Симетрійні властивості нелінійних систем параболічного типу

Інна РАССОХА

Національний університет "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка", Полтава, Україна

E-mail: *innaolha@gmail.com*

Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Так знання груп симетрії даного рівняння дозволяє відшукати точні розв'язки, генерувати нові розв'язки з відомих. Відшукання групи перетворень еквівалентності даного рівняння дає можливіть записати його у найбільш простій для дослідження формі.

Оскільки теоретико-групові методи дають можливість інтегрування диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації диференціальних рівнянь, яка дозволяє із заданого класу рівнянь виділити ті, які володіють широкими симетрійними властивостями [1].

Ще однією з найбільш важливих задач є задача виділення з заданого класу рівнянь таких, які допускають в якості групи інваріантності деяку відому групу. Така задача була розв'язана для рівняння [2], після чого вона була поставлена по відношенню до нелінійних систем рівнянь параболічного типу.

Оскільки більшість основних фізичних процесів задовольняють принцип відносності Галілея чи Пуанкаре–Ейнштейна, то і рівняння, які їх описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень може слугувати критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим актуальною є задача: по заданій групі перетворень побудувати математичну модель (систему рівнянь), яка володіє зазначеною симетрією. Нами поставлено і розв'язано таку задачу по відношенню до системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U), \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11}(U) & f^{12}(U) \\ f^{21}(U) & f^{22}(U) \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^{11}(U) & g^{12}(U) \\ g^{21}(U) & g^{22}(U) \end{pmatrix}$, $H(U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$ – довільні гладкі функції, $U_0 = \frac{\partial U}{\partial x_0}$, $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. x_0 – часова, x_1 – просторова змінні, яка є узагальненнням скалярного рівняння реакції–конвекції–дифузії.

В класі систем (1) містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури та густини у термоядерній плазмі, інші фізичні та біохімічні процеси.

Дослідженню симетрійних властивостей такого класу систем приділяло увагу багато авторів. При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ та $G = 0$ одержали вагомі результати В.І. Фущич та Р.М. Черніга, А.Г. Нікітін та Р. Вилтшир, Р.М. Черніга та Дж. Кінг.

Оскільки система (1) описує, зокрема, і галілеївськи інваріантні процеси, то нами поставлена та розв'язана задача побудови найбільш загального її вигляду, що допускає інваріантність відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

Цю задачу нами також розв'язано з точністю до перетворень еквівалентності.

Нами встановлено, що максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності системи (1) є група наступних перетворень

$$x_0^{'} = a_0 x_0 + b_0, \quad x_1^{'} = a_1 x_1 + c x_0 + b_1, \quad {u'}^a = k_{ab} u^b + m_a, \tag{2}$$

де $a_\mu, b_\mu, c, k_{ab}, m_a$ – довільні сталі, $\mu \in \{0,1\}$, $a, b \in \{1,2\}$. Це дало можливість в подальшому максимально спростити одержані нелінійності.

Також нами знайдено єдиноможливу реалізацію узагальненої алгебри Галілея для системи (1), базисні елементи якої мають вигляд

$$\begin{gathered} AG_2 = \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, Q_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + x_1Q_2 + \tfrac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4\rangle, \end{gathered} \tag{3}$$

причому оператори Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 задовольняють комутаційні співвідношення

$$[Q_1, Q_3] = 0, [Q_2, Q_3] = -Q_2, [Q_1, Q_2] = 0, [Q_1, Q_4] = 0, [Q_2, Q_4] = 0, [Q_3, Q_4] = 2Q_4. \tag{4}$$

Серед результатів дослідження варто виділити наступне твердження.

Теорема 1. *Система рівнянь (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності (2) має один з наступних виглядів*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1\right] + \begin{pmatrix} -u^2 & m_{12} \\ 0 & -u^2 \end{pmatrix} U_1 + \tfrac{1}{2}(u^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1},\ Q_2 = \partial_{u^2}, Q_3 = (\lambda_{11} + m_{12})\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2},\ Q_4 = 0$*;*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\frac{u^1}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1\right] + \begin{pmatrix} m_{11}u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & 0 \end{pmatrix} U_1 + (u^1)^2 \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = u^1\partial_{u^1} + \frac{1}{2}u^2\partial_{u^2},\ Q_4 = 0$*;*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1\right] + \begin{pmatrix} -u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & -(2\lambda_{22}+1)u^1 \end{pmatrix} U_1 + (u^1)^2u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{22} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^1},\ Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + (\lambda_{22} + m_{21})u^2\partial_{u^2},\ Q_4 = 0$*;*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m_1} \end{pmatrix} U_1\right] + \omega^2 \begin{pmatrix} -m_1m_{11} & m_{11}\frac{u^1}{u^2} \\ -m_1m_{12}\frac{u^2}{u^1} & m_{12} \end{pmatrix} U_1 + \omega^4 \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}(I + m_1u^2\partial_{u^2}),\ Q_4 = 0,\ \omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}},\ m_1 \neq 0$*;*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1\right] + \tfrac{u^2}{u^1} \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

причому $Q_1 = I, Q_2 = 0, Q_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) I - 2u^2\partial_{u^2},\ Q_4 = \frac{1}{n_1 - n_2}u^1\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} U_0 = \partial_1 &\left[-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1\right] + \\ &+ e^{-2\omega}\begin{pmatrix} m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2} & -(\frac{u^1}{u^2}+1)(m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2}) \\ m_{21} & -(\frac{u^1}{u^2}+1)m_{21} \end{pmatrix} U_1 + \\ &+ e^{-4\omega}\begin{pmatrix} n_1u^2 + n_2u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10}$$

причому $Q_1 = I + u^2\partial_{u^1}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}I,\ Q_4 = 0,\ \omega = \frac{u^1}{u^2} - \ln u^2$*;*

$$U_0 = \partial_1 \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ + e^{\frac{1}{k_2}\omega} \begin{pmatrix} 2k_1 \overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_1 \overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \\ 2k_2 \overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_2 \overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} + \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \end{pmatrix} U_1 + \\ + e^{\frac{2}{k_2}\omega} \begin{pmatrix} \overrightarrow{n}\overrightarrow{u} \\ -\overrightarrow{n}\overrightarrow{u}^{\perp} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

причому $Q_1 = k_1 I - k_2 J$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = -\frac{1}{2}I$, $Q_4 = 0$, $\omega = k_2 \ln \overrightarrow{u}^2 + 2k_1 \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$, $|\overrightarrow{k}| = 1$.

Зауваження. Система (6) є узагальненням рівнянь системи хемотаксису, яка описує формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії. Її симетрійні властивості вивчені в роботі [3].

Якщо у системі (11) перейти до функції комплексної змінної, то одержимо узагальнення рівняння Гінзбурга–Ландау, яке є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаоса і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічний кінетиці

$$\psi_0 = -\frac{k}{2}\psi_{11} + \left[\frac{m^*}{2}(2k_1 k \psi^* \psi_1 - (|\overrightarrow{\psi}|^2)_1) + n^* |\overrightarrow{\psi}|^4 e^{2w} \right] e^{2w} \psi, \qquad (12)$$

де $\psi = u^1 + iu^2$, $k, m, n \in C$. Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга–Ландау без деривативного члена вивчались Нікітіним А.Г. в роботах [4], [5].

При $k_1 = 0$ з рівняння (12) можна одержати узагальнення рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю

$$i\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_{11} + [\alpha(|\psi|^2)_1 + \beta|\psi|^4]\psi, \qquad (13)$$

де $\alpha, \beta \in C$.

Рівняння (13) належить до класу рівнянь

$$i\psi_0 = -\tfrac{1}{2}\psi_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2|\psi|^2 + \lambda_3|\psi|^4 + \lambda_4 \partial_1 |\psi|^2)\psi + (\lambda_5 + \lambda_6 |\psi|^2)\partial_1 \psi, \qquad (14)$$

яке використовується для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики, таких як нелінійна оптика. Зокрема, альвеновські хвилі з круговою поляризацією — магнітогідродінамічні хвилі, що розповсюджуються в плазмі в магнітнгому полі, хвилі Стокса у рідині скінченої глибини та ін.

Системи (6) та (7) узагальнюють результати, одержані для системи рівнянь хемотаксису [3] та нелінійної системи рівнянь конвекції–дифузії [6] відповідно. Системи (8), (9) є узагальненням результатів Черніги Р.М.та Кінга Дж. [7], [8], [9], а системи (10), (11) — Нікітіна А.Г. [4], [5], [10], [11], що були одержані у роботах по дослідження інваріантності системи реакції-дифузії. Поряд з цим встановлено систему (5), яка не може бути одержана із узагальнення раніше відомих систем, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Одержані системи володіють симетрійними властивостями, характерними для рівнянь, що описують процеси, які підпорядковуються принципу відносності Галілея. Серед них містяться такі відомі рівняння, як рівняння Шредінгера, система хемотаксису, рівняння Гінзбурга-Ландау та інші. Виходячи з вище сказаного одержані системи можуть претендувати на роль математичних моделей реальних фізичних процесів. Таким чином, в класі нелінійних систем реакції-конвекції-дифузії нами виділено ті, які володіють симетрійними властивостями, характерними для рівнянь, що описують процеси, підпорядковані принципу відносності Галілея. Тому одержані системи можуть бути використані при моделюванні реальних фізичних процесів.

Подяки

Хочу висловити подяку науковцям, що заклали підгрунтя досліджень та розвинули нові напрямки вивчення алгебр інваріантності: В.І. Фущичу, А.Г. Нікітіну, Р.М. Чернізі та ін. Також вдячна моїм співавторам по даному дослідженню: Плюхіну О.Г. та Карпалюк Т.О., які надали вагому допомогу при роботі над цією задачею. Окрему щиру подяку хочу висловити моєму науковому керівнику Сєрову Миколі Івановичу за багаторічну підтримку, цінні наукові поради та постійну увагу.

Література

[1] W. Fushchych, W. Shtelen, N. Serov, Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.

[2] R. Cherniha, M. Serov, Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms, *Euro. J. of Appl. Math.* **9** (1998), P. 527–542.

[3] М. Сєров, О. Омелян, Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису, *Укр. мат. вісник* **5** (2008), С. 536–562.

[4] A.G. Nikitin, Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, *Ukr. Math. Bulletin* **2** (2005), P. 153–204.

[5] A.G. Nikitin, Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations, *J. Math. Anal. and Appl.* **324** (2006), P. 615–628.

[6] М. Сєров, Т. Жадан, Л. Блажко, Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування, *Укр. мат. журн.* **8** (2006), С. 1128–1145.

[7] R. Cherniha, J. King, Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000), P. 267–268.

[8] R. Cherniha, J. King, Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), P. 405–425.

[9] R. Cherniha, J. King, Nonlinear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), P. 11–35.

[10] A.G. Nikitin, Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems *J. Math. Anal. Appl.* **332** (2007), P. 666–690.

[11] A.G. Nikitin, Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix *Ukr. Math. J.* **59** (2007), P. 395–411.