Аналог системи рівнянь Нав'є–Стокса у випадку різної розмірності векторного поля U та простору незалежних змінних

Тамара О. Карпалюк

Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна

E-mail: *karpaliuk.tamara@lll.kpi.ua*

1. Вступ. Система рівнянь Нав'є–Стокса, названа за іменами французького фізика Клода–Луї Нав'є та британського математика Джорджа Габріеля Стокса, є однією з найважливіших у гідродинаміці. Вона застосовується у математичному моделюванні багатьох природних явищ і технічних задач. Варіації системи рівнянь Нав'є–Стокса використовують для опису руху повітряних мас атмосфери, зокрема, при формуванні прогнозу погоди. Одним із застосувань цієї системи є опис течій у мантії Землі. На сьогоднішній день для моделювання нестаціонарних режимів магістральних газопроводів використовують багато математичних моделей, але всі вони базуються на системі рівнянь Нав'є–Стокса. Ми розглянемо одну з модифікацій системи Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned} &\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ &\rho_t + div(\rho\vec{u}) = 0, \\ &p = f(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, ..., u^n)$ — векторне поле швидкостей, $\rho = \rho(x)$ — густина, $p = p(x)$ — тиск рідини, $u^a = u^a(x)$, $a = \overline{1,n}$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f(\rho)$ — довільна гладка функція.

Важко переоцінити значимість системи (1) у математичному моделюванні різних явищ гідродинаміки, але, незважаючи на численні переваги, система рівнянь Нав'є–Стокса має один суттєвий недолік: використовуватись вона може лише для опису процесів, де розмірність векторного поля $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Звичайно, в природі існують гідродинамічні процеси, в яких ці дві величини не співпадають, тобто $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де m і n не обов'язково рівні. Тоді для моделювання таких процесів система Нав'є–Стокса не може бути застосована, і треба використовувати якісь інші рівняння чи системи. Як же отримати такі системи? Пропонуємо метод, оснований на принципах симетрії, в якому у якості моделі, що має різну розмірність векторного поля і простору незалежних змінних, вибираємо такі узагальнення системи Нав'є–Стокса, які володіють тими ж симетрійними властивостями, що й система (1).

Для правильного узагальнення проаналізуємо структуру системи (1). Зазначимо, що основу системи рівнянь Нав'є–Стокса складає система рівнянь Бюрерса

$$\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = 0, \tag{2}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ця система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial_a}, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a}. \end{aligned} \tag{3}$$

Як відомо, система рівнянь Бюргерса (2) є узагальненням скалярного рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 - u_{11} = 0, \tag{4}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, індекси внизу означають диференціювання за відповідною змінною; і її алебра інваріантності (3) відповідає алгебрі $AG_2(1,1)$ рівняння Бюргерса (4):

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u)\partial_u. \end{aligned} \tag{5}$$

У свою чергу скалярне рівняння Бюргерса зустрічається під час дослідження максимальної алебри інваріантності нелінійного рівняння конвекції дифузії

$$u_0 + f(u)u_1 - u_{11} = 0. \tag{6}$$

Як відомо, це рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянню Бюргерса.

2. Узагальнення рівняння (6) на випадок системи та її інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея. У літературі спостерігалися спроби замінити систему рівнянь Нав'є–Стокса іншою системою, в якій $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де m і n не обов'язково рівні. Ми пропонуємо зробити це так. Спочатку розглянемо узагальнення скалярного рівняння (6) системою рівнянь конвекції дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^a(U)U_a, \tag{7}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_0, \vec{x})$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $U_a = \dfrac{\partial U}{\partial x_a}$, $F^a(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1,n}$. Система (7) з конкретними нелінійностями та значеннями n, m знаходить широке застосування під час опису різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації хімікотехнологічних процесів у різних сферах промисловості. Для нас ця система важлива ще й тому, що кількість просторових змінних і розмірність векторного поля U тут може бути як однаковою, так і різною.

Насамперед ми поставили задачу: знайти такі матриці $F^a(U)$, за яких система (7) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$. Цю задачу вдалося розв'язати для випадків $m \leq 3$ і $n \leq 3$. Зокрема встановлено, що у разі $m \leq n$ система (7) галілеївськи неінваріантна, а якщо $m = n$, то в класі систем (7) тільки система Бюргерса (2) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,n)$ (для випадку $m = n = 2$ див. роботу [1]. Якщо ж $m > n$, то тут ситуація така:

а) $(m,n) = (2,1)$. Встановлено, що існує 5 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1,1)$ (див. роботу [2]);

б) $(m,n) = (3,2)$. У цьому випадку існує 8 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1,2)$ (див. роботу [3]);

в) $(m,n) = (3,1)$. Встановлено, що існує 18 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ (див. роботу [4]).

Покажемо, як можна узагальнити систему рівнянь конвекції–дифузії до системи типу Нав'є–Стокса на прикладі системи (7), у випадку $(m,n) = (3,1)$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Система (7), якщо $m = 3$, $n = 1$, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея*

$$\begin{gathered}AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2,\\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1Q_1 + x_0Q_2 + Q_3\rangle\end{gathered} \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:

$$\begin{aligned}&w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + \lambda_{12}w_1^2 + \lambda_{13}(w^3)^{2l-1}w_1^3 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2w_1^1 + \lambda_{22}(w^3)^l w_1^2 + \lambda_{23}(w^3)^{3l-1}w_1^3 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 - \frac{w^3}{l}w_1^1 + \lambda_{32}(w^3)^{1-l}w_1^2 + \lambda_{33}(w^3)^l w_1^3 + G^3,\end{aligned} \tag{9}$$

причому $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} - \frac{1}{l}w^3\partial_{w^3}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, λ_{ij} — довільні сталі, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані у таблиці 1;
або

$$\begin{aligned}&w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + \psi(w^3)w_1^2 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2w_1^1 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 + G^3,\end{aligned} \tag{10}$$

причому $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, $\psi(w^3)$ — довільна функція, значення w^a, G^a подані у таблиці 2;
або

$$\begin{aligned}&w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + (w^2)^{2l-1}\psi^{12}w_1^2 + (w^2)^{2l}\psi^{13}w_1^3 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - \frac{w^2}{l}w_1^1 + (w^2)^l\psi^{22}w_1^2 + (w^2)^{l+1}\psi^{23}w_1^3 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 + (w^2)^{l-1}\psi^{32}w_1^2 + (w^2)^l\psi^{33}w_1^3 + G^3,\end{aligned} \tag{11}$$

причому $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - \frac{1}{l}w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = 0$, $\psi^{ab}(w^3)$ — довільні функції, $a, b = \overline{1,3}$, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані в таблиці 3.
У таблиці 3 $m \neq 0$, n — довільні сталі.

Доведення теореми 1 базується на стандартному методі Лі (див., наприклад, [5]– [7]) та наведене в роботі [4].

3. Узагальнення систем рівняннь конвекції дифузії, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, до систем типу Нав'є–Стокса. Отож, у теоремі 1 для випадку $(m, n) = (3, 1)$ наведені системи (7), інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея. Тепер залишається зробити завершальний крок: узагальнити одержані системи до систем типу Нав'є–Стокса. Зазначимо, що таке узагальнення у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної виконувалось у роботах [8], [9]. Ми ж покажемо це для $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

У випадку $m = 3, n = 1$ розглянемо систему (10), значення w^a, G^a якої описані у першому рядку таблиці 2. Після відповідної підстановки вона має вигляд

$$\begin{aligned}&u_0^1 + u^1u_1^1 - u_{11}^1 - \psi(u^3)\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 = 0,\\ &u_0^2 + u^1u_1^2 - u_{11}^2 - \psi(u^3)u^1\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 + 2\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u_1^1 = 0,\\ &u_0^3 + u^1u_1^3 - u_{11}^3 = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

Табл. 1. Набір значень l, w^a, G^a для системи (9).

№	l	w^a	G^a
1.	l	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3=u^3$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2$ $G^3=0$
2.	1	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3=e^{u^3}$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2$ $G^3=-\frac{(w^3_1)^2}{w^3}$
3.	$\frac{l}{2}$	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}+u^3\ln\sqrt{u^3}$ $w^3=u^3$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2-\frac{(w^3_1)^2}{2w^3}$ $G^3=0$
4.	l	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$ $w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3=u^1$	$G^1=\frac{2w^1_1w^3_1}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2=(w^1_1)^2+\frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}$ $G^3=0$
5.	$\frac{1}{3}$	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3=u^3-u^1u^2+\frac{(u^1)^3}{3}$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2$ $G^3=2w^1_1w^2_1-2w^2w^2_1$
6.	$-\frac{1}{2}$	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$ $w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2-\frac{1}{2u^1}\ln u^1$ $w^3=u^1$	$G^1=\frac{2w^1_1w^3_1}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2=(w^1_1)^2+\frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}-\frac{(w^3_1)^2}{2(w^3)^3}$ $G^3=0$

Табл. 2. Набір значень w^a, G^a для системи (10).

№	w^a	G^a
1.	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3=u^3$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2$ $G^3=0$
2.	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$ $w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3=u^1$	$G^1=\frac{2w^1_1w^3_1}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2=(w^1_1)^2+\frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}$ $G^3=0$

та інваріантна відносно узагальненої алебри Галілея (8) при

$$Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2},\quad Q_2=-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2},\quad Q_3=\partial_{u^2}.$$

Табл. 3. Набір значень l, w^a, G^a для системи (11).

№	l	w^a	G^a
1.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 e^{-nu^2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = -\dfrac{2nw_1^2 w_1^3}{w^2} + \dfrac{n^2 w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
2.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 + \ln u^3$	$G^1 = -\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
3.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 - \dfrac{(u^2)^2}{2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = \dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
4.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = u^3 (u^2)^n$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{n(n+1) w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \dfrac{2nw_1^2 w_1^3}{w^2}$
5.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 (u^3)^n$	$G^1 = -\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{n(n+1) w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \dfrac{2nw_1^2 w_1^3}{w^2}$
6.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = \dfrac{u^3}{u^2} + l \ln u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2} - \dfrac{l (w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
7.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3 = u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^3} - \dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = 0$
8.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^2 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = \dfrac{u^2}{u^3}$	$G^1 = -\dfrac{w^3 (w_1^2)^2}{w^2} - \dfrac{w^2 (w_1^3)^2}{w^3} - \dfrac{(w_1^2)^2}{w^2} - 2w_1^2 w_1^3$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2}$
9.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^2 + \dfrac{1}{2} u^2 \ln^2 u^2$ $w^2 = u^2$ $w^3 = \dfrac{u^3}{u^2} + \ln u^2$	$G^1 = -\dfrac{w^3 (w_1^2)^2}{w^2} - 2w_1^2 w_1^3 + \dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2} - \dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
10.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{u^3}{u^2}\right)}$ $w^3 = \ln\left((u^2)^2 + (u^3)^2\right) - \dfrac{2n}{m} \arctan\left(\dfrac{u^3}{u^2}\right)$	$G^1 = 0$ $G^2 = w_1^2 w_1^3 - (2n+1) \dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = \dfrac{(w_1^3)^2}{2} - 2(m^2 + n^2) \dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$

Узагальнимо систему (12) наступною системою

$$
\begin{aligned}
&u_0^1 + u^1 u_1^1 - u_{11}^1 - \psi(u^3) \left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 = f^1 p_1, \\
&u_0^2 + u^1 u_1^2 - u_{11}^2 - \psi(u^3) u^1 \left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 + 2\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right) u_1^1 = f^2 p_1, \\
&u_0^3 + u^1 u_1^3 - u_{11}^3 = f^3 p_1, \\
&\rho_0 + \partial_1(\vec{g}\vec{u}) = 0, \\
&p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де $\vec{g} = (g^1, g^2, g^3)$, f^a, g^a $(a = \overline{1,3})$ — довільні гладкі функції аргумента ρ. Вимагаємо, щоб система (13) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (8), де $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - ku^3\partial_{u^3} - l\rho\partial_\rho$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо система (13) має вигляд*

$$
\begin{aligned}
&u^1_0 + u^1u^1_1 - u^1_{11} - \psi\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 = 0,\\
&u^2_0 + u^1u^2_1 - u^2_{11} - \psi u^1\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 + 2\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1 = c_1\rho^2\rho_1,\\
&u^3_0 + u^1u^3_1 - u^3_{11} = c_2\rho_1,\\
&\rho_0 + (u^1\rho)_1 + \lambda(u^3\rho^2)_1 = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i $(i = 1, 2)$ — довільні сталі, то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$
\begin{aligned}
&\partial_0,\quad \partial_1,\quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2},\quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - \rho\partial_\rho,\\
&\Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(u^1\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2} + \rho\partial_\rho) + \partial_{u^2}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Оскільки одержана система (14), узагальнює тривимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса у випадку однієї просторової змінної не тільки по формі, а й має аналогічні симетрійні властивості — задовольняє принципу відносності Галілея, то вона претендує на опис реальних процесів гідродинаміки у випадку тривимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної. Підсумовуючи сказане вище, можна зробити висновок, що метод Лі є потужним методом, за допомогою якого серед класу математичних моделей можна відібрати ті, що задовольняють тому чи іншому принципу відносності.

Література

[1] Жадан Т.О., Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея, *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка* **12** (2004), 70–75.

[2] Глєба А.В., Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис. канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.03, Київ, 2003, 120 с.

[3] Карпалюк Т.О., Симетрійна класифікація нелінійних рівнянь конвекції–дифузії відносно алгебр Галілея: Дис. канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02, Київ, 2016, 135 с.

[4] Сєров М.І., Карпалюк Т.О., Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля, *Математичний вісник НТШ* **7** (2010), 200–221.

[5] Lie S., Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6, Leipzig: 1881, P. 328–368.

[6] Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978, 400 с.

[7] Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, Berlin: Springer, 1986.

[8] Сєрова М.М., Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса, Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3**, № 2, (2006), 270–275.

[9] Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Карпалюк Т.О., Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії, Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова), К.: 2009.