

Функціональні базиси інваріантів семивимірних нільпотентних алгебр Лі

Крістіна Ю. ЛЕЛЕКА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

E-mail: kristinaleleka18@gmail.com

Інваріанти алгебр Лі, відомі також як узагальнені оператори Казіміра, є однією з ключових характеристик алгебр Лі, що дозволяє глибше зрозуміти їхню структуру та властивості. Вони відіграють важливу роль у теорії представлень, дослідженні інтегровності гамільтонових систем, квантовій механіці та теорії симетрії тощо.

Особливу увагу привертають поліноміальні базиси інваріантів алгебр Лі (так звані оператори Казіміра — елементи центру універсальної обгортуючої алгебри). Для низки важливих класів алгебр Лі, зокрема нільпотентних і досконалих, існування таких базисів доведено у роботах Абеланаса та Мартін Алонса, що істотно спрощує як теоретичне дослідження, так і саму процедуру побудови інваріантів.

Класичний підхід до знаходження узагальнених операторів Казіміра базується на інтегруванні перевизначених систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Однак цей підхід є складним у реалізації та швидко стає обчислювально громіздким навіть для алгебр Лі низьких розмірностей.

Альтернативою цьому методу є алгебраїчний підхід, запропонований у роботах Бойка, Патери та Поповича, який ґрунтується на використанні методу рухомих реперів Картана в інтерпретації Фелса–Олвера. У рамках цього підходу інваріанти знаходять шляхом дослідження дії групи внутрішніх автоморфізмів на дуальному просторі алгебри Лі та виключення параметрів цієї дії. Це дозволяє уникнути інтегрування систем диференціальних рівнянь і значно спрощує обчислення. Застосування цього підходу дало змогу побудувати базиси інваріантів для широких класів розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів. Зокрема, описано інваріанти для майже абелевих алгебр, алгебр з ниткоподібними нільрадикалами, а також для нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць (див. огляд в роботі [2]).

Водночас структура інваріантів безпосередньо залежить від структури самої алгебри Лі. Загальна класифікація скінченновимірних алгебр Лі є надзвичайно складною задачею і не має повного розв'язку для довільної розмірності, тому дослідження зазвичай обмежуються фіксованими класами або фіксованими розмірностями алгебр (дивись огляд в роботі [3]).

Серед алгебр Лі важливе місце посідають нільпотентні алгебри, які характеризуються багатоступеневою структурою та допускають конструктивні методи дослідження. У роботі розглянуто задачу опису функціональних базисів інваріантів семивимірних нільпотентних алгебр Лі, які прокласифіковані у роботі Сілея [4], з використанням K -канонічних базисів і алгебраїчного підходу Бойка, Патери та Поповича [1]. Такий підхід дозволяє врахувати структуру ланцюжка ідеалів алгебри, спростити вигляд матриць внутрішніх автоморфізмів і відносно легко отримати функціональні базиси інваріантів розглянутих алгебр Лі. Ефективність використання K -канонічних базисів вже була продемонстрована у дослідженнях інваріантів шестивимірних алгебр Лі [1], де відповідна модифікація базисів дозволила суттєво спростити процес їх побудови.

Нижче наведено ілюстративний приклад побудови функціонального базису інваріантів для однієї з семивимірних нільпотентних алгебр Лі (повний опис інваріантів семивимірних нільпотентних алгебр Лі представлено у магістерській роботі автора).

Розглянемо семивимірну нільпотентну алгебру Лі з наступними ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} [e_3, e_6] &= e_2, & [e_4, e_5] &= -e_2, & [e_4, e_7] &= e_1 + e_3, & [e_5, e_6] &= e_3, \\ [e_5, e_7] &= e_1, & [e_6, e_7] &= e_5. \end{aligned}$$

Відповідна матриця внутрішніх автоморфізмів має вигляд

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\theta_7 & -\theta_7 & \frac{1}{2}\theta_7^2 & \theta_5 + \theta_4 \\ 0 & 1 & -\theta_6 & \theta_6\theta_7 + \theta_5 & \frac{1}{2}\theta_6^2 - \theta_4 & -\frac{1}{2}\theta_7\theta_6^2 + \theta_7\theta_4 + \theta_3 & \frac{1}{6}\theta_6^3 - \theta_4\theta_6 \\ 0 & 0 & 1 & -\theta_7 & -\theta_6 & \theta_6\theta_7 + \theta_5 & -\frac{1}{2}\theta_6^2 + \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\theta_7 & \theta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а функціональний базис піднятих інваріантів визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= x_1, \\ \mathcal{I}_2 &= x_2, \\ \mathcal{I}_3 &= -\theta_6 x_2 + x_3, \\ \mathcal{I}_4 &= -\theta_7 x_1 + (\theta_6\theta_7 + \theta_5)x_2 - \theta_7 x_3 + x_4, \\ \mathcal{I}_5 &= -\theta_7 x_1 + \left(\frac{1}{2}\theta_6^2 - \theta_4\right)x_2 - \theta_6 x_3 + x_5, \\ \mathcal{I}_6 &= \frac{1}{2}\theta_7^2 x_1 + \left(-\frac{1}{2}\theta_7\theta_6^2 + \theta_7\theta_4 + \theta_3\right)x_2 + (\theta_6\theta_7 + \theta_5)x_3 - \theta_7 x_5 + x_6, \\ \mathcal{I}_7 &= (\theta_5 + \theta_4)x_1 + \left(\frac{1}{6}\theta_6^3 - \theta_4\theta_6\right)x_2 + \left(-\frac{1}{2}\theta_6^2 + \theta_4\right)x_3 + \theta_6 x_5 + x_7. \end{aligned}$$

Оскільки $\langle e_1, e_2 \rangle$ — центр алгебри, то e_1, e_2 — перші два шукані інваріанти.

Розглянемо наступну композицію для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_7$:

$$W = 6\mathcal{I}_2^2\mathcal{I}_7 + 6\mathcal{I}_2\mathcal{I}_3\mathcal{I}_5 + 6\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_5 - \mathcal{I}_4) - 3\mathcal{I}_1\mathcal{I}_3^2 - 2\mathcal{I}_3^3.$$

Підставляємо всі \mathcal{I}_k у W і розкриваємо дужки. Після скорочення всіх доданків, що містять параметри θ_i , отримуємо вираз

$$-6x_1x_2x_4 + 6x_1x_2x_5 - 3x_1x_3^2 + 6x_2^2x_7 + 6x_2x_3x_5 - 2x_3^3.$$

Оскільки симетризація у цього випадку тривіальна, то третій інваріант має вигляд

$$6e_1e_2e_4 - 6e_1e_2e_5 + 3e_1e_3^2 - 6e_2^2e_7 - 6e_2e_3e_5 + 2e_3^3.$$

Подяки

Автор висловлює подяку Вячеславу Миколайовичу Бойку за постійну увагу під час навчання, постановку задачі, допомогу, поради, обговорення та підтримку.

Література

- [1] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames](#), *J. Phys. A* **39** (2006), 5749–5762, for extended and revised version see [arXiv:math-ph/0602046](#).
- [2] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, in Proceedings of 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 36–44, [arXiv:0904.4462](#).
- [3] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., [Realizations of real low-dimensional Lie algebras](#), *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360, for extended and revised version see [arXiv:math-ph/0301029](#).
- [4] Seeley C., [7-dimensional nilpotent Lie algebras](#), *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 479–496.