Симетрійні властивості та точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії

Юлія В. Пилипенко

Національний університет "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка", Полтава, Україна
E-mail: *yuliaprystavka@gmail.com*

Вивчення багатьох фізичних, біохімічних та екологічних процесів у сучасних наукових дослідженнях здійснюється на основі аналізу відповідних математичних моделей. Значну кількість фундаментальних законів природи можна описати за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. До таких рівнянь відносять двовимірне рівняння реакції–конвекції–дифузії:

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ – коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, $a \in \{1, 2\}$.

Рівняння (1) використовується для опису різноманітних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції (див., наприклад, [1]). Воно використовується для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. Модифікації цього рівняння дають змогу описувати перенесення енергії в плазмі, розподіл розчинів у ґрунті, рух рідин в пористих середовищах, а також процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів. При конкретних значеннях нелінійностей $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ рівняння (1) застосовується для моделювання перенесення кисню в кровоносній системі та дослідження динаміки формування тромбів у пристінкових потоках. Рівняння (1) має широке застосування також у біології, у хімії та інших галузях науки [2], [3].

Розглянемо рівняння:

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\tfrac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\tfrac{k+1}{k^2}u^{k+1}, \quad k \neq -1; 0. \tag{2}$$

Серед рівнянь (1) з ненульовим конвективним доданком це рівняння володіє найширшим класом симетрії.

Поставимо задачу використати симетрійні властивості рівняння (2) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) є наступна алгебра*

$$\langle \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u, \quad Q_1 = e^{-x_1}(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_2 - \tfrac{2}{k}\cos x_2 u\partial_u),$$
$$Q_2 = e^{-x_1}(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_2 - \tfrac{2}{k}\sin x_2 u\partial_u)\rangle.$$

Теорема 1 доводиться стандартним методом Лі [4]. Проведемо редукцію рівняння (2) до рівняння з меншою кількістю змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_t + d_a\partial_a + c_0D_0 + c_1Q_1 + c_2Q_2. \tag{3}$$

Один з анзаців (див., наприклад, [5]) при умові $c_0 = d_0 = d_1 = 0$, отриманий за допомогою оператора (3) має вигляд

$$u = e^{-\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0,\omega), \quad \omega = \dot{z}(x_2)e^{x_1} + me^{2x_1},$$

де $z = z(x_2)$ – довільний розв'язок рівняння $\ddot{z} + z = 0$, або $z = c_1\cos x_2 + c_2\sin x_2$, $c_1,\ c_2$ – довільні сталі. Даний анзац редукує рівняння (2) до диференціального рівняння

$$\varphi_{x_0} = (4m\omega + \vec{c}^2)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 4m\varphi^k\varphi_\omega.$$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\varphi_t = \vec{c}^2\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega).$$

Використавши заміну

$$x_0 \to \frac{1}{\vec{c}^2}x_0, \quad \omega \to \omega, \quad \varphi \to \varphi,$$

одержимо рівняння

$$\varphi_0 = \partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega). \tag{4}$$

Знайшовши розв'язки рівняння (4) та врахувавши відповідні анзаци, знаходимо розв'язки рівняння (2):

$$u = e^{-\frac{1}{2(k+1)}x_1}\left[pk\left(\dot{z}\left(\tfrac{k}{4(k+1)}x_2\right)e^{\frac{k}{4(k+1)}x_1} + 16p\tfrac{(k+1)^2}{k^2}\vec{c}^2x_0\right) + c\right]^{\frac{1}{k}}, \quad k \neq 0;$$

$$u = -e^{-x_1}(16\vec{c}^2x_0)^2\,\mathrm{th}^2\left[\tfrac{p}{2}\left(\dot{z}(-\tfrac{1}{4}x_2)e^{-\frac{1}{4}x_1} + p\ln(16\vec{c}^2x_0)\right) + c\right], \quad k = -\tfrac{1}{2};$$

$$u = e^{-x_1-4p\vec{c}^2x_0}\,\mathrm{tg}^2\left[\tfrac{p}{2}\dot{z}(-\tfrac{1}{4}x_2)e^{-\frac{1}{4}x_1+16p\vec{c}^2x_0} + c\right], \quad k = -\tfrac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}\mathrm{arcth}\left[(\tfrac{16}{9}\vec{c}^2x_0)^{\frac{1+2p}{k}}e^{-2x_1}u\right]^{\frac{1}{4}} + \mathrm{arctg}\left[(\tfrac{16}{9}\vec{c}^2x_1)^{\frac{1+2p}{k}}e^{-2x_1}u\right]^{\frac{1}{4}} = \\ = -\tfrac{p}{2}\left[(16\vec{c}^2x_1)^p\dot{z}(-\tfrac{3}{4}x_2)e^{-\frac{3}{4}x_1}\right] + c, \quad k = -\tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Отримані розв'язки є багатопараметричними сім'ями розв'язків. Це дає змогу за допомогою вибору параметрів задовольняти конкретні початкові та крайові умови.

Таким чином, симетрійні властивості рівняння (2) було використано для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Подяки

Висловлюю щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Сєрову Миколі Івановичу за професійне керівництво, цінні наукові поради, терпіння та підтримку під час виконання дослідження. Окрему подяку адресую організаторам науково-практичного семінару за високий рівень організації, зручний формат та можливість представити наукові результати. Також висловлюю подяку колегам за підтримку та співпрацю під час виконання дослідження.

Література

[1] Ames W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. Vol I, Academic Press, New York–London, 1965, 511 p.

[2] Edelstein-Keshet L., Mathematical Models in Biology, Vol. 46 of Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2005, 586 p.

[3] Waniewski J., Theoretical foundations for modeling of mebrane transport in medicine and biomedical engineering, Institute of Computer Science PAS, Warsaw, 2015, 123 p.

[4] Olver P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations (2nd ed.), Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993, 529 p.

[5] Fushchich V.I., Serov N.I. Amerov T.K., Nonlocal ansatze and solutions of a nonlinear system of heat-conduction equations, *Ukr. Math. J.* **45(2)** (1993), P. 316–327.