Автоперетворення Беклунда для рівняння синус-Гордона

Людмила М. БЛАЖКО

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
E-mail: *lblazhko@ukr.net*

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордона (СГ). З геометричної точки зору рівняння синус-Гордона виникло в диференціальній геометрії наприкінці XIX століття і пов'язане із задачею побудови чебишевських сіток на поверхнях від'ємної кривизни [3]. В 1936 році вивченням розв'язків рівняння (1) займався німецький вчений Р. Штойрвальд, але результати його досліджень були відомі в той час лише небагатьом спеціалістам з геометрії [2], [8]. У фізиці рівняння СГ було застосоване в теорії дислокацій Я. Френкелем та Т. Канторовою [5]. Воно описує розповсюдження обертань, умовних або дійсних, у різних фізичних системах [4], [5]. Рівняння СГ є одним з найбільш відомих рівнянь теорії солітонів [2], розвиток якої бере початок із спостереження фізичного явища "solitary ware" (відокремленої хвилі) британським інженером Д. С. Расселом у 1834 році [1]. Однак його роботи на деякий час були забуті. Пізніше, в 1965 році в роботі Н. Забуського і М. Крускала [9] ця хвиля була названа солітоном.

Сплеск інтересу до солітонів почався в другій половині XX століття одночасно в декількох галузях науки — нелінійній електродинаміці, фізиці твердого тіла, гідродинаміці, біофізиці та ін. Дослідження солітонів іще раз продемонструвало єдність нелінійних коливних (хвильових) процесів різної природи. У даній роботі розглянемо деякі аспекти дослідження рівняння (1), а саме побудову розв'язків типу солітонних за допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків та зв'язок відомих і одержаних розв'язків з умовною симетрією даного рівняння. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння синус-Гордона є алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1. \tag{2}$$

Наприкінці XIX століття Беклунд [3], [6] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}, \qquad \left(\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda\sin\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2} \tag{3}$$

для рівняння СГ (1), записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{4}$$

де

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \qquad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{5}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ — два різні розв'язки рівняння (4), λ — довільна стала. Перетворення (3) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, вони є автоперетвореннями Беклунда (АПБ). Враховуючи те, що перетворення задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$

рівняння (3), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння. За допомогою АПБ (3) у літературі побудовано деякі точні роз в'язки рівняння (4), які одержали назву солітонних розв'язків. Односолітонні

$$u = 4 \arctan e^{\theta_1} \tag{6}$$

та двосолітонні

$$u = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} . \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}}, \right) \tag{7}$$

де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} y + c_i +$, λ_i, c_i — сталі, $i = 1, 2$, розв'язки даного рівняння [4].

У роботі [7] побудована формула знаходження N-солітонних розв'язків рівняння СГ. Для побудови солітонних розв'язків рівняння СГ може також використовуватись теорема Б'янкі про перестановочність [2].

У даній роботі пропонується дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (3). Нехай $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$ за формулою:

$$\tau = \tanh \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{4}. \tag{8}$$

Це дає можливість записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ в параметричному вигляді. Сформулюємо даний результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Якщо $\overset{1}{u}$ — розв'язок рівняння (4) то його інший розв'язок $\overset{2}{u}$ знаходиться за формулою*

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \tau, \tag{9}$$

де $\tau = \tau(y, z)$— розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\tau_y = -\frac{1}{2} \left(\tau^2 + 1 \right) \overset{1}{u}_y + \tau, \tag{10}$$

$$\tau_z = -\frac{1}{2} \left(\tau^2 + 1 \right) \sin) \overset{1}{u} + \tau \cos) \overset{1}{u}. \tag{11}$$

Таким чином, згідно даної теореми, побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку по відомому розв'язку $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (10) , а потім за до помогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденому по ньому параметру τ за формулою (9) знаходимо $\overset{2}{u}$ — новий розв'язок рівняння СГ.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (9), (10) використовувати послідовно декілька разів, то, в результаті, отримуємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4 \arctan \overset{n+1}{\tau}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{\tau}_y &= -\frac{1}{2} ((\overset{n+1}{\tau})^2 + 1) \overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau}, \\ \overset{n+1}{\tau}_z &= -\frac{1}{2} ((\overset{n+1}{\tau})^2 - 1) \sin \overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau} \cos \overset{n}{u}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\overset{n}{u}$ — розв'зок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ — функції, які знайдені на $(n+1)$-му. Ми помітили зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (13) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема. *Якщо початковий розв'язок у формулах (12), (13) вибрати тривіальний розв'язок рівняння синус–Гордона* $\overset{0}{u} = 0$, *то для системи (13) справедлива формула*

$$\overset{n+1}{\tau}{}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}{}_3(-y,-z), \tag{14}$$

де $\overset{n}{\tau}{}_3(y,z)$ *— загальний розв'язок системи (13) на* n*-му кроці при спеціальному виборі сталої інтегрування,* $\overset{n+1}{\tau}{}_0(y,z)$ *— частинний розв'язок системи (13) на* $(n+1)$*-му кроці,* $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Випишемо ланцюжок розв'язків рівняння синус–Гордона (4), одержаного в результаті застосування рекурентних формул (12), (13):

$$\begin{aligned}
&0 \to 4\arctan \mathrm{e}^{y+z} \to 4\arctan \frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)} \to \\
&4\arctan\Big(\frac{\mathrm{e}^{-(y+z)}(c+y+z+\cosh(y+z)\sinh(y+z)}{c+y+z+\cosh(y+z)\sinh(y+z)-\cosh^2(y+z)-(y-z)^2} \\
&\qquad + \frac{\cosh^2(y+z)+(y-z)^2)}{c+y+z+\cosh(y+z)\sinh(y+z)-\cosh^2(y+z)-(y-z)^2}\Big).
\end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи зв'язок (5) між змінними y, z і x_0, x_1, одержаний нами ланцюжок розв'язків для рівняння СГ (1) має вигляд

$$\begin{aligned}
&0 \to 4\arctan \mathrm{e}^{x_1} \to 4\arctan \frac{-x_0}{\cosh x_1} \\
&\qquad \to 4\arctan \mathrm{e}^{-x_1} \frac{c+x_1+\cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c+x_1+\cosh x_1\sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}.
\end{aligned}$$

Оскільки графіки одержаних розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки є розв'язками солітонного типу рівняння синус–Гордона.

Зауваження. З кожним наступним кроком процедури розмноження розв'язків рівняння СГ, запропонованої в теоремі 1, різко зростає громіздкість перетворень даного алгоритму. Тому було природно наступні кроки доручити ЕОМ.

За допомогою програми Maple нам вдалося проробити ще два кроки вказаного алгоритму. В результаті одержали наступні розв'язки

$$\overset{4}{u} = 4\arctan \frac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1}, \tag{15}$$

$$\overset{5}{u} = 4\arctan \mathrm{e}^{x_1} \frac{(\cosh^2 x_1 + A - B)\mathrm{e}^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C-D)\mathrm{e}^{2x_1}}, \tag{16}$$

де

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{9}x_0^6 + \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + x_0^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2c_5x_1, \\
B &= \frac{1}{3}x_0^4x_1 + 2x_0^2(x_1+c_5) - x_1(x_1^2+1) + c_5, \\
C &= \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad D = (x_0^2+1)x_1 - c_5.
\end{aligned}$$

Проаналізувавши графіки одержаних розв'язків та їх проекцій, бачимо, що всі вони мають вигляд хвилі, що не змінює свою форму зі зміною часу. У зв'язку з цим можна зробити висновок, що знайдені нами розв'язки $\overset{2}{u}$–$\overset{5}{u}$, як і $\overset{1}{u}$, є розв'язками солітонного типу рівняння синус–Гордона.

Подяки.

Висловлюю щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Сєрову М. І. за цінні поради, постановку задачі та допомогу у її розв'язанні. Окремо дякую доктору фізико-математичних наук, професору Поповичу Р. О. за консультації щодо розмноження розв'язків та плідні наукові обговорення.

Література

[1] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, М.: Мир, 1987, 480 с.

[2] С. П. Новиков, *Солитоны*, М.: Мир, 1983, 408 с.

[3] Э. Г. Позняк, А. Г. Попов, *Уравнение синус–Гордона: геометрия и физика*, М.: Знание, 1991, 48 с.

[4] А. Т. Филиппов, *Многоликий солитон*, М.: Наука, 1990, 288 с.

[5] Я. Френкель, Т. Конторова, *О теории пластической деформации и двойникования* // Физический журнал, (1939), **1**, 137–145.

[6] A. V. Bäclund, *Om Ytor med konstant negativ Krökning* // Lund Universitets Arsskrift, **19** (1883), 1–48.

[7] P. J. Caudrey, J. C. Eibeck, J. D. Gibbon, *The sine-Gordon equations a model field theory* // Nuovo Cimento, **25**, (1975), 497–512.

[8] R. Steurwald, *Uber Ennepersche Flichen und bicklund'sche Transformation*, München.: Abh. Bayer Akad. Wiss., **40**, 1936, 105 p.

[9] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states* // Phys. Rev. Lett., **15**, (1965), 240–243.