Групова класифікація рівнянь аксіонної електродинаміки

Оксана В. Брагінець

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна
E-mail: *oksana.brahinets@gmail.com*, *o.braginets@chmnu.edu.ua*

Моделі аксіонної електродинаміки є складним і цікавим об'єктом для групового аналізу, оскільки це досить складна система, дослідження якої вимагає певного узагальнення відомих підходів. Результати аналізу цієї системи можуть мати важливе прикладне значення, тому що, хоча існування аксіонів поки що немає надійних експериментальних підтверджень, вони затребувані одразу в трьох абсолютно незалежних областях сучасної науки, таких як космологія, фізика твердого тіла та квантова хромодинаміка.

У цій роботі представлена групова класифікація моделей аксіонної електродинаміки з самодією аксіонного поля.

Узагальнений лагранжіан аксіонної електродинаміки має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - V(\theta). \tag{1}$$

Тут $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ — вектор-потенціал електромагнітного поля, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, θ — аксіонне поле, $p_\mu = \partial_\mu\theta$, $V(\theta)$ — функція від θ та κ — безрозмірна константа.

Рівняння Ейлера–Лагранжа, які відповідають лагранжіану (1), мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E} = \kappa\mathbf{p}\cdot\mathbf{B},\\ &\partial_0\mathbf{E} - \nabla\times\mathbf{B} = \kappa(p_0\mathbf{B} + \mathbf{p}\times\mathbf{E}),\\ &\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\partial_0\mathbf{B} + \nabla\times\mathbf{E} = 0,\\ &\Box\theta = -\kappa\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + F. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут $\mathbf{B}$ та $\mathbf{E}$ — вектори магнітного та електричного полів, які наступним чином пов'язані з компонентами тензора електромагнітного поля: $E^a = F^{0a}$, $B^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0abc}F_{bc}$ та $F = -\frac{\partial V}{\partial\theta}$, $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$, $\nabla^a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = \overline{1,3}$.

Система (2), (3) містить сім залежних функцій $B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3, \theta$ і один довільний елемент F, який залежить від θ, тобто вона є досить складною.

Знайдемо симетрії рівнянь (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$ відносно неперервних груп перетворень.

Групова класифікація

Рівняння (3) містить довільну функцію $F(\theta)$, тому ми можемо передбачити, що симетрії цієї системи будуть залежати від явного вигляду F. Згідно класичного алгоритму Лі (див., наприклад, [3]), щоб знайти симетрії системи (2), (3) відносно неперервної групи перетворень

$$\mathbf{B}\to\mathbf{B}',\quad \mathbf{E}\to\mathbf{E}',\quad \theta\to\theta',\quad x_\mu\to x'_\mu,$$

розглянемо інфінітезимальний оператор

$$Q = \xi^\mu\partial_\mu + \eta^j\partial_{B^j} + \zeta^j\partial_{E^j} + \sigma\partial_\theta \tag{4}$$

та його продовження

$$Q_{(2)} = Q + \eta_i^j \frac{\partial}{\partial B_i^j} + \zeta_i^j \frac{\partial}{\partial E_i^j} + \sigma_i \partial_{\theta_i} + \sigma_{ik} \partial_{\theta_{ik}}, \tag{5}$$

де $B_i^j = \partial_i B^j$, $E_i^j = \partial_i E^j$, $\theta_i = \partial_i \theta$, $\theta_{ik} = \partial_i \theta_k$ та функції η_i^j, ζ_i^j, σ_i, σ_{ik} можуть бути виражені через ξ^i, η^j, ζ^j, σ, з використанням наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} &\eta_i^j = D_i(\eta^j) - B_k^j D_i(\xi^k), \quad \zeta_i^j = D_i(\zeta^j) - E_k^j D_i(\xi^k), \\ &\sigma_i = D_i(\sigma) - \theta_k D_i(\xi^k), \quad \sigma_{ik} = D_k(\sigma_i) - \theta_{il} D_k(\xi^l), \end{aligned} \tag{6}$$

де $D_i = \partial_i + B_i^j \partial_{B^j} + E_i^j \partial_{E^j} + \theta_i \partial_\theta + \theta_{ik} \partial_{\theta_k}$.

Використовуючи (5), умову інваріантності для системи (2), (3) можна записати в наступному вигляді:

$$Q_{(2)} \mathcal{F}\big|_{\mathcal{F}=0} = 0, \tag{7}$$

де $\mathcal{F}$ — многовид заданий співвідношеннями (2), (3). Цей многовид заданий у евклідовому просторі, базис якого створюють залежні і незалежні змінні системи рівнянь (2), (3), а також похідні від залежних змінних. Обраховуючи функції (6), підставляючи результат у (7) і прирівнюючи коефіцієнти при лінійно-незалежних функціях E^j, B^j, θ та їх похідних, ми отримаємо наступну визначальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів ξ^μ, η^j, ζ^j та σ:

$$\begin{gathered} \xi^\mu_{B^a} = 0, \quad \xi^\mu_{E^a} = 0, \quad \xi^\mu_\theta = 0, \\ \xi^\mu_{x^\mu} = \xi^\nu_{x^\nu}, \quad \xi^\mu_{x^\nu} + \xi^\nu_{x^\mu} = 0, \ \mu \neq \nu, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\sigma_{E^a} = 0, \quad \sigma_{B^a} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \tag{9}$$

$$\Box \sigma + (\sigma_\theta - 2\xi^0_{x^0})(F + kE^a B^a) - \kappa(B^a \zeta^a + E^a \eta^a) - \sigma F_\theta = 0, \tag{10}$$

$$\Box \xi^\mu - 2\sigma_{\theta x^\mu} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \xi^a_{x^b} + \eta^b_{B^a} = 0, \quad \xi^a_{x^b} + \zeta^b_{E^a} = 0, \\ \xi^a_{x^0} - \varepsilon_{abc} \eta^c_{E^b} = 0, \quad \xi^a_{x^0} - \varepsilon_{abc} \eta^c_{B^b} = 0, \\ \partial_a \eta^a = 0, \quad \partial_a \zeta^a + B^a \partial_a \sigma = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \eta^a_{x^0} + \varepsilon_{abc} \zeta^c_{x^b} = 0, \quad \zeta^a_{x^0} + B^a \sigma_{x^0} - \varepsilon_{abc}(\eta^c_{x^b} + E^b \sigma_{x^c}) = 0, \\ \eta^a + B^a \sigma_\theta + \zeta^a_\theta - B^b \zeta^a_{E^b} + \varepsilon_{abc} E^b \xi^0_{x^c} = 0, \\ \zeta^a - \eta^a_\theta + E^a \sigma_\theta - E^b \zeta^a_{E^b} - \varepsilon_{abc} B^b \xi^0_{x^c} = 0, \\ \eta^a_{B^a} - \eta^b_{B^b} = 0, \quad \eta^a_{B^a} - \zeta^b_{E^b} = 0, \quad \zeta^a_{E^a} - \zeta^b_{E^b} = 0, \\ \eta^a_\theta - B^a \eta^b_{E^b} = 0, \quad \zeta^a_\theta - E^a \eta^b_{E^b} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Тут нижні індекси позначають похідні відносно відповідних змінних: $\xi^\mu_{B^a} = \frac{\partial \mu}{\partial B^a}$, і т.д., та в останніх двох рядках не відбувається сумування по індексам, що повторюються.

Згідно з рівнянням (8) функції ξ^μ не залежать від B^a, E^a, θ та є векторами Кіллінга у просторі незалежних змінних. Їх загальний вигляд задається наступними формулами:

$$\xi^\mu = 2x^\mu f^\nu x_\nu - f^\mu x_\nu x^\nu + c^{\mu\nu} x_\nu + dx^\mu + e^\mu, \tag{13}$$

де f^μ, d, e^μ та $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$ — довільні константи.

З (9) випливає, що $\sigma = \varphi_1\theta + \varphi_2$, де φ_1 та φ_2 — функції від x_μ. Підставляючи цей вираз в (10), отримуємо наступне рівняння:

$$\varphi_1\theta F_\theta + \varphi_2 F_\theta + 2(\xi^0_{x^0} - \varphi_1)F + 2k(\xi^0_{x^0} - \varphi_1)E_a B_a + \\ + \kappa(B^a\zeta^a + E^a\eta^a) - \theta\Box\varphi_1 - \Box\varphi_2 - 2p^\mu\partial_\mu\varphi_1 = 0. \quad (14)$$

Нехай члени

$$\theta F_\theta,\ F_\theta,\ F,\ \text{та } 1 \quad (15)$$

є лінійно незалежними. Тоді з (14) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \xi^0_{x^0} = 0, \quad B^a\zeta^a + E^a\eta^a = 0 \quad (16)$$

і, тим самим $\sigma = 0$. Підставляючи (16) та (13) в (11), отримуємо умову $f^\nu = 0$, тому (13) редукується до вигляду

$$\xi^\mu = c^{\mu\nu}x_\nu + e^\mu. \quad (17)$$

Тоді з (12), (16) та (17) випливає, що

$$\eta^a = c^{ab}B^b + \varepsilon_{abc}c^{0b}E^c, \quad \zeta^a = c^{ab}E^b - \varepsilon_{abc}c^{0b}B^c. \quad (18)$$

Підставляючи (17) та (18) в (4) і використовуючи умову $\sigma = 0$, ми отримаємо лінійну комбінацію наступних інфінітезимальних операторів:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \\ &J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + B^a\partial_{B^b} - B^b\partial_{B^a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a}, \\ &J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 + \varepsilon_{abc}(E^b\partial_{B^c} - B^b\partial_{E^c}), \end{aligned} \quad (19)$$

де ε_{abc} — одиничний антисиметричний тензор, $a, b, c = 1, 2, 3$.

Оператори (19) утворюють базис алгебри Лі $\mathfrak{p}(1,3)$ групи Пуанкаре $P(1,3)$.

Знайдена симетрія розширюється у тих випадках, коли члени (15) є лінійно залежними. А саме, існує три випадки, коли це відбувається. При цьому довільна функція F у рівнянні (3) набуває одну з наступних форм: $F = 0$, $F = c$ та $F = be^{a\theta}$, де c, a та b — ненульові константи. Відповідні додаткові базисні елементи алгебри інваріантності мають вигляд:

$$\begin{aligned} &P_4 = \partial_\theta,\ D = x_0\partial_0 + x_i\partial_i - B^i\partial_{B^i} - E^i\partial_{E^i},\ \text{якщо } F(\theta) = 0, \\ &P_4 = \partial_\theta,\ \text{якщо } F(\theta) = c, && (20) \\ &X = aD - 2P_4,\ \text{якщо } F(\theta) = be^{a\theta}. && (21) \end{aligned}$$

Оператор P_4 відповідає зсувам залежної змінної θ, D — оператор дилатації, який генерує відповідні масштабні перетворення залежних та незалежних змінних, та X — відповідає комбінації зсувів і масштабних перетворень. Відмітимо, що довільні параметри a, b та c можна звести до постійних значень $a = \pm 1, b = \pm 1$ та $c = \pm 1$ за допомогою масштабних перетворень залежних та незалежних змінних.

Отримані результати можуть бути сформульовані у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Максимальною неперервною групою інваріантності системи (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$ є група Пуанкаре. У випадках, вказаних у (20) та (21) ця симетрія задається розширеними 11-параметричними групами Пуанкаре, у той час як для тривіального F група симетрії є 12-параметричною.*

Відмітимо, що інфінітезимальні оператори (19) можуть бути записані в термінах потенціальних змінних A^μ і $A^4 = \theta$. При цьому ці оператори приймають більш компактну форму:

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + A_\mu\partial_{A_\nu} - A_\nu\partial_{A_\mu}. \quad (22)$$

Саме це представлення буде використовуватися при дослідженні законів збереження.

Закони збереження

Система (2), (3) допускає лагранжеве формулювання. Згідно з теоремою Нетер це означає, що симетрії, знайдені раніше, генерують закони збереження. Оскільки у ролі польових змінних у лагранжіані (1) виступає вектор-потенціал A^μ, то для знаходження законів збереження необхідно представити знайдені вище оператори симетрії в термінах цих варіаційних змінних:

$$Q = \xi^\mu \partial_\mu + \varphi^\tau \partial_{A^\tau}, \tag{23}$$

де сумування відбувається по індексам $\tau = 0,1,2,3,4$ та $\mu = 0,1,2,3$. Явні вирази для коефіцієнтів ξ^μ та φ^τ легко отримати, порівнявши (22) з (23).

Струм, який відповідає симетрії (23), може бути представлений як [3]:

$$J_\sigma = \varphi_\tau \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)} + \xi^\sigma L - \xi^\nu \partial_\nu A^\tau \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma A^\tau)}. \tag{24}$$

Так побудовані величини дійсно відповідають законам збереження, оскільки для них виконуються рівняння неперервності $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Найбільш важливою з фізичної точки зору величиною, що зберігається у часі, є тензор енергії-імпульсу, який відповідає симетріям P_μ. У цьому випадку у формулі (23)

$$\varphi^\tau = 0 \text{ і } \xi_\mu = 1, \tag{25}$$

де μ послідовно приймає значення $0,1,2,3$. Підставляючи (1) і (25) у (24) та використовуючи тривимірні позначення

$$F_{0a} = E_a, \quad F_{ab} = \varepsilon_{abc} B_c,$$

знаходимо компоненти цього тензору в наступному вигляді:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + p_0^2 + \mathbf{p}^2) + V(\theta), \tag{26}$$

$$T^{0a} = T^{a0} = \varepsilon_{abc} E_b B_c + p^0 p^a, \tag{8}$$

$$T^{ab} = -E^a E^b - B^a B^b + p^a p^b + \frac{1}{2}\delta^{ab}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + p_0^2 - \mathbf{p}^2 - 2V(\theta)). \tag{27}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ симетричний та задовольняє рівнянню неперервності $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Його компоненти T^{00} та T^{0a} задають густину енергії та імпульсу відповідно.

Важливо відзначити, що тензор енергії-імпульсу не залежить від параметра κ, тобто член $\frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, присутній у лагранжіані (1), на нього не впливає. Насправді цей тензор не що інше, як сума тензорів енергії-імпульсу для вільного електромагнітного поля і вільного скалярного поля. Взаємодія цих полів між собою не дає внесок у тензор енергії-імпульсу.

Відзначимо також, що для випадку $V(\theta)$, тобто, $V(\theta) = \frac{1}{2}m^2\theta^2$, густина енергії T^{00} (26) додатньо визначена. Саме цей випадок відповідає стандартним рівнянням аксіонної електродинаміки.

Існування тензору, що зберігається, (26), (27) викликано симетрією лагранжіана (1) відносно зсувів незалежних змінних x_μ. Симетрії відносно поворотів та перетворення Лоренца призводять до збереження наступного тензора:

$$G^{\alpha\nu\mu} = x^\alpha T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\alpha}, \tag{28}$$

який задовольняє рівнянню неперервності відносно індекса μ. Зокрема, для $\alpha, \nu = 1,2,3$ рівняння (28) з $T^{\mu\nu}$ заданими в (26), (27) представляє тензор кутового моменту.

Тензори (26)–(28) вичерпують величини, що зберігаються, існування яких обумовлене симетріями Лі рівнянь (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$.

У результаті проведення групового аналізу знайдено, що максимальною неперервною групою інваріантності системи (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$ є група Пуанкаре.

Використовуючи тривимірні підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре, отримано широкий клас точних розв'язків для електромагнітного та аксіонного полів [1, 2]. Ці розв'язки включають довільні параметри, а деякі і довільні функції. Найбільш загальні з них містять шість таких функцій.

Подяки

Автор вдячна А.Г. Нікітіну за постановку задачі та корисні дискусії.

Література

[1] Peccei R.D., Quinn H.R. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 38, № 25. P. 1440–1443.

[2] Raffelt G.G. Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena. *Phys. Rep.* 1990. Vol. 198, № 1–2. P. 1–113.

[3] Weinberg S. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.* 1978. Vol. 40, № 4. P. 223–226.

[4] Wilczek F. Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.* 1978. Vol. 40, № 5. P. 279–282.

[5] Wilczek F. Two applications of axion electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, № 18. P. 1799–1802.

[6] Qi X.-L., Hughes T.L., Zhang S.-C. Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Phys. Rev. B.* 2008. Vol. 78, № 19. Paper 195424, 43 p.

[7] Patkós A. Radiation Backreaction in Axion Electrodynamics. *Symmetry.* 2022, 14, 1113, 10 p.

[8] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. New York: Springer-Verlag, 1986. 497 p.

[9] Nikitin A.G., Kuriksha O. Group analysis of equations of axion electrodynamics. *Proceedings of the 5th International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (June 6-10, 2010, Protaras, Cyprus). Editors: N.M. Ivanova, P.G.L. Leach, R.O. Popovych, C. Sophocleous and P.A. Damianou. University of Cyprus, Nicosia, 2011. P. 152–163.

[10] Nikitin A.G., Kuriksha O. Invariant solutions for equations of axion electrodynamics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2012. Vol. 17. P. 4585–4601.

[11] Nikitin A.G., Kuriksha O. Symmetries of field equations of axion electrodynamics. *Phys. Rev. D.* 2012. Vol. 86, No 2. 12 pp.