

Симетрійні властивості нелінійного еволюційного рівняння 4-го порядку

Лариса О. ТУЛУПОВА

Полтава, Україна

E-mail: Lar2dar@gmail.com

Розглянемо нелінійне еволюційне рівняння 4-го порядку такого вигляду

$$\Delta(f_1(u) \Delta u + f_2(u)) = f_3(u) u_t, \quad (1)$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}$, $x = (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$, Δ – оператор Лапласа; $f_i(u) (i = \overline{1,3})$ – довільні диференційовні функції, причому $f_3(u) \neq 0$.

Проведемо класифікацію симетрійних властивостей рівняння (1) в залежності від вигляду функцій $f_i(u)$.

Треба відзначити, що ліівська симетрія рівняння (1) у випадку, коли $f_1(u) \equiv 0$ досліджена у [1], [2], [3]. Умовна симетрія одновимірного рівняння (1), коли $f_1(u) \equiv 0$, досліджена у [4], а двовимірного – у [5].

Якщо $f_1(u) \neq 0$, то за класичним алгоритмом Лі знаходимо, що функції $f_i(u) (i = \overline{1,3})$ і координати інфінітезимального оператора (див. [6]) визначаються такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \xi_2^2 = \dots = \xi_n^n, & \xi_b^a &= -\xi_a^b, & \xi_a^0 &= \xi_u^a = 0, \\ \eta_{uu} &= 0, & \eta_{abu} &= 0 \quad (a \neq b), & 2\eta_{au} &= \Delta \xi^a, \\ \dot{f}_1 \eta_a &= 2f_1 \xi_{11}^a, & f_3 \eta_0 &+ \dot{f}_2 \Delta \eta + f_1 \Delta^2 \eta &= 0, \\ \left(\frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{f}_3}{f_3} \right) \eta &= 4\xi_1^1 - \xi_0^0, & \left(\frac{\dot{f}_1}{f_1} \eta \right)_u &= 0, \\ \ddot{f}_2 \eta &+ 2\dot{f}_1 \Delta \eta + 2f_1 \Delta \eta_u + 4f_1 \eta_{11u} + \dot{f}_2 \left(2\xi_1^1 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} \eta \right) &= 0, \\ \left(\frac{\ddot{f}_1}{\dot{f}_1} - \frac{\dot{f}_1}{f_1} \right) \eta &+ 2\eta_u = 0, \\ -\frac{1}{2} f_3 \xi_0^a &+ \left(\dot{f}_2 \eta_a + f_1 \Delta \eta_a \right)_u + f_1 \Delta \eta_{au} &= 0, \\ \left(\ddot{f}_2 \eta + \dot{f}_1 \Delta \eta \right)_u &+ \dot{f}_1 (\Delta \eta_u + 4\eta_{11u} - 2\Delta \xi_1^1) + \dot{f}_2 \left(2\xi_1^1 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} \eta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

З системи (2) випливає, що існує чотири можливі випадки вигляду функції $f_1(u)$ і функції η :

1.

$$f_1(u) = \lambda_1, \quad \eta = \alpha(x)u + \beta(x);$$

2.

$$f_1(u) = \lambda_1 u^k, \quad \eta = \alpha(x)u;$$

3.

$$f_1(u) = \lambda_1 e^{ku}, \quad \eta = \beta(x);$$

4.

$$f_1(u) = \varphi(u), \quad \eta = 0,$$

де λ_1 – довільна стала ($\lambda_1 \neq 0$); $\varphi(u)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – довільні диференційовні функції.

Крім того, з рівнянь системи (2) випливає, що алгебри інваріантності рівняння (1) для деяких функцій $f_1(u)$ будуть розрізнятися в залежності від розмірності n простору, в якому це рівняння розглядається.

Після розв'язання системи (2) були визначені функції $f_i(u)$ і алгебри інваріантності відповідних рівнянь. Усі нееквівалентні випадки зведені до таблиць 1–3. В цих таблицях через AE позначена алгебра Евкліда $\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a \rangle$.

Табл. 1. Випадок $f_1(u) = \lambda_1$, n – довільне

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Алгебра інваріантності
1	0	λ_3	$AE, \partial_u, I = u\partial_u, D_1 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a}$
2	$\lambda_2 u$	λ_3	AE, ∂_u, I
3	$\lambda_2 e^u$	λ_3	$AE, D_2 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a} - 2\partial_u$
4	$\lambda_2 u^m$	$\lambda_3 u^s$	$AE, D_3 = (2m - s - 2)x_0\partial_{x_0} + \frac{m-1}{2}x_a\partial_{x_a} - u\partial_u$
5	$\lambda_2 \ln u$	$\lambda_3 u^s$	$AE, D_4 = (s + 2)x_0\partial_{x_0} + \frac{1}{2}x_a\partial_{x_a} + u\partial_u$
6	0	$\lambda_3 e^{su}$	$AE, D_1, D_5 = sx_0\partial_{x_0} + \partial_u$
7	$\lambda_2 u$	$\lambda_3 e^{su}$	AE, D_5
8	$\lambda_2 e^u$	$\lambda_3 e^{su}$	$AE, D_6 = 2(2 - s)x_0\partial_{x_0} + \frac{1}{2}x_a\partial_{x_a} - \partial_u$

Табл. 2. Випадок $f_1(u) = \lambda_1 e^{ku}$

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Умови	Алгебра інваріантності
1	0	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE, D_1, D_{10} = (s - k)x_0\partial_{x_0} + \partial_u$
2	0	$\lambda_3 e^{-ku}$	$n = 2$	$AE, D_1, D_{10},$ $K_a = \mathbf{x}^2\partial_{x_a} - 2x_a x_b \partial_{x_b} - \frac{4}{k}x_a \partial_u$
3	$\lambda_2 u$	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE, D_{11} = 2(s + k)x_0\partial_{x_0} + kx_a\partial_{x_a} + \partial_u$
4	$\lambda_2 e^{mu}$	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE, D_{12} = 2(k + s - 2m)x_0\partial_{x_0} +$ $+(k - m)x_a\partial_{x_a} + 2\partial_u$

Табл. 3. Загальний випадок $f_1(u)$

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Алгебра інваріантності
1	0	довільна	AE, D_1
2	довільна	довільна	AE

Таким чином, рівняння (1) має найбільш широкую симетрію, коли воно набуває вигляду

$$u^{\frac{4}{2-n}} \Delta \left(u^{\frac{4}{2-n}} \Delta u \right) = u_t, \quad n \neq 2, \quad (3)$$

та вигляду

$$e^{ku} \Delta \left(e^{ku} \Delta u \right) = u_t, \quad n = 2. \quad (4)$$

Алгебра інваріантності $AC(n)$ рівняння (3) породжується операторами

$$\begin{aligned} \partial_{x_0}, \quad \partial_{x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a}, \quad D_1 = 4x_0 \partial_{x_0} + x_a \partial_{x_a}, \\ D_2 = 2x_a \partial_{x_a} + (2-n)u \partial_u, \quad K_a = \mathbf{x}^2 \partial_{x_a} - 2x_a x_b \partial_{x_b} + (n-2)x_a u \partial_u; \end{aligned}$$

а алгебра інваріантності $AC(n)$ рівняння (4) – операторами

$$\begin{aligned} \partial_{x_0}, \quad \partial_{x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a}, \quad D_1 = 4x_0 \partial_{x_0} + x_a \partial_{x_a}, \\ D_2 = 2kx_0 \partial_{x_0} - n \partial_u, \quad K_a = \mathbf{x}^2 \partial_{x_a} - 2x_a x_b \partial_{x_b} - \frac{4}{k} x_a \partial_u. \end{aligned}$$

Подяки

Подяка професору, доктору фіз.-мат. наук Серову Миколі Івановичу за наукове керівництво, корисні вчені та життєві поради, а також підтримку протягом багатьох років.

Література

- [1] Дородницын В.А., Князева И.В., Свищевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения – 1983.– **19**, N 7.– С. 1215–1224.
- [2] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. и Самаркин А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: проявления максимума, локализация, симметрия, точные решения, асимптоты, структуры // Журн. советск. математики – 1988.– **41**, С. 1222–1292.
- [3] Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики– Киев, Наукова думка, 1989. – 339 с.
- [4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений– М.: Наука, 1978.
- [5] Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation // Doporvidi Ukr. Akademii Nauk– 1993.– No. 4.– P. 37–40.
- [6] Серов М.І., Тулупова Л.О., Андреева Н.В. Q-умовна симетрія нелінійного двовимірного рівняння теплопроводності // Укр. мат. журн.– 2000.– № 6.– С. 846–849.