи. Водночас, попри глибоку повагу до жінок і усвідомлення їхньої важливої ролі в суспільстві, а також маючи особистий приклад відданої та підтримуючої дружини – Ольги Іванівни, Вільгельм Ілліч на початковому етапі обмежено залучав жінок до аспірантури. Це пояснювалося, зокрема, винятковою складністю обраного наукового напрямку – математичної фізики, який вимагав надзвичайної концентрації, часу та інтелектуальних зусиль.

Окремо слід відзначити роль його дружини – Ольги Іванівни Фуцич, старшого наукового співробітника, кандидата технічних наук у галузі порошкової металургії та композиційних матеріалів. Її наукова діяльність і особиста підтримка були важливою складовою середовища, у якому формувалася і розвивалася школа, сприяючи створенню атмосфери відданості науці, відповідальності та взаємоповаги.

Водночас історичні свідчення вказують на те, що на початкових етапах формування школи участь жінок у аспірантурі була обмеженою. Таке бачення відображало характерні

для свого часу уявлення про організацію наукової праці. Разом із тим подальший розвиток школи продемонстрував істотне зростання ролі жінок-науковиць, які не лише інтегрувалися в цей науковий простір, але й стали його активними творцями.

У межах української наукової школи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, заснованої Вільгельмом Іллічем Фущичем, сформувалося потужне коло жінок-науковиць, чії дослідження зробили вагомий внесок у розвиток сучасної математичної фізики. Їхня наукова діяльність охоплює як фундаментальні аспекти теорії симетрій, так і прикладні задачі, пов'язані з аналізом нелінійних диференціальних рівнянь, що описують реальні фізичні процеси. Вони не лише продовжили традиції школи, але й суттєво розширили її методологічні та прикладні можливості.

Серед перших науковиць слід відзначити Ірину Анатоліївну Єгорченко – випускницю механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, яка ще зі студентських років почала відвідувати науковий семінар і працювати під керівництвом Вільгельма Ілліча Фущича. У той час до аспірантури вступила Марія Серова, а згодом до досліджень у цій галузі приєдналася Наталія Черніга. Також у цей період до аспірантури Інституту математики, яку очолював Юрій Олексійович Митропольський, вступила Маріанна Фущич (Ейлер), яка проводила дослідження на стику симетрійного аналізу та асимптотичних методів.

У 1983 році мені також пощастило долучитися до цієї славетної математичної школи. Це були роки її розквіту та активного становлення в умовах суспільних змін, що передували незалежності України. Саме в період 1978–1997 рр. В. І. Фущич, як член-кореспондент НАН України, очолював відділ прикладних досліджень Інституту математики НАН України, що стало важливим етапом розвитку школи.

На початку липня 1995 року відбулася Перша міжнародна конференція «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» (Symmetry-1995), яка зібрала понад 50 іноземних учасників. Матеріали конференції були опубліковані у шведсько-українському журналі *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* (засновники – В. І. Фущич та Українська наукова асоціація).

Ці події стали важливими кроками до міжнародного визнання школи. Жінки-науковиці відігравали помітну роль у цьому процесі, докладаючи значних зусиль, зокрема в організаційних аспектах проведення конференцій. Значний внесок у розвиток цього напрямку зробила Ірина Єгорченко: її володіння англійською мовою та участь у міжнародних грантових програмах сприяли підвищенню рівня конференцій і розширенню міжнародних зв'язків. Водночас вона активно провадила наукову діяльність.

Слід зауважити, що в той період значну частину часу займали технічні аспекти підготовки та оформлення наукових публікацій. Тому налагодження міжнародної співпраці та вихід на міжнародні наукові платформи мали особливо важливе значення для розвитку школи.

Саме в ці часи вийшла наша спільна робота з Іриною Єгорченко [1], у якій було досліджено симетрійні властивості хвильових рівнянь із додатковими умовами, що дозволило встановити існування нескінченновимірних алгебр симетрій для певних класів нелінійних рівнянь. У межах цього підходу було розвинуто теорію умовної інваріантності, згідно з якою диференціальне рівняння розглядається разом із додатковою умовою, що забезпечує його інваріантність відносно відповідного оператора, на прикладі рівняння Клейна–Гордона вигляду $\square u = F(x, u)$, де оператор д'Аламбера:

$$\square u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Важливим результатом є встановлення умовної інваріантності цього рівняння разом із додатковою умовою $x_\mu \frac{\partial u}{\partial x_\mu} + \alpha u = 0$, яка фактично задає інваріантність відносно оператора

дилатації $D = x_\mu \partial_\mu + \alpha u \partial_u$. Використання цієї додаткової умови дозволяє побудувати анзац $w_a = \frac{x_a}{x_0}$ який зводить початкове рівняння до редукованого рівняння відносно функції $\varphi(w_a)$. Отримано, що така редукція може приводити до нових класів точних розв'язків, а також до появи прихованих симетрій, які відсутні у вихідному рівнянні, але проявляються після редукції.

Показано, що застосування таких умов дозволяє будувати нові анзаці редукції та отримувати точні розв'язки, які не можуть бути знайдені в рамках класичного симетрійного аналізу. Зокрема, встановлено, що додаткові умови можуть приводити до появи прихованих симетрій, які не проявляються у вихідному рівнянні, але виникають після редукції. Це, у свою чергу, суттєво розширює можливості дослідження нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики.

Ідеї Q -умовних симетрій в ті часи набувають особливого значення це дозволяє будувати нові анзаці редукції та отримувати точні розв'язки, недоступні класичним методом Лі. Доведено, що такі підходи суттєво розширюють клас розв'язків і виявляють приховані симетрії. Отримані результати мають універсальний характер і застосовні до широкого класу задач математичної фізики. В роботі [2] досліджено умовну інваріантність нелінійних рівнянь нестационарної фільтрації та пов'язаних із ними рівнянь теплопровідності. Основну увагу приділено застосуванню Q -умовних симетрій для побудови нових точних розв'язків. Показано, що розглянуте рівняння

$$H(u)u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1}u_1 = F(u)$$

допускає умовну інваріантність за певних обмежень на функції $H(u)$ та $F(u)$. У межах дослідження побудовано оператори умовної симетрії та відповідні анзаці редукції, які дозволяють зводити початкові рівняння до звичайних диференціальних рівнянь. Встановлено, що отримані розв'язки не належать до класу лівських і не можуть бути знайдені стандартними методами. Доведено, що застосування умовних симетрій розширює клас точних розв'язків і дозволяє виявляти приховані симетрійні структури. Крім того, результати узагальнено на багатовимірні рівняння теплопровідності, що свідчить про універсальність запропонованого підходу. Отже, дана робота підтверджує високу ефективність методів умовної інваріантності у дослідженні нелінійних рівнянь математичної фізики.

В роботі [3] отримані результати принципово розширюють класичну парадигму симетрійного аналізу, доводячи, що введення додаткових умов дозволяє виявляти приховані та нескінченновимірні симетрійні структури, недоступні в межах стандартної теорії Лі. Це відкриває нові можливості для системного дослідження нелінійних хвильових рівнянь, забезпечує побудову принципово нових класів точних розв'язків та формує методологічну основу для аналізу складних моделей математичної фізики. Запропонований підхід має універсальний характер і може бути застосований до широкого спектра нелінійних систем, що визначає його значний теоретичний і прикладний потенціал.

У роботі [4] розглянуто одновимірну модель транспорту розчиненої речовини в пороеластичних матеріалах, яка подається у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{aligned} 2U_t &= kp_{xx}, \\ \rho U_{tt} + \rho_t U_t + \rho U_x U_{xx} &= \lambda U_{xx} - p_x, \\ \rho_t + \rho_x U_t &= k(\rho_f - \rho)_x, \\ (Q\rho)_t + (Q\rho)_x U_t &= k(1 - Q\rho)p_{xx}, \\ (CQ\rho)_t + (CQ\rho)_x U_t + 2CQU_{xx} &= kS(C\rho_x) + DC_{xx} \end{aligned} \quad (1)$$

де $U = U(t, x)$, $\rho = \rho(t, x)$, $p = p(t, x)$, $Q = Q(t, x)$, $C = C(t, x)$, а параметри задовольняють умови $k > 0$, $\lambda > 0$, $D > 0$, $\rho_f > 0$, $0 < S < 1$.

Встановлено, що дана система є нелінійною та неінтегрованою в загальному випадку, що обумовлює необхідність застосування сучасних методів симетрійного аналізу. Обґрунтовано використання теорії груп Лі для дослідження інваріантностей цієї системи та побудови точних розв'язків.

Застосування симетрійних підходів дозволило звести дану систему до спрощених форм та отримати нові класи точних розв'язків, які не можуть бути знайдені класичними методами. Доведено, що побудовані розв'язки описують процеси переносу речовини в пороеластичних середовищах та можуть бути використані для якісного аналізу фізичних процесів. Таким чином, встановлено, що методи симетрійного аналізу є ефективним інструментом дослідження складних нелінійних моделей математичної фізики та дозволяють суттєво розширити клас відомих точних розв'язків.

Однією з ключових представниць сучасного етапу розвитку школи симетрійного аналізу є Олена Ванеєва, яка зробила значний внесок у розвиток алгебраїчних методів групової класифікації диференціальних рівнянь. Її роботи спрямовані на систематизацію та узагальнення підходів до дослідження симетрій нелінійних рівнянь, зокрема рівнянь реакції–дифузії, що дозволило суттєво розширити клас задач, для яких можливе побудування точних аналітичних розв'язків. Важливу роль у розвитку методів групового аналізу відіграли також дослідження Марини Нестеренко, Наталії Іванової, які працюють над питаннями інваріантності, еквівалентностей та класифікації диференціальних рівнянь, формуючи сучасний підхід до системного аналізу симетрій. У цьому ж напрямі працюють Оксана Брагінець та Олена Магда, які досліджують інваріантні властивості нелінійних рівнянь і розвивають методи редукції, спрямовані на зниження складності багатовимірних задач.

Вагомий внесок у розвиток геометричних та алгебраїчних аспектів симетрійного аналізу зробили Олександра Вінніченко та Олександра Локазюк які досліджують структурні властивості нелінійних рівнянь та їх інваріантні характеристики, працюють над питаннями групового аналізу та застосування симетрій до конкретних класів диференціальних рівнянь.

Загалом результати, отримані жінками-науковицями української школи симетрійного аналізу, дозволили суттєво розширити клас досліджуваних диференціальних рівнянь, удосконалити методи їх редукції та побудови точних розв'язків, а також виявити нові, раніше невідомі властивості нелінійних систем. Їхні дослідження сприяли розвитку теорії умовних симетрій, відкриттю прихованих інваріантностей та формуванню сучасного підходу до аналізу складних математичних моделей. Таким чином, внесок жінок-науковиць у розвиток симетрійного аналізу є не лише вагомим, але й визначальним для сучасного етапу розвитку математичної фізики, а їх діяльність є важливою складовою наукової спадщини школи В.І. Фущича.

Подяки

Авторка висловлює щире подяку науковцям відділу математичної фізики Інституту математики Національної академії наук України за багаторічну наукову підтримку, плідні обговорення та цінні зауваження і пропозиції. Окрему вдячність висловлюється колега-співавторам Ірині Анатоліївні Єгорченко, Миколі Івановичу Серову, Роману Михайловичу Чернізі за спільну наукову роботу та професійну співпрацю.

Частина результатів, пов'язаних із пошуком точних розв'язків математичної моделі перенесення розчинених речовин у поропружних середовищах, отримано в межах наукового проекту, що фінансувався програмою British Academy / CARA / Leverhulme Researchers at Risk Programme (LTRSF/100025), School of Mathematical Sciences, University of Nottingham.

Література

- [1] Єгорченко І.А., Воробйова А.І., Умовна інваріантність та точні розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока, *Доповіді НАН України* (1992), no. 3, 19–22.
- [2] Fushchych W.I., Serov M.I., Vorob'eva A.I., [Conditional symmetry and exact solutions of equations of nonstationary filtration](#), *Proc. Acad. Sci. of Ukraine* (1992), no. 6, 20–24.
- [3] Єгорченко І.А., Воробйова А.І., [Умовні та приховані нескінченновимірні симетрії хвильових рівнянь](#), *Укр. мат. журн.* **74** (2022), no. 3, 335–341.
- [4] Cherniha R., Davydovych V., Vorobyova A., [New Lie Symmetries and Exact Solutions of a Mathematical Model Describing Solute Transport in Poroelastic Materials](#), *Math. Comput. Appl.* **29** (2024), no. 3, 43.