Точні розв'язки нелінійних дисперсійних еволюційних рівнянь: метод еквівалентності

Олена О. ВАНЄЄВА [1], *Олександр Ю. ЖАЛІЙ* [1], *Олена В. МАГДА* [2], *Оксана В. БРАГІНЕЦЬ* [3]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
E-mail: *vaneeva@imath.kiev.ua*, *zhaliy@imath.kiev.ua*

[2] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна*
E-mail: *olena.magda@yahoo.com*

[3] *Чорноморський національний університет імені Петра Могили, Миколаїв, Україна*
E-mail: *oksana.brahinets@gmail.com*

Багато модельних рівнянь для різноманітних хвильових процесів можуть бути зведені до таких дисперсійних еволюційних рівнянь, як класичне рівняння Кортевега–де Фріза, модифіковане рівняння Кортевега–де Фріза і рівняння Кавахари, а також їхніх узагальнень, які часто містять змінні коефіцієнти. Це пояснює великий інтерес дослідників до пошуку нових і застосуванню вже відомих методів побудови точних розв'язків таких узагальнених рівнянь зі змінними коефіцієнтами. При цьому більшість запропонованих методів призводять до еквівалентних форм вже відомих розв'язків. Це пояснюється тим, що еквівалентність моделей і відповідних розв'язків не досліджуються систематично. Цю помилку при пошуку розв'язків диференціальних рівнянь було ретельно досліджено у роботі [1].

Головним інструментом для дослідження трансформаційних властивостей в класах диференціальних рівнянь є групоїди еквівалентності. Початкові ідеї та теоретичне підґрунтя цього поняття було закладено у роботах [2–5], що дало змогу пізніше сформулювати строгу теорію групоїдів еквівалентності у роботі [6]. У роботах [1,7] показано, що застосування перетворень еквівалентності є ефективним інструментом для знаходження точних розв'язків, розв'язання задач групової класифікації, а також дослідження інтегровності [8] нелінійних рівнянь математичної фізики зі змінними коефіцієнтами. Продемонструємо це на декількох прикладах.

У роботі [9] об'єктом дослідження є клас узагальнених рівнянь модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза (мКдФ) з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної:

$$u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + p(t)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0, \tag{1}$$

де f, g, h, p, k, l – гладкі функції змінної t, причому $fg \neq 0$. Точні розв'язки рівнянь з такого класу нещодавно було побудовано в роботі [10], використовуючи такі методи, як прямий метод редукції Кларксона–Крускала та "анзац"-метод, що базується на сумісності з рівнянням Ріккаті. У роботі [9] для побудови точних розв'язків таких рівнянь було застосовано перетворення еквівалентності. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Клас (1) є нормалізованим у звичайному сенсі. Група еквівалентності $G^\sim$ цього класу складається з перетворень*

$$\tilde t = \alpha(t), \quad \tilde x = \beta x + \gamma(t), \quad \tilde u = \theta(t)u + \psi(t), \tag{2}$$

де α, γ, θ, ψ – гладкі функції змінної t, причому $\alpha_t\theta \neq 0$; β – ненульова стала. Перетворе-

ння довільних елементів класу (1) мають вигляд:

$$\tilde f = \frac{\beta}{\alpha_t\theta^2}f,\quad \tilde g = \frac{\beta^3}{\alpha_t}g,\quad \tilde h = \frac{1}{\alpha_t}\left(h-\frac{\theta_t}{\theta}\right),\quad \tilde p = \frac{1}{\alpha_t}\left(\beta p + \beta\frac{\psi^2}{\theta^2}f - \beta\frac{\psi}{\theta}k + \gamma_t\right),$$
$$\tilde k = \frac{\beta}{\alpha_t\theta}\left(k - 2\frac{\psi}{\theta}f\right),\quad \tilde l = \frac{1}{\alpha_t}\left(\theta l - \psi h - \psi_t + \psi\frac{\theta_t}{\theta}\right).$$

Знайдений групоїд еквівалентності дозволяє сформулювати критерій звідності рівнянь з класу (1) до класичного рівняння мКдФ

$$\tilde u_{\tilde t} + 6\tilde u^2\tilde u_{\tilde x} + \tilde u_{\tilde x\tilde x\tilde x} = 0. \tag{3}$$

Рівняння з класу (1) є подібним до класичного рівняння мКдФ (3) тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умовам:

$$h = \frac{1}{2}\frac{f_t}{f} - \frac{1}{2}\frac{g_t}{g},\quad l = \frac{k}{2f}\left(\frac{k_t}{k} - \frac{1}{2}\frac{f_t}{f} - \frac{1}{2}\frac{g_t}{g}\right). \tag{4}$$

Відповідне перетворення з групи $G^{\sim}$ має вигляд

$$\begin{aligned}&\tilde t = c_1^3\int g(t)\mathrm{d}t + c_0,\quad \tilde x = c_1\left(x + \int\left(\frac{k(t)^2}{4f(t)} - p(t)\right)\mathrm{d}t\right) + c_2,\\ &\tilde u = \sqrt{\frac{f(t)}{6c_1^2 g(t)}}\left(u + \frac{k(t)}{2f(t)}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Використовуючи формули перетворень (5) та відомі розв'язки рівняння мКдФ, методом еквівалентності можна побудувати точні розв'язки рівнянь з класу

$$u_t + fu^2u_x + gu_{xxx} + \frac{1}{2}\left(\frac{f_t}{f} - \frac{g_t}{g}\right)u + pu_x + k\,uu_x + \frac{k}{2f}\left(\frac{k_t}{k} - \frac{1}{2}\frac{f_t}{f} - \frac{1}{2}\frac{g_t}{g}\right) = 0, \tag{6}$$

де f, h, k, p – довільні гладкі функції змінної t, $f\neq 0$.

Наприклад, розв'язок рівняння (6), отриманий з односолітонного розв'язку рівняння мКдФ має вигляд

$$u = \sqrt{\frac{6c_1 g(t)}{f(t)}}\left(a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2+k_0^2}\cosh z + 2a}\right) - \frac{k}{2f},$$

Тут $z = k_0\left(c_1\left(x + \int\left(\frac{k^2(t)}{4f(t)} - p(t)\right)\mathrm{d}t\right) + c_2\right) - k_0(6a^2+k_0^2)(c_1^3\int g(t)\mathrm{d}t + c_0) + b$, де k_0, a, b – довільні сталі. Аналогічно будуються двосолітонний та раціональні розв'язки рівняння (6).

У роботі [11] було побудовано точні розв'язки для рівнянь з класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза (КдФ):

$$u_t - 3Mg(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + 2q(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x = 0, \tag{7}$$

де g, p, q – довільні гладкі функції змінної t з умовою $g\neq 0$, а M — ненульова стала.

Дослідження допустимих перетворень в класі (7) прямим методом дозволяє сформулювати таку теорему (див. [9,12]).

Теорема 2. *Клас (7) є нормалізованим в узагальненому розширеному сенсі. Його група еквівалентності складається з перетворень*

$$\tilde t = \alpha(t),\quad \tilde x = \beta(t)x + \gamma(t),\quad \tilde u = \frac{1}{\beta^2(t)}\left(\delta_1 u + \delta_2 e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t}\right),$$

де α, β, γ – гладкі функції змінної t, δ_1, δ_2 – дійсні сталі; причому $\alpha_t\beta\delta_1 \neq 0$. Перетворення довільних елементів класу (7) мають вигляд:

$$\tilde{M} = \frac{M}{\delta_1}, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{q} = \frac{1}{\alpha_t}\left(q + \frac{\beta_t}{\beta}\right),$$
$$\tilde{p} = \frac{1}{\alpha_t}\left(\beta p - \gamma q + \gamma_t - \gamma\frac{\beta_t}{\beta} + 3M\frac{\delta_2}{\delta_1}\beta g e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t}\right).$$

Група еквівалентності класу (7) є узагальненою, оскільки перетворення змінної u залежить від довільного елемента q, та розширеною, оскільки ця залежність не є локальною [6].

Поклавши в теоремі 2 значення нових довільних елементів $\tilde{M} = 2$, $\tilde{g} = 1$, $\tilde{q} = \tilde{p} = 0$, можна показати, що будь-яке рівняння з класу (7) зводиться до класичного рівняння КдФ

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \tag{8}$$

за допомогою відповідного точкового перетворення з групи еквівалентності (див. також [1, приклад 4]). Таке перетворення, параметризоване довільними елементами класу, має вигляд:

$$\tilde{t} = \varepsilon_1^3 \int g(t) e^{-3\int q(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \varepsilon_0, \tag{9}$$

$$\tilde{x} = \varepsilon_1 e^{-\int q(t)\mathrm{d}t} x + \int e^{-\int q(t)\mathrm{d}t}\Big(\varepsilon_2 g(t) e^{-2\int q(t)\mathrm{d}t} - \varepsilon_1 p(t)\Big)\mathrm{d}t + \varepsilon_3, \tag{10}$$
$$\tilde{u} = \frac{M}{2\varepsilon_1^2} e^{2\int q(t)\mathrm{d}t} u - \frac{\varepsilon_2}{6\varepsilon_1^3},$$

де ε_j, $j = 0, 1, 2, 3$, – довільні сталі з умовою $\varepsilon_1 \neq 0$. Тоді формула для побудови розв'язків рівнянь (7) з використанням відомих розв'язків рівняння (8) має вигляд

$$u = \frac{2\varepsilon_1^2}{M} e^{-2\int q(t)dt}\left[\tilde{u}\left(\tilde{t}, \tilde{x}\right) + \frac{\varepsilon_2}{6\varepsilon_1^3}\right], \tag{11}$$

де $\tilde{u}$ – точний розв'язок рівняння (8), а змінні $\tilde{t}$ і $\tilde{x}$ повинні бути замінені на вирази (9) і (10), відповідно. За допомогою формули (11) можна побудувати низку точних розв'язків різних типів для рівнянь з класу (7), використовуючи відомі розв'язки рівняння КдФ (8). Приклад побудови двосолітонного розв'язку рівняння (7) наведено в роботі [9].

Ще однією моделлю хвильових процесів є нелінійне дисперсійне еволюційне рівняння типу Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часової змінної:

$$u_t + \alpha(t) f(u) u_x + \beta(t) u_{xxx} + \sigma(t) u_{xxxxx} = 0, \quad f_u \alpha\beta\sigma \neq 0, \tag{12}$$

де n — довільне ненульове ціле число, α, β та σ — гладкі ненульові функції змінної t, та їхнім різноманітним підкласам.

Наведемо основні результати щодо допустимих перетворень рівнянь з класу (12), отримані у роботі [13]. Це клас не є нормалізованим, але його можна розбити на нормалізовані підкласи, виокремлені умовами $f_{uu} \neq 0$ і $f_{uu} = 0$.

Теорема 3. *Підклас класу (12), виокремлений умовою $f_{uu} \neq 0$, нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ складають перетворення*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1(x + \delta_2 A) + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u + \delta_5,$$
$$\tilde{f} = \delta_0\left(f + \delta_2\right), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\delta_1}{\delta_0 T_t}\alpha, \quad \tilde{A} = \frac{\delta_1}{\delta_0} A + \varepsilon_0, \quad \tilde{\beta} = \frac{{\delta_1}^3}{T_t}\beta, \quad \tilde{\sigma} = \frac{{\delta_1}^5}{T_t}\sigma,$$

де ε_0 і δ_j, $j = 0, 1, \ldots, 5$, — такі дійсні сталі, що $\delta_0\delta_1\delta_4 \neq 0$, а $T(t)$ — довільна гладка нестала функція, $T_t \neq 0$. Додатковий довільний елемент A задовольняє рівняння $A_t = \alpha$.

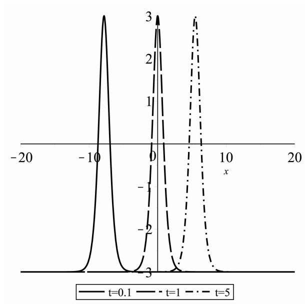

Рис. 1. Розв'язок (15): $\alpha = 1/t$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = 0$.

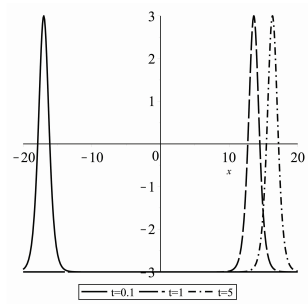

Рис. 2. Розв'язок (15): $\alpha = 1/t^2$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = -17$.

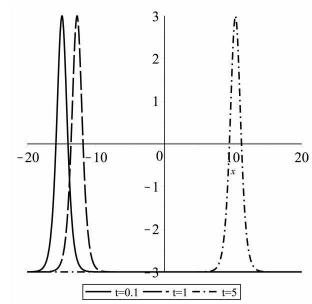

Рис. 3. Розв'язок (15): $\alpha = \sqrt{t}$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = 15$.

Теорема 4. *Клас рівнянь Кавахари*

$$u_t + \alpha(t)(u+b)u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$$

нормалізований у розширеному узагальненому сенсі, Його групу еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ *складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \frac{\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 A + \varepsilon_0}{\delta_2 A + \delta_1}, \quad \tilde{u} = \frac{\varepsilon_2}{\Delta}\left((\delta_2 A + \delta_1)u - \delta_2 x + \delta_2 bA + \varepsilon_3\right),$$
$$\tilde{A} = \frac{\delta_2' A + \delta_1'}{\delta_2 A + \delta_1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\Delta}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^2}\alpha, \quad \tilde{\beta} = \frac{{\varepsilon_2}^3}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^3}\beta,$$
$$\tilde{\sigma} = \frac{{\varepsilon_2}^5}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^5}\sigma, \quad \tilde{b} = \frac{1}{\Delta}\left(b\delta_1\varepsilon_2 + \delta_1\varepsilon_1 - \delta_2\varepsilon_0 - \varepsilon_3\varepsilon_2\right),$$

де δ_j, δ_j' $j = 1, 2$, *і* ε_i, $i = 0, 1, 2, 3$, *— довільні сталі, визначені з точністю до сталого множника, причому* $\Delta = \delta_2'\delta_1 - \delta_1'\delta_2 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$. *Додатковий довільний елемент* A *задовольняє умову* $A_t = \alpha$.

Теорема 5. *Рівняння вигляду* (12) *зі змінними коефіцієнтами можна звести точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього самого класу тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти* α, β, σ *задовольняють умови*

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)_t = 0, \quad \text{якщо} \quad f_{uu} \neq 0,$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\sigma\alpha^2}{\beta^3}\right)_t = 0, \quad \text{якщо} \quad f_{uu} = 0.$$

Класифікацію ліївських редукцій для класу рівнянь (12) виконано у роботі [14], але для знаходження точних розв'язків таких рівнянь більш ефективним є метод еквівалентності. У [7, §4.1] вказано явний вигляд перетворень, що зводять рівняння з класу (12) з $f = u^n$ зі змінними коефіцієнтами, а саме рівнянь

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta\alpha(t)u_{xxx} + \sigma\alpha(t)u_{xxxxx} = 0, \tag{13}$$
$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta\alpha(t)(\delta_1 \textstyle\int \alpha(t)\mathrm{d}t + \delta_2)u_{xxx} + \sigma\alpha(t)(\delta_1 \textstyle\int \alpha(t)\mathrm{d}t + \delta_2)^3 u_{xxxxx} = 0, \tag{14}$$

де $\alpha(t)$ – довільна гладка функція, δ_1, δ_2 β, σ – довільні сталі, $\beta\sigma(\delta_1^2 + \delta_2^2) \neq 0$, до подібних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Побудовано декілька сімей точних розв'язків для таких рівнянь. Наприклад, розв'язок рівняння (13) для $n = 2$ має вигляд

$$u = \frac{40k^2\sigma - \beta}{\sqrt{-10\sigma}} + 6k^2\sqrt{-10\sigma}\tanh^2\left(kx + \frac{k}{10\sigma}(240k^4\sigma^2 + \beta^2)\textstyle\int\alpha(t)\mathrm{d}t + \chi\right), \tag{15}$$

де k, χ – довільні сталі з $k \neq 0$. Поведінку розв'язку (15) для різних значеннях функції $\alpha(t)$ та сталих параметрів σ, β, k, χ показано на рис. 1–3. Приклад побудови точного розв'язку рівняння (14) методом еквівалентності також наведено у роботі [7].

У цій доповіді ми продемонстрували ефективність застосування перетворень еквівалентності лише для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, однак такі перетворення є наріжним каменем в усіх класифікаційних задачах групового аналізу, а також можуть бути застосовані для дослідження інтегровності.

Подяки

Автори вдячні професору Роману О. Поповичу за обговорення результатів та цінні поради. Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, О.О.В. та О.Ю.Ж.).

Література

[1] Popovych R.O., Vaneeva O.O., More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **15** (2010), 3887–3899.

[2] Kingston J.G., Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, no. 6, (1998), 1597–1619.

[3] Popovych R.O., Classification of admissible transformations of differential equations, *Collection of Works of Institute of Mathematics (Kyiv, Ukraine)* **3**, no. 2, (2006), 239–254.

[4] Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359.

[5] Popovych R.O., Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp.

[6] Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.

[7] Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 045201, 19 pp.

[8] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), 038003.

[9] Ванеєва О.О., Брагінець О.В., Жалій О.Ю., Магда О.В., Точні розв'язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами, *Доповіді НАН України*, № 6, (2023), 3–11.

[10] El-Shiekha R.M., Gaballah M., New analytical solitary and periodic wave solutions for generalized variable-coefficients modified KdV equation with external-force term presenting atmospheric blocking in oceans, *J. Ocean Eng. Sci.* **7** (2022), 372–376.

[11] Hong B., Lu D., New Jacobi elliptic function-like solutions for the general KdV equation with variable coefficients, *Math. Comput. Model.* **55** (2012), 1594–1600.

[12] Vaneeva O., Brahinets O., Magda O., Zhalij A., Equivalence groupoid and exact solutions of a class of generalized modified Korteweg–de Vries equations, 275–282, Springer Proc. Math. Stat. **473**, Springer, Singapore, 2025.

[13] Vaneeva O., Magda O., Zhalij A., Equivalence groupoid and enhanced group classification of a class of generalized Kawahara equations, 329–340, Springer Proc. Math. Stat. **335**, Springer, Singapore, 2020.

[14] Vaneeva O., Magda O., Zhalij A., Lie reductions and exact solutions of generalized Kawahara equations, 333–338, Springer Proc. Math. Stat. **396**, Springer, Singapore, 2023.