Національна академія наук України
Інститут математики НАН України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Сучасні проблеми математики та її застосувань

II

Київ - 2021

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сучасні проблеми математики та її застосувань

II

Київ - 2021

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Збірник праць Інституту математики НАН України

Том 18, № 1

УДК 51-7; 510; 512; 514; 517; 519.2; 519.6

Сучасні проблеми математики та її застосувань, II.
Відп. ред. *В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко.*
Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 18, № 1.
Київ: Ін-т математики НАН України, 2021. – 284 с.

ISSN 1815-2910

Збірник праць містить статті присвячені основним набуткам наукових співробітників Інституту математики НАН України з актуальних напрямів розвитку сучасної математики та її застосувань.

Для наукових співробітників, викладачів закладів вищої освіти, докторантів і аспірантів.

The Proceedings devoted to the main acquisitions of scientists of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine in current areas of development of modern mathematics and its applications.

For researchers, teachers of higher education institutions, doctoral and graduate students.

Відповідальні редактори:

В. І. Герасименко, доктор фіз.-мат. наук, професор

Ю. А. Дрозд, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

С. І. Максименко, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник

Рецензенти:

І. О. Парасюк, доктор фіз.-мат. наук, професор

М. В. Працьовитий, доктор фіз.-мат. наук, професор

Затверджено до друку Вченою радою Ін-ту математики НАН України, протокол № 11 від 29. 06. 2021 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ № 8459 від 19. 02. 2004 р.

Рік заснування - 1938 р.

Зміст частини I

Зміст частини II

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 407–424

Праці Інституту математики НАН України

В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко

Abstract. This foreword contains a list of monographs that were published thanks to the aspirations and creativity of mathematicians of the Institute for 30 years of independent Ukraine. These works show the development of mathematical thought over the past three decades of the 100-year history of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine.

Анотація. У цьому передньому слові наводиться список монографій, які вийшли у світ завдяки устремлінням й творчості математиків Інституту за 30 років незалежної України. Ці праці показують напрями розвитку математичної думки за останні три десятиліття 100-річної історії Інституту математики НАН України.

Друга частина колективної монографії «Сучасні проблеми математики та її застосувань», яка склала черговий том Праць Інституту математики НАН України, періодичного видання, заснованого в 1938 р. професором Д. О. Ґраве, містить огляди, пов'язані з напрямами прогресу в сучасній математиці та науковими вподобаннями провідних Вчених Інституту математики НАН України через 100 років з часу заснування математичної інституції Української Академії наук.

У передньому слові до першої частини книги було наведено деякі факти зі 100-річної історії Інституту математики та набутків його засновника академіка Д. О. Ґраве. Варто підкреслити, що новітнє покоління вчених Інституту формувалося в атмосфері традицій закладеними науковими школами, які беруть свої джерела із часів зародження математичної інституції Академії наук України.

У цьому передньому слові наводиться список монографій, які вийшли у світ завдяки прагненням й творчості математиків Інституту за 30 років незалежної України. Ці праці показують напрями розвитку математичної думки за останні три десятиліття 100-річної історії Інституту математики[1]. З огляду на емоційну прихильність вчених до

[1] Перелік праць ІМ в XX ст. наведено у В. В. Строк. *Біографічний словник науковців: Матеріали з історії Інституту математики.* К.: Ін-т математики НАНУ. 2004.

освіти за цей період також була створена низка підручників із сучасних розділів математики.

Без сумніву, наведені нижче натхненні праці створені за часи незалежної України слугуватимуть своєрідним оберегом подальшого розвитку математики в Україні та Світі.

1991

[1] Gorbachuk V. I. and Gorbachuk M. L. *Boundary value problems for operator differential equations.* Vol. 48. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991, pp. xii+347.

[2] Kornejchuk N. P. *Exact constant in approximation theory.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991, p. 452.

[3] Samoilenko A. M. *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991, p. 314.

[4] Samoilenko Yu. S. *Spectral theory of families of self-adjoint operators.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991, p. 293.

[5] Skorohod A. V. *Random processes with independent increments.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991, p. 280.

[6] Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А. та Теличенко М. Е. *Движение твердого тела на струне и смежные задачи.* М.: Наука, 1991, с. 390.

[7] Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М. и Турбин А. Ф. *Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания.* Кишинев: Штиинца, 1991, с. 276.

[8] Митропольский Ю. А., Хома Г. П. и Громяк М. И. *Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа.* К: Наукова думка, 1991, с. 232.

[9] Нижник Л. П. *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.* К: Наукова думка, 1991, с. 232.

[10] Фущич В. И., Баранник Л. Ф. и Баранник А. Ф. *Полугрупповой анализ групп Галилея. Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.* К: Наукова думка, 1991, с. 300.

1992

[1] Gabriel P. and Roiter A. V. *Representations of finite-dimensional algebras.* Berlin: Springer-Verlag, 1992, p. 177.

[2] Березанский Ю. М. и Калюжный А. А. *Гармонический анализ в гиперкомплексных системах.* К: Наукова думка, 1992, с. 352.

[3] Бондар А. В. *Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений.* К: Наукова думка, 1992, с. 224.

[4] Дороговцев А. А. *Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве.* К: Наукова думка, 1992, с. 120.

[5] Кореневский Д. Г. *Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (алгебраические критерии).* К: Наукова думка, 1992, с. 146.

[6] Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф. и Лигун А. А. *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов.* К: Наукова думка, 1992, с. 304.

[7] Королюк В. С. и Свищук А. В. *Полумарковские случайные эволюции.* К: Наукова думка, 1992, с. 254.

[8] Митропольский Ю. А. и Гребенников Е.А. *Метод усреднения в исследовании резонансных систем.* М.: Наука, 1992, с. 221.

[9] Митропольский Ю. А., Неуен Ван Дао и Неуен Донг Ань. *Нелинейные колебания в квазилинейных динамических системах произвольного порядка.* К: Наукова думка, 1992, с. 344.

[10] Самойленко А. М. и Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* К: Наукова думка, 1992, с. 276.

[11] Самойленко А. М. и Ткач Б. Н. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* К: Наукова думка, 1992, с. 208.

[12] Трохимчук Ю. Ю. *Устранимые особенности аналитических функций.* К: Наукова думка, 1992, с. 234.

[13] Турбин А. Ф. и Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* К: Наукова думка, 1992, с. 208.

[14] Фущич В. И. и Жданов Р. З. *Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения.* К: Наукова думка, 1992, с. 288.

[15] Шевчук И. А. *Приближения многочленами и следы непрерывных на отрезке функций.* К: Наукова думка, 1992, с. 224.

1993

[1] Fushchych W., Shtelen W., and Serov N. *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993, p. 435.

[2] Korolyuk V. S. and Turbin A. F. *Mathematical foundations of the state lumping of large systems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993, pp. x+278.

[3] Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., and Martinyuk D. I. *Systems of evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993, p. 280.

[4] Sharko V. V. *Functions on manifolds.* Vol. 131. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, pp. x+193.

[5] Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., and Romanenko E. Yu. *Difference equations and their applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993, p. 358.

[6] Зелинский Ю. Б. *Многозначные отображения в анализе.* К: Наукова думка, 1993, с. 264.

[7] Королюк В. С. *Стохастичні моделі систем.* К: Наукова думка, 1993, с. 136.

[8] Королюк В. С. и Боровских Ю. В. *Случайные перманенты.* К.: Ин-т математики, 1993, с. 134.

[9] Кошляков В. Н. *Краткий курс теоретической механики. Кинематика, кинетика.* К.: Вища школа, 1993, с. 311.

[10] Кошманенко В. Д. *Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самоспряженых операторов.* К: Наукова думка, 1993, с. 176.

[11] Лучка А. Ю. *Проекционно-итеративные методы.* К: Наукова думка, 1993, с. 288.

[12] Лыкова О. Б. и Барис Я. С. *Приближенные интегральные многообразия.* К: Наукова думка, 1993, с. 314.

[13] Самойленко А. М. и Теплинский Ю. В. *Счетные системы дифференциальных уравнений.* К.: Ін-т математики НАН України, 1993, с. 308.

1994

[1] Borovskikh Yu. V. and Korolyuk V. S. *Random permanents.* Utrecht: VSP BV, 1994, p. 194.

[2] Dorogovtsev A. A. *Stochastic analysis and random maps in Hilbert space.* Utrecht: VSP BV, 1994, p. 110.

[3] Drozd Yu. A. та Kirichenko V. V. *Finite-dimensional algebras.* Berlin: Springer-Verlag, 1994, c. xiv+249.

[4] Fushchych W. L. and Nikitin A. G. *Symmetries of equations of quantum mechanics.* N.Y.: Alleron Press Inc., 1994, p. 480.

[5] Korolyuk V. S. and Borovskikh Yu. V. *Theory of U-statistics.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994, p. 552.

[6] Mitropolsky Yu. A. and Nguyen Van Dao. *Applied asymptotic methods in nonlinear oscillations.* Hanoi: Nat. Centre for Natural Sci. and Technology of Vietnam, 1994, p. 412.

[7] Портенко М. І. *Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами.* К.: Ін-т математики НАН України, 1994, с. 134.

1995

[1] Andrievskii V. V., Belyi V. I., and Dzjadyk V. K. *Conformal invariants in constructive theory of functions of complex variable.* World Federation Publishers Company, Atlanta, GA, 1995, pp. x+199.

[2] Berezanskij Yu. M. and Kondratiev Yu. G. *Spectral methods in infinite-dimensional analysis. Vol. 1.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, p. 576.

[3] Berezansky Y. M. and Kondratiev Y. G. *Spectral methods in infinite-dimensional analysis. Vol. 2.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, p. 432.

[4] Dzyadyk V. K. *Approximation methods for solutions of differential and integral equations.* VSP, Utrecht, 1995, pp. ii+325.

[5] Koroljuk V. S. and Swischuk A. V. *Evolution of systems in random media.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, pp. ii+352.

[6] Koroljuk V. S. and Swischuk A. V. *Semi-Markov random evolutions.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, p. 310.

[7] Mitropolsky Yu. A. and Lopatin A. K. *Nonlinear mechanics, groups and symmetry.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, pp. x+377.

[8] Petrina D. Ya. *Mathematical foundations of quantum statistical mechanics.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, p. 444.

[9] Samoilenko A. M. and Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995, pp. x+462.

[10] Stepanets A. I. *Classification and approximation of periodic functions.* Vol. 333. Dordrecht: KluwerAcad. Publ., 1995, pp. x+360.

[11] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. и Самойленко А. М. *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 318.

[12] Гаврилюк І. П. та Макаров В. Л. *Методи обчислень. Частина 1.* К.: Вища школа, 1995, с. 367.

[13] Гаврилюк І. П. та Макаров В. Л. *Методи обчислень. Частина 2.* К.: Вища школа, 1995, с. 431.

[14] Дзядык В. К. *Математичний аналіз. Т. I.* К.: Вища школа, 1995, с. 495.

[15] Кошляков В. Н. *Параметры Родрига-Гамильтона и их приложения в механике твердого тела.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 176.

[16] Луковский И. А. и Тимоха А. Н. *Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 400.

[17] Митропольский Ю. А. *Нелинейная механика: Асимптотические методы.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 396.

[18] Нестеренко Б. Б. и Новотарский М. А. *Мультипроцессорные системы.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 408.

[19] Новицкий В. В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 150.

[20] Новицкий В. В. та Ясінський В. В. *Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах.* К.: НТУУ «КПІ», 1995, с. 124.

[21] Петрина Д. Я. *Математические основы квантовой статистической механики.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 624.

[22] Портенко М. І. *Процеси дифузії в середовищах з мембранами.* К.: Ін-т математики, 1995, с. 200.

1996

[1] Berezanskij Yu. M., Sheftel Z. G., and Us G. F. *Functional analysis. Vol. 1.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, p. 423.

[2] Berezanskij Yu. M., Sheftel Z. G., and Us G. F. *Functional analysis. Vol. 2.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, p. 293.

[3] Kornejchuk N. P., Ligun A. A., and Babenko V. F. *Extremal properties of polynomials and splines.* N.Y.: Nova Sci. Publ., 1996, p. 433.

[4] Pereverzev S. V. *Optimization of methods for approximate solutions of operator equations.* N.Y.: Nova Sci. Publ., 1996, p. 352.

[5] Skorohod A. V. *Lectures on the theory of stochastic processes.* Utrecht: VSP BV, 1996, p. 184.

[6] Дороговцев А. А. *Стохастические уравнения с упреждением.* К.: Ін-т математики НАН України, 1996, с. 152.

[7] Жученко С. П., Жученко А. П., Костюк Г. Я. и Нестеренко Б. Б. *Исследование основ функционирования и разработки реконструктивных операций на полых органах пищеварительной системы методами иатематического моделирования.* Винницкий гос. универ., 1996, с. 385.

[8] Кузенний М. Ф. та Семко М. М. *Метагамільтонові групи та їх узагальнення.* К.: Ін-т математики НАН України, 1996, с. 232.

[9] Переверзев С. В. *Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений.* К.: Ін-т математики НАН України, 1996, с. 252.

1997

[1] Borovskikh Yu. V. and Koroljuk V. S. *Martingale approximation.* Utrecht: VSP BV, 1997, p. 322.

[2] Cercignani C., Gerasimenko V. V., and Petrina D. Ya. *Many-particle dynamics and kinetic equations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, pp. viii+244.

[3] Dorogovtsev A. Yu., Silvestrov D. S., Skorokhod A. V., and Yadrenko M. I. *Probability theory: collection of problems.* N.Y.: AMS, 1997, p. 348.

[4] Fushchych W. and Zhdanov R. *Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations.* Kyiv: Math. Ukraine Publ., 1997, p. 384.

[5] Gabriel P. and Roiter A. V. *Representation of finite-dimensional algebras.* Berlin: Springer-Verlag, 1997, p. 182.

[6] Gorbachuk M. L. and Gorbachuk V. I. *M. G. Krein's lectures on entire operators.* Birkhauser Verlag, Basel, 1997, pp. x+220.

[7] Mitropolsky Yu., Khoma G., and Gromyak M. *Asymptotic methods for investigating quasiwave equations of hyperbolic type.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, p. 206.

[8] Mitropolsky Yu. A. and Nguyen Van Dao. *Applied asymptotic methods in nonlinear oscillations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, p. 341.

[9] Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., and Fedorenko V. V. *Dynamics of one-dimensional maps.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, p. 272.

[10] Swischuk A. *Random evolutions and their applications. New trends.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, p. 200.

[11] Афромеев В. И., Протопопов А. А., Фильчакова В. П. и Яшин А. А. *Математические методы современной биомедицины и экологии.* Тула: Изд-во Тульского ун-та, 1997, с. 224.

[12] Барановський В. В., Барковська Н. В. та Лопатін О. К. *Математика для економістів. Теорія ймовірностей і математична статистика.* К.: Нац. акад. управління, 1997, с. 255.

[13] Левищенко С. С. и Кузенный Н. Ф. *Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп.* К.: Ін-т математики НАН України, 1997, с. 230.

[14] Митропольский Ю. А. *Нелинейная механика: Одночастотные колебания.* К.: Ін-т математики НАН України, 1997, с. 384.

1998

[1] Berezansky Yu. M. and Kalyuzhnyi A. A. *Harmonic analysis in hypercomplex systems.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. x+483.

[2] Eidelman S. D. and Zhitarashu N. V. *Parabolic boundary-value problems.* Basel: Birkhauser-Verlag, 1998, p. 298.

[3] Kuzhel A. V. and Kuzhel S. A. *Regular extensions of Hermitian operators.* Utrecht: VSP, 1998, pp. xii+273.

[4] Андриевский В. В., Белый В. И. и Дзядык В. К. *Комфорные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного.* К.: Наук. думка, 1998, с. 224.

[5] Гусак Д. В. *Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів.* К.: Ін-т математики НАН України, 1998, с. 320.

[6] Макаров В. Л. и Хлобыстов В. В. *Основы теории полиномиального операторного интерполирования.* К.: Ін-т математики НАН України, 1998, с. 278.

[7] Марчук В. А. и Нестеренко Б. Б. *Асинхронные методы паралельных вычислений.* К.: Ін-т математики НАН України, 1998, с. 308.

[8] Мосеенков В. Б. *Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости.* К.: Ін-т математики НАН України, 1998, с. 280.

[9] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* К.: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 1998, с. 296.

[10] Самойленко А. М. та Петришин Р. І. *Багаточастотні коливання нелінійних систем.* К.: Ін-т математики НАН України, 1998, с. 340.

1999

[1] Koroljuk V. S. and Koroljuk V. V. *Stochastic models of systems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, pp. xii+185.

[2] Koshmanenko V. D. *Singular quadratic forms in perturbation theory.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, pp. viii+308.

[3] Kuzhel A. V. and Kuzhel S. A. *Regular extensions of Hermitian operators.* Utrecht: VSP, 1999, pp. xii+273.

[4] Lubashenko V. V. *Squared Hopf algebras.* Vol. 142. Mem. Amer. Math. Soc., 1999, pp. x+180.

[5] Ostrovskyi V. L. and Samoilenko Yu. S. *Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras. I. Representations by bounded operators.* Amsterdam: Harwood Academic Publishers, 1999, pp. iv+261.

[6] Барановський В. В., Барковська Н. В. та Лопатін О. К. *Теорія ймовірностей і математична статистика. 2-е вид.* К.: Нац. акад. управління, 1999, с. 450.

[7] Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А. и Рябов Ю. А. *Введение в резонансную аналитическую динамику. 2-е вид.* М.: Янус-К, 1999, с. 302.

[8] Мазко А. Г. *Локализация спектра и устойчивость динамических систем.* К.: Ін-т математики НАН України, 1999, с. 216.

[9] Самойленко А. М., Лапшицкий В. Н. и Кенжебаев К. К. *Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач.* К.: Ін-т математики НАН України, 1999, с. 220.

2000

[1] Mitropolsky Yu. A. and Berezovsky A. A. *Free and non-local boundary problems in metallurgy, medical, ecology and material science: mathematical models and constructive methods of solution.* K.: Institute of Mathematics, 2000, p. 265.

[2] Ronto M. and Samoilenko A. M. *Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000, pp. x+455.

[3] Swischuk A. *Random evolutions and their applications. New trends.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 294.

[4] Королюк В. С. и Свищук А. В. *Эволюционные стохастические системы. Алгоритмы усреднения и диффузионной апроксимации.* К.: Ін-т математики НАН України, 2000, с. 344.

[5] Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. и Янович Л. А. *Операторное интерполирование.* К.: Наук. думка, 2000, с. 406.

[6] Самойленко А. М., Борисенко С. Д., Матараццо Дж., Тоскано Р. та Ясінський В. В. *Диференціальні моделі. Стійкість.* К.: Вища школа, 2000, с. 330.

[7] Самойленко А. М., Шкіль М. І. та Яковець В. П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням.* К.: Вища школа, 2000, с. 294.

2001

[1] Kerler T. and Lyubashenko V. V. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners.* Vol. 1765. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001, pp. vi+379.

[2] Kochubei A. N. *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields.* N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2001, pp. xii+316.

[3] Samoilenko A. M., Borisenko S., Cattani C., Matarazzo G., and Yasinsky V. *Differential models: Stability, inequalities and estimates.* K: Naukova Dumka, 2001, p. 328.

[4] Samoilenko A. M., Borisenko S., Cattani C., and Yasinsky V. *Differential models. Construction, representations and applications.* K: Naukova Dumka, 2001, p. 156.

[5] Stepanets A. I. *Uniform approximations by trigonometric polynomials.* Berlin: De Gruyter, 2001, p. 483.

2002

[1] Gerasimenko V. I., Malyshev P. V., and Petrina D. Ya. *Mathematical foundations of classical statistical mechanics. (Second ed.)* Vol. 8. Taylor & Francis, London, 2002, pp. x+338.

[2] Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D. *Chaotic synchronization: Applications to living systems.* Singapure: World Sci. Publ., 2002, p. 428.

[3] Skorokhod A. V., Hoppensteadt F. C., and Salehi H. *Random perturbation methods with applications in science and engineering.* N.Y.: Springer-Verlag, 2002, pp. xii+488.

[4] Голуб А. П. *Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде.* К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 222.

[5] Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А. и Темченко М. Е. *Исследование устойчивости сложных механических систем.* М.: Наука, 2002, с. 299.

[6] Лагно В. І., Спічак С. В. та Стогній В. І. *Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу.* К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 360.

[7] Самойленко А. М. та Прикарпатский Я. А. *Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх застосування.* Т. 41. К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 237.

[8] Сосницький С. П. *Функція дії за Гамільтоном та стійкість руху консервативних систем.* К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 228.

[9] Степанец А. И. *Методы теории приближений, I.* К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 427.

[10] Степанец А. И. *Методы теории приближений, II.* К.: Ін-т математики НАН України, 2002, с. 468.

2003

[1] Mitropolskii Yu. A. and Nguyen Van Dao. *Lectures on Asymptotic Methods of Nonlinear Dynamics.* Hanoi: Vietnam National Univ. Publ. House, 2003, p. 503.

[2] Mitropolskii Yu. A., Samoilenko A. M., and Kulik V. L. *Dichotomies and Stabiliti in Nonautonomous Linear Systems.* Vol. 14. London: Taylor & Francis, 2003, pp. xx+368.

[3] Samoilenko A. M. and Teplinskii Yu. V. *Countable systems of differential equations.* VSP, Utrecht, 2003, pp. viii+287.

[4] Бабенко В. Ф., Корнейчук М. П., Кофанов Б. О. та Пічугов С. О. *Нерівності для похідних та їх застосування.* К: Наукова думка, 2003, с. 618.

[5] Згуровский М. З., Мельник В. С. и Новиков О. Н. *Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями.* К: Наукова думка, 2003, с. 346.

[6] Новицкий В. В. и др. *Актуальные проблемы устойчивого развития.* К: Знание, 2003, с. 324.

[7] Самойленко А. М., Кривошея С. А. та Перестюк М. О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник для студентів вузів.* К: Либідь, 2003, с. 504.

[8] Самойленко А. М., Перестюк М. О. та Парасюк I. О. *Диференціальні рівняння: підручник (2-ге вид.)* К: Либідь, 2003, с. 600.

[9] Шлепаков Л. Н. та Вовкодав Н. Г. *Численно-аналитические методы решения поисковых задач.* К.: Ін-т математики НАН України, 2003, с. 232.

2004

[1] Boichuk A. A. and Samoilenko A. M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Utrecht: VSP, 2004, pp. xiv+317.

[2] Bratteli O., Jorgensen P. E. T., and Ostrovskyi V. *Representation theory and numerical AF-invariants. The representations and centralizers of certain states on O_d.* Memoirs AMS, 2004, p. 178.

[3] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., and Kochubei A. N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Basel: Birkhäuser Verlag, 2004, pp. x+387.

[4] Gighman I. I. and Skorokhod A. V. *The theory of stochastic processes. V.1.* Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[5] Gighman I. I. and Skorokhod A. V. *The theory of stochastic processes. V.2.* Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[6] Grebenikov E. A., Mitropolsky Yu. A., and Ryabov Yu. A. *Asymptotic methods in resonance analytical dynamics.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, pp. xx+255.

[7] Samoilenko A. M. and Petryshyn R. I. *Multifrequency oscillations of nonlinear systems.* Vol. 567. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004, p. 324.

[8] Гаврилюк И. П. и Макаров В. Л. *Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности.* К.: Ін-т математики НАН України, 2004, с. 500.

[9] Гавриэль П. и Ройтер А.В. *Представление конечномерных алгебр.* М.: ВИНИТИ, 2004, с. 360.

[10] Лагно В. И., Спичак С.В. и В.I. Стогний. *Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа.* М.-Ижевск: РХД, 2004, с. 564.

[11] Новотарський М. А. та Несторенко Б. Б. *Штучні нейронні мережі: обчислення.* К.: Ін-т математики НАН України, 2004, с. 408.

[12] Самойленко А. М. та Петришин Р. I. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.* К: Наукова думка, 2004, с. 474.

[13] Слюсарчук В. Ю. *Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь.* Рівне: ВНУВГП, 2004, с. 664.

[14] Строк В. В. *Біографічний словник науковців (1934-2004). Матеріали з історії Інституту математики.* Т. 54. К.: Ін-т математики НАН України, 2004, с. 124.

2005

[1] Koroliuk V. S. and Limnios N. *Stochastic systems in merging phase space.* World Sci. Publ., 2005, p. 330.

[2] Skorokhod A. V. *Basic principles and asymptotics of probability theory.* Berlin: Springer-Verlag, 2005, p. 282.

[3] Stepanets A. I. *Methods of approximation theory.* Berlin: De Gruyter, 2005, p. 928.

[4] Бондаренко В. М. *Зображення гельфондових графів.* К.: Ін-т математики НАН України, 2005, с. 228.

[5] Митропольський Ю. О. *Методи нелінійної механіки: спец. курс. Навч. посібник.* К: Наукова думка, 2005, с. 528.

[6] Слюсарчук В. Ю. *Рівняння з істотно нестійкими розв'язками.* Рівне: ВНУВГП, 2005, с. 304.

[7] Фущич В. І. *Вибрані праці.* К: Наукова думка, 2005, с. 448.

2006

[1] Bondarenko V. M. *Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases.* Vol. 63. К.: Ін-т математики НАН України, 2006, p. 168.

[2] Gavrilyuk I. P., Lukovsky I. A., Makarov V. M., and Timokha A. N. *Evolutional Problems of the Contained Fluid.* К.: Ін-т математики НАН України, 2006, p. 233.

[3] Sergeichuk V. V. *Canonical matrices and related questions.* Vol. 57. К.: Ін-т математики НАН України, 2006, p. 326.

[4] Антонюк А. В. и Антонюк А. В. *Нелинейные эффекты в задачахрегулярности для бесконечномерных эволюций классических гиббсовских моделей.* К: Наукова думка, 2006, с. 208.

[5] Власенко И. Ю., Максименко С. И. и Полулях Е. О. *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий.* Т. 61. К.: Ін-т математики НАН України, 2006, с. 363.

[6] Коренівський Д. Г. *Дестабілізуючий ефект параметричного білого шуму в неперервних та дискретних динамічних системах.* К.: Ін-т математики НАН України, 2006, с. 112.

[7] Самойленко А. М., Строк В. В. та Сукретний В. І. *Хроніка – 2005. Сторінки з історії Інституту математики.* Т. 60. К.: Ін-т математики НАН України, 2006, с. 236.

[8] Самойленко Ю. И. *Проблемы и методы физической кибернетики.* К.: Ін-т математики НАН України, 2006, с. 664.

[9] Троценко В. А. *Колебания жидкости в подвижнiх емкостях с перегородками.* К.: Iн-т математики НАН України, 2006, с. 324.

2007

[1] Гусак Д. В. *Граничнi задачi для процесiв з незалежними приростами в теорiї ризику.* К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 324.

[2] Дороговцев А. А. *Мерозначные и стохастические потоки.* К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 289.

[3] Москалева Ю. П. и Самойленко Ю. С. *Введение в спектральную теорию графов.* Киев: Центр учебной литературы, 2007, с. 116.

[4] Муратов М. А. и Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.* К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 390.

[5] Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М. и Скрипник Н. В. *Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью.* Т. 67. К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 428.

[6] Ребенко О. Л. *Основи сучасної теорiї взаємодiючих квантових полiв.* К: Наукова думка, 2007, с. 539.

[7] Самойленко А. М., Кривошея С. А. и Перестюк Н. А. *Дифференциальные уравнения. Практический курс. Учеб. пособие (3-е изд.)* М.: Высшая школа, 2007, с. 383.

[8] Степанец А. И., Рукасов В. И. та Чайченко С. О. *Приближения суммами Валле Пуссена.* К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 386.

[9] Стороженко В. А. *Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел.* К.: Iн-т математики НАН України, 2007, с. 229.

2008

[1] Bespalov Yu., Lyubashenko V., and Manzyuk O. *Pretriangulated A_∞-categories.* K.: Institute of math. NANU, 2008, p. 598.

[2] Drozd Yu. A. *Vector bundles over projective curves.* Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008, pp. iv + 49.

[3] Dzyadyk V. K. and Shevchuk I. A. *Theory of uniform approximation of functions by polynomials.* Berlin: Walter de Gruyter, 2008, p. 482.

[4] Petrina D. Ya. *Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy.* K.: Institute of math. NANU, 2008, p. 498.

[5] Бахтин А. К., Бахтина Г. П. и Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы комплексного анализа.* К.: Iн-т математики НАН України, 2008, с. 308.

[6] Мельниченко И. П. и Плакса С. А. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля.* К.: Iн-т математики НАН України, 2008, с. 230.

[7] Новицький В. В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах.* К.: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 252.

[8] Новицький В. В. *Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки.* К.: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 124.

[9] Самойленко А. М. та Теплінський Ю. В. *Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах.* Т. 72. К.: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 496.

[10] Трохимчук Ю. Ю. *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.* Т. 70. К.: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 539.

[11] Шлепаков Л. Н. и Вовкодав Н. Г. *Оптимальный поиск движущихся объектов в дискретной области.* К.: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 144.

2009

[1] Faltinsen O. M. and Timokha A. N. *Sloshing.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, p. 608.

[2] Gusak D., Kukush A., Kulik A., Mishura Y., and A. Pilipenko. *Theory of Stochastic Processes with Applications to Financial Mathematics and Risk Theory.* Springer, 2009, p. 375.

[3] Kochubei A. N. *Analysis in positive characteristic.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, pp. x+210.

[4] Petrina D. Ya. *Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy.* Vol. 48. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co., 2009, pp. xiv+296.

[5] Polulyakh E. A. and Yurchuk I. Yu. *On the pseudo-harmonic functions defined on a disk.* Vol. 80. K.: Ін-т математики НАН України, 2009, p. 151.

[6] Гончаренко Я. В., Микитюк І. О. та Працьовитий М. В. *Системи числення з надлишковими наборами цифр.* К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009, с. 160.

[7] Самойленко А. М. та Станжицький О. М. *Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями.* К: Наукова думка, 2009, с. 336.

2010

[1] Makarov V. L., Khlobystov V. V., and Yanovich L.A. *Methods of Operator Interpolation.* К.: Ін-т математики НАН України, 2010, p. 517.

[2] Pankov M. *Grassmannians of classical building.* World Sci. Publ., 2010, p. 224.

[3] Дрозд Ю. А. *Векторні розшарування над проективними кривими.* Т. 81. К.: Ін-т математики НАН України, 2010, с. 124.

[4] Коренівський Д. Г. *Стійкість розв'язків систем різницевих рівнянь при стохастичних збуреннях їх коефіцієнтів. Алгебраїчні критерії.* К.: Ін-т математики НАН України, 2010, с. 210.

[5] Луковский И. А. *Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью.* К: Наукова думка, 2010, с. 408.

[6] Михайлец В. А. и Мурач А. А. *Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи.* К.: Ін-т математики НАН України, 2010, с. 372.

[7] Шарко В. В. *Топологічні аспекти многовидів некомутативної геометрії.* К.: Ін-т математики НАН України, 2010, с. 340.

2011

[1] Gavrilyuk I., Makarov V., and Vasylyk V. *Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations.* Basel: Springer, 2011, p. 180.

[2] Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Hermann M., and Kutniv M. V. *Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs.* Basel: Springer, 2011, p. 247.

[3] Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., and Skripnik N. V. *Differential equations with impulse effects.* Vol. 40. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2011, pp. xiv+307.

[4] Samoilenko A. M. and Stanzhytskyi O. M. *Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations.* Vol. 78. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011, pp. x+312.

[5] Боголюбов О. М. *Микола Миколайович Боголюбов. Життєвий шлях і наукова діяльність.* К.: Ін-т математики НАН України, 2011, с. 304.

[6] Василик В. Б., Драгунов Д. В. та Ситник Д. О. *Функціонально-дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування.* К: Наукова думка, 2011, с. 175.

[7] Гусак Д. В. *Процеси з незалежними приростами в теорії ризику.* К.: Ін-т математики НАН України, 2011, с. 544.

[8] Дороговцев А. А. и Изюмцева О. А. *Локальные времена гаусовских процессов.* Lambert Acad. Publ., 2011, с. 152.

[9] Коляда С. Ф. *Топологічна динаміка: мінімальність, ентропія та хаос.* К.: Ін-т математики НАН України, 2011, с. 340.

[10] Лущик У. Б. та Новицький В. В. *Сучасні медичні технології в аналітичній ангіології. Навчальний посібник.* Київ: Істина, 2011, с. 135.

[11] Муратов М. А., Островский В. Л. и Самойленко Ю. С. *Конечномерный линейный анализ I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L). Навчальний посібник.* К.: Центр учбової літератури, 2011, с. 153.

2012

[1] Cercignani C., Gerasimenko V., and Petrina D. *Many-particle dynamics and kinetic equations. (Second ed.)* N.Y.: Springer, 2012, pp. viii+244.

[2] Rebenko A. L. *Theory of interacting quantum fields.* Walter de Gruyter GmbH&Co RG, 2012, p. 568.

[3] Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., and Parasyuk I. O. *Differential equations: Textbook.* Almaty, 2012, p. 464.

[4] Зелинский Ю. Б. *Выпуклость. Избранные главы.* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 280.

[5] Митропольский Ю. А. *Избранные труды. В 2 томах.* К: Наукова думка, 2012, c. 504.

[6] Муратов М. А., Островский В. Л. и Самойленко Ю. С. *Конечномерный линейный анализ I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (H). Навчальний посібник.* К.: Центр учбової літератури, 2012, c. 174.

[7] Нестеренко Б. Б. та Новотарський М. А. *Формальні засоби моделювання паралельних процесів та систем.* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 334.

[8] *Олександр Іванович Степанець. Бібліографічний довідник (науково-інформаційне видання).* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 142.

[9] Пелюх Г. П. та Шарковский А. Н. *Метод инвариантов в теории функциональных уравнений.* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 250.

[10] Рибалкіна Т. В. *Топологічна класифікація афінних відображень.* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 153.

[11] Романюк А. С. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных.* К.: Ін-т математики НАН України, 2012, c. 353.

[12] Самойленко А. М., Луковський І. О. та Коренівський Д. Г. *Розвиток досліджень математичних проблем механіки в Інституті математики НАН України (1934 рік – перше десятиліття XXI сторіччя).* К.: ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2012, c. 69+40.

2013

[1] Samoilenko A. M. and Teplinsky Yu. V. *Elements of mathematical theory of evolutionary equations in Banach spaces.* Vol. 86. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013, pp. x+397.

[2] Samoylenko A. M., Krivoşeya S. A., and Perestyuk N. A. *Diferansiyel denklemler ve çözügmlü problemler. I.* Sakarya: Sakarya Üniversitesi Basımevi, 2013.

[3] Барановський О. М., Працьовитий М. В. та Торбін Г. М. *Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування.* К: Наукова думка, 2013, c. 288.

[4] Бороденко Н. Д., Карупу О. В., Шибицька Н. М. та Горюнов А. С. *Спецглави математики: інтегральні і дискретні перетворення та їх застосування.* К.: НАУ, 2013, c. 240.

[5] Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р. и Севостьянов Е. А. *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева.* К: Наукова думка, 2013, c. 304.

[6] Кореневський Д. Г. *Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при возмущениях их коэффициентов белым и цветным шумами.* К.: Ін-т математики НАН України, 2013, с. 222.

[7] Кошманенко В.Д. та Дудкін М. Є. *Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів.* К.: Ін-т математики НАН України, 2013, с. 320.

[8] Пелюх Г. П. и Шарковский А. Н. *Метод инвариантов в теории функциональных уравнений.* К.: Ін-т математики НАН України, 2013, с. 255.

[9] Працьовитий М. В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування.* Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013, с. 280.

[10] Працьовитий М. В. *Конічні перерізи у різних системах координат.* Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013, с. 160.

[11] Шарковский А. Н. *Аттракторы траекторий и их бассейны.* К: Наукова думка, 2013, с. 320.

2014

[1] Mikhailets V. A. and Murach A. A. *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems.* Vol. 60. Berlin: De Gruyter, 2014, pp. xii+297.

[2] Ostrovski V. L. and Samoilenko Yu. S. *Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras (Second ed.)* Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2014, p. 262.

[3] Pilipenko A. *An introduction to stochastic differential equations with reflections.* Potsdam: Universitätsverlag, 2014, pp. ix+75.

[4] Березанський Ю. М., Ус Г. Ф. та Шефтель З. Г. *Функціональний аналіз. Підручник.* Львів: І. Е. Чижиков, 2014, с. 558.

[5] Власенко И. Ю. *Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения.* К.: Ін-т математики НАН України, 2014, с. 225.

[6] Герасименко В. И., Петрина Д. Я. и Малышев П. В. *Математические основы классической статистической механики (изд. 2).* М.: ЛИБРОКОМ, 2014, с. 272.

[7] Петрина Д. Я. *Квантовая теория поля (изд. 2).* М.: Едиториал УРСС, 2014, с. 250.

[8] Петрина Д. Я. *Математические основы квантовой статистической механики. Изд. 2.* М.: Едиториал УРСС, 2014, с. 400.

[9] Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения с непрерывным аргументом.* К.: Ін-т математики НАН України, 2014, с. 347.

2015

[1] Kulik A. M. *Introduction to ergodic rates for Markov chains and processes.* Potsdam: Universitätsverlag Potsdam, 2015, p. 138.

[2] Lukovsky I. A. *Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid.* Berlin: De Gruyter, 2015, pp. xvi+394.

[3] Lyubashenko V. *Curved cooperads and homotopy unital A_∞-algebras.* L'viv: VNTL Publ., 2015, pp. viii+196.

[4] Samoylenko A. M., Krivoşeya S. A., and Perestyuk N. A. *Diferansiyel denklemler ve çözümlü problemler. II.* Sakarya: Sakarya Üniv. Basımevi, 2015, p. 298.

[5] Zuyev A. L. *Partial stabilization and control of distributed parameter systems with elastic elements.* N.Y.: Cham-Heidelberg-New York. Springer, 2015, p. 232.

[6] Самойленко А. М., Кенжебаєв К., Станжицький О. М. та Таран Є. Ю. *Математичне моделювання: Підручник.* К: Наукова думка, 2015, с. 327.

2016

[1] *Anatolii V. Skorokhod. Selected Works.* Switzerland: Springer Int. Pub., 2016, p. 390.

[2] Boichuk A. A. and Samoilenko A. M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (Second ed.)* Vol. 59. Berlin: De Gruyter, 2016, pp. xvi+296.

[3] Koshmanenko V. D. and Dudkin M. Ye. *The method of rigged spaces in singular perturbation theory of self-adjoint operators.* Birkhäuser: Springer, 2016, pp. xx+237.

[4] Kurdachenko L. A., Pyrka A. A., Semko N. N., and Subbotin I. Ya. *The survey on infinite froups: a guide on some classical areas.* Vol. 103. К.: Ін-т математики НАН України, 2016, p. 175.

[5] Nesterenko B. B. and Novotarskyi M. A. *Formal means of the simulation of parallel processes and systems.* К.: Akademperiodyka, 2016, p. 194.

[6] Кошманенко В. Д. *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту.* К: Наукова думка, 2016, с. 288.

[7] Мазко О. Г. *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств.* К.: Ін-т математики НАН України, 2016, с. 332.

2017

[1] Burban I. and Drozd Yu. A. "Maximal Cohen-Macaulay modules over non-isolated surface singularities and matrix problems". *Mem. Amer. Math. Soc.* 248:1178 (2017), pp. vii+114.

[2] Cherniha R. and Davydovych V. *Nonlinear reaction-diffusion systems – conditional symmetry, exact solutions and their applications in biology.* Springer, Cham, 2017, pp. vii+158.

[3] Kulik A. *Ergodic Behavior of Markov Processes.* de Gruyter, Berlin/Boston, 2017, p. 257.

[4] Гречко А. Л. та Пелюх Г. П. *Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь.* К.: КПІ ім. І. Сікорського: Політехніка, 2017, с. 245.

2018

[1] Cherniha R., Serov M., and Pliukhin O. *Nonlinear reaction-diffusion-convection equations: Lie and conditional symmetry, exact solutions, and their applications.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2018, pp. xix+240.

[2] Kosyak A. V. *Regular, quasi-regular and induced representations of infinite-dimensional groups.* Vol. 29. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2018, pp. xxxii+555.

2019

[1] Avrutin V., Gardini L., Sushko I., and Tramontana F. *Continuous and discontinuous piecewise-smooth one-dimensional maps: invariant sets and bifurcation structures.* World Sci. Publ., 2019, p. 648.

[2] Березанський Ю. М. та Дудкін М. Є. *Матриці Якобі і проблема моментів.* К.: Ін-т математики НАН України, 2019, с. 504.

[3] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. и Самойленко А. М. *Нормально разрешимые краевые задачи.* К: Наукова думка, 2019, с. 628.

[4] Луковський І. О., Солодун О. В. та Тимоха О. М. *Математичні проблеми нелінійної динаміки конічних резервуарів з рідиною.* К.: Ін-т математики НАН України, 2019, с. 224.

2020

[1] Raynovskyy I. A. and Timokha A. N. *Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications.* CRC Press/Taylor & Francis Group, 2020, p. 170.

[2] Шарковский А. Н. и Романенко Е. Ю. *Идеальная турбулентность: фрактальные и стохастические аттракторы в идеализированных моделях математической физики.* К.: Ін-т математики НАН України, 2020, с. 179.

[3] Шарковський О. М. та Романенко О. Ю. *Ідеальна турбулентність: фрактальні і стохастичні атрактори траєкторій в ідеалізованих моделях математичної фізики.* К.: Ін-т математики НАН України, 2020, с. 171.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 425–455

Stochastic flows and measure-valued processes

A. A. Dorogovtsev

Abstract. This article presents results about one-dimensional Brownian stochastic flows obtained in the department of the random processes during the last 15 years. One-dimensional stochastic flows describe the mutual motion of diffusion particles on the real line. As a good example of such flows, the flows of solutions to SDE can serve. But there exists a large set of flows that can not be obtained from SDE because of the possibility for particles to coalesce. The survey is concentrated mainly on such flows. Here we discuss questions of two types. The first group is devoted to traditional SDE problems like large deviations, discrete approximations, Krylov–Veretennikov expansion, Girsanov theorem. We present corresponding results which have new features due to coalescence phenomena. Another question is related to point structure, which arises in a coalescing set of Brownian motions. Here are the properties of corresponding point measures are discussed.

Анотація. У цій статті представлено результати щодо одновимірних броунівських стохастичних потоків, які було отримано у відділі випадкових процесів упродовж останніх п'ятнадцяти років. Одновимірні стохастичні потоки описують взаємний рух частинок, які дифундують на дійсній прямій. Одним із прикладів таких потоків є потік розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Але є багато інших прикладів потоків, які не можуть бути отримані зі стохастичного диференціального рівняння через можливість злиття частинок. Огляд переважно присвячено таким потокам. Питання, які розглядаються, можна розділити на дві групи. Перша містить твердження, традиційні для теорії стохастичних рівнянь, такі як принцип великих відхилень, різницева апроксимація, розклад Крилова – Веретеннікова, теорема Гірсанова. Відповідні теореми містять нові умови, які пов'язані з можливістю склеювання частинок. Інша група питань пов'язана зі структурою множини склеювання. В огляді також наведено відповідні властивості точкових мір, які при цьому виникають.

2010 Mathematics Subject Classification: 60H10, 60H40, 60G57

Keywords: Stochastic flow, stochastic differential equation, random point measure, stochastic semi-group, random dynamical system

Introduction

This article contains results devoted to stochastic flows on the real line and related point processes. This subject is actively studied in the department of random processes from 2005 to 2021 years. Here some statements are collected in order to describe the problems which arise in this field and present approaches developed in the department. So the paper is organized as follows. The first four sections are based on the previous survey [8], which was written for COSA. Other sections contain material, obtained after [8] was written.

1. Some properties of stochastic flows

Let $(\mathfrak{X}, \rho)$ be a complete separable metric space and $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a complete probability space.

Definition 1.1. *A measurable map $\varphi : \mathfrak{X} \times \Omega \to \mathfrak{X}$ is called a* ***random map*** *in $\mathfrak{X}$.*

Definition 1.2. *A family $\{\varphi_{s,t}; 0 \le s \le t < +\}$ of random maps in $\mathfrak{X}$ is referred to as a* ***stochastic flow*** *if the following conditions hold:*

1) *for arbitrary $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$, maps $\varphi_{s_1,s_2}, \ldots, \varphi_{s_{n-1},s_n}$ are independent;*
2) *for any $s, t, r \ge 0$, maps $\varphi_{s,t}$ and $\varphi_{s+r,t+r}$ are equidistributed;*
3) *for any $0 \le s_1 \le s_2 \le s_3$ and $u \in \mathfrak{X}$ holds:*

$$\varphi_{s_1,s_3(u)} = \varphi_{s_2,s_3}\varphi_{s_1,s_2}(u);$$

4) *for any $s \ge 0$ and $u \in \mathfrak{X}, \varphi_{s,s}(u) = u$.*

Remark 1.3. Note that due to the separability of $\mathfrak{X}$ the superposition of random maps is defined correctly. Furthermore, a superposition of independent random maps does not depend on the choice of their modifications (up to a modification).

Below we consider point motions or trajectories of individual particles in a stochastic flow, i.e., random processes of the form

$$x(u, t) = \varphi_{0,t}(u), \quad u \in \mathfrak{X},\ t \ge 0.$$

If this does not lead to confusion, sometimes x will also be called a stochastic flow. One of the most famous examples of a stochastic flow is the flow of diffeomorphisms corresponding to a stochastic differential equation (SDE) with smooth coefficients. Let $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$ with the usual metric. Consider the equation

$$dz(t) = a(z(t))dt + b(z(t))dw(t), \tag{1.1}$$

where w is a standard $\mathbb{R}^n$-valued Wiener process, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ are continuously differentiable functions with bounded derivatives. It is well known [29], that this equation generates the stochastic flow $\{\varphi_{s,t}; 0 \le s \le t < +\infty\}$ in $\mathbb{R}^n$, consisting of random diffeomorphisms, such that for any $u \in \mathbb{R}^n, s \ge 0, \varphi_{s,t}(u)$ is the solution of the Cauchy problem for (1.1), which started at the point u at time s. In addition to the smoothness of its component maps, the flow corresponding to Equation (1.1) has a number of "good" properties. For example, for the solutions of Equation (1.1) are known large deviations, Girsanov's theorem and the presentation of Krylov-Veretennikov or related Chen-Shrishart's formula [1]. All of these properties are due to the fact that the flow is obtained from the Wiener process via Itô's map, generated by the vector fields corresponding to the coefficients a and b. Thus, random maps forming the flow inherit properties of the Wiener process. In general, it is not the case. The stochastic flow can be organized in a more complicated way. As an example of the flow with more rich structure, one can consider the Harris flows.

Let $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous positive definite function.

Definition 1.4 ([24, 33]). *The **Harris flow** with ψ being its local characteristic is a family $\{x(u,t); u \in \mathbb{R}\}$ of Wiener martingales with respect to the joint filtration such that*

1) *for every $u \in \mathbb{R}$, $x(u,0) = u$;*
2) *for any $u \le v$ and $t \ge 0, x(u,t) \le x(v,t)$;*
3) *the joint characteristic of $x(u,\cdot)$ and $x(v,\cdot)$ has the form*

$$d\big\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\big\rangle(t) = \psi(x(u,t) - x(v,t))dt.$$

Here we do not consider the family $\{\varphi_{s,t}; 0 \le s \le t\}$, but a set of the one-point motions $\{x(u,t); u \in R, \ge 0\}$. Roughly speaking, the Harris flow describes the joint evolution of an ordered family of Brownian particles interacting with each other.

Remark 1.5. For a smooth function ψ the Harris flow can be constructed as a solution to SDE. Let W be a Wiener sheet on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (random Gaussian measure with mean zero, independent values on disjoint sets and structural measure equal to the Lebesgue measure). For a function f from the Schwartz space of rapidly decreasing infinitely differentiable functions, consider the following equation

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x(u,t) - p)\, W(dp, dt). \tag{1.2}$$

This equation generates a flow of random diffeomorphisms in $\mathbb{R}$ [29]. In addition, for fixed $u, x(u,\cdot)$ is a continuous square-integrable martingale with respect to the filtration generated by W, and

$$d\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle(t) = \int_{\mathbb{R}} f\big(x(u,t)-p\big) f\big(x(v,t)-p\big) dp\, dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f\big(x(u,t)-x(v,t)-q\big) f(-q)\, dq\, dt = \psi\big(x(u,t)-x(v,t)\big) dt.$$

If $\psi(0) = 1$, then for every $u, x(u,\cdot)$ is a Wiener process due to Levy's theorem [26]. The ordering of x with respect to the spatial variable follows from the smoothness of x. Thus x is a Harris flow. Note that the function ψ is smooth now.

One can, however, establish the existence of the Harris flow for a broader class of functions ψ. For example, it is known [24, 33], that the Harris flow exists for a function ψ, which is continuous on R and satisfies the Lipschitz condition outside any neighborhood of 0. The resulting flow may already have novel properties. In particular, it is known that under the condition

$$\int_0^{\varepsilon} \big(1-\psi(u)\big)^{-1} u du < +\infty$$

particles started from different points of the line, coalesce with each other. In this case, the maps $x(\cdot, t)$ are not smooth in the space variable. The noted property is shown most clearly in the Arratia flow.

The Arratia flow is a Harris flow corresponding to the discontinuous function

$$\psi = \mathbb{1}_{\{0\}}.$$

Roughly speaking, the Arratia flow consists of independent Wiener processes, coalescing at the time of the meeting. It is known [31, 33, 5] that in every positive moment of time, any interval in the Arratia flow turns into a finite number of points. Thus, the maps $x(\cdot, t)$ are step functions with a finite number of jumps on each interval.

From the above examples, we can draw the following conclusions. First, under the same distributions of one-point motions (they can all be Wiener processes) flows can have completely different properties with respect to the spatial variable. Secondly, in some cases, the flow is arranged by an external Gaussian noise and almost automatically inherits its properties, and in other cases only one-point motions are diffusion processes and the entire flow no longer generates a Gaussian noise. Since the Arratia flow delivers one of the most striking examples of the latter situation, the next question is interesting. How the properties of the Gaussian white noise and, therefore, solutions of stochastic differential equations with smooth coefficients are inherent in the Arratia flow? The second paragraph of the article is devoted to answering this question.

2. Gaussian properties of the Arratia flow

Let $\{x(u,t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ be an Arratia flow. As mentioned in the previous paragraph, this flow is composed of independent Wiener processes, coalescing at the time of the meeting. The construction of the stochastic integral with respect to the Arratia flow is based on the fact that the processes started from a certain interval, coalesce during a finite time. Formally, this property can be described as follows. Let

$$\lambda = \{0 = u_0 < \ldots < u_n = 1\}$$

be a partition of $[0;1]$. Denote

$$\tau_0 = 1, \qquad \tau_k = \min\bigl\{1, s : x(u_k, s) = x(u_{k-1}, s)\bigr\},\ k = 1, \ldots, n.$$

Then the sum

$$S_\lambda = \sum_{k=0}^{n} \tau_k$$

can be regarded as a total time of a free motion of particles that started from the points of the partition λ.

The following statement is true.

Theorem 2.1 ([2]). *With probability one*

$$\sup_\lambda S_\lambda = \lim_{|\lambda| \to 0} S_\lambda < +\infty.$$

Here $|\lambda| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} (u_{k+1} - u_k)$.

Thus, in the Arratia flow the total time of free motion of particles that started from the interval $[0;1]$ (or any other interval) is finite. This allows us to build a stochastic integral by pieces of free trajectories in the flow. Let $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a bounded measurable function.

Theorem 2.2 ([2]). *There exist the following limits:*

$$\int_0^1 \int_0^{\tau_u} a\bigl(x(u,s)\bigr) ds := P\text{-} \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\tau_k} a\bigl(x(u_k, s)\bigr) ds,$$

$$\int_0^1 \int_0^{\tau_u} a\bigl(x(u,s)\bigr) dx(u,s) := L_2\text{-} \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\tau_k} a\bigl(x(u_k, s)\bigr) dx(u_k, s).$$

In the left-hand side of these equalities, we use two signs of integral and only one differential because the role of the second differential are played by the moments τ_u – times of free motions of the particles.

Built integrals allow us to formulate an analogue of Girsanov's theorem for the Arratia flow. Let a be a bounded measurable function.

Definition 2.3 ([5]). *An* ***Arratia's flow with a drift*** a *is a stochastic process* $\{x_a(u,t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ *such that*

1) *for fixed* $u, x_a(u, \cdot)$ *is a diffusion process with a drift* a *and diffusion* 1;
2) *for any* $u \leq v$ *and* $t \geq 0$
$$x_a(u,t) \leq x_a(v,t);$$
3) *for any* $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ *and* $t \geq 0$ *the restriction of the distribution of the stochastic processes* $x_a(u_1,\cdot),\ldots,x_a(u_n,\cdot)$ *on the set*
$$\{f \in C\big([0;t],\mathbb{R}^n\big) : f_i(0) = u_i, f_1(s) < \ldots < f_n(s), s \in [0;t]\}$$
coincides with the restriction to this set of a distribution of a n*-dimensional diffusion process with the standard Wiener process with the drift* $(a,\ldots,a)$;
4) *for any* u_1, u_2 $x_a(u_1,t) = x_a(u_2,t)$ *when* $t \geq \tau_{u_1u_2}$, *where*
$$\tau_{u_1u_2} = \min\{s : x_a(u_1,s) = x_a(u_2,s)\}.$$

The existence of such a flow is proved in [2, 5, 3].

Note that for a fixed $t > 0$ there exists a modification of x_a in the space $D\Big([0;1], C\big([0;t]\big)\Big)$. Denote by μ_a the distribution of x_a in this space (μ_0 is the distribution of the Arratia flow).

Theorem 2.4 ([2]). *The measure* μ_a *is absolutely continuous with respect to the measure* μ_0 *and the density has the form*
$$\frac{d\mu_a}{d\mu_0}(x) = \exp\left\{\int_0^1 \int_0^{\tau_u} a(x(u,s))dx(u,s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\tau_u} a(x(u,s))^2 ds\right\}.$$

This result shows that under smooth perturbations of the motion of individual particles, the Arratia flow behaves like a Wiener process. This is because the flow is composed of "independent pieces" of Wiener processes, and the total time of free motion is finite. In view of the same reason, the Arratia flow satisfies the large deviation's principle in an appropriate space. Let us denote by $\mathcal{M}$ the space of functions acting from $[0;1]^2$ to $[0;1]$ and having the following properties:

1) for every $u \in [0;1], y(u,\cdot) \in C\big([0;1]\big)$;
2) for all $u_1 \leq u_2, t \in [0;1]$:
$$y(u_1,t) \leq y(u_2,t);$$
3) for any $t \in [0;1], y(\cdot,t)$ is right-continuous;
4) for all $u_1, u_2 \in [0;1]$
$$y(u_1,t) = y(u_2,t), t \geq \tau_{u_1u_2},$$
$$\tau_{u_1u_2} = \inf\{s : y(u_1,s) = y(u_2,s)\};$$

5) for any $u \in [0;1]$

$$y(u,0)=u.$$

Each element of $\mathcal{M}$ can be called a continual forest [9]. Let us introduce the metric in $\mathcal{M}$

$$\rho(y_1,y_2)=\max_{[0;1]}\sigma(y_1(\cdot,t),y_2(\cdot,t)),$$

where σ is the Lévy-Prokhorov distance. For an Arratia flow

$$\big\{x(u,t);u\in[0;1],t\in[0;1]\big\}$$

let us define new random fields x_ε via time change

$$x_\varepsilon(u,t)=x(u,\varepsilon t),\ \ \varepsilon\in(0;1).$$

The following theorem holds true.

Theorem 2.5 ([9]). *The family x_ε under $\varepsilon\to 0+$ satisfies the LDP in the space $\mathcal{M}$ with the speed function*

$$I(x)=\inf_{i(h)=x}I_0(h),$$

where h runs over the set of real-valued functions defined on $\mathbb{Q}\cap[0;1]\times[0;1]$ and with the above properties 1)-5), and

$$I_0(h)=\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1]}\int_0^{\tau_r}h'(r,t)^2dt,$$

$$i(h)(u,t)=\inf_{r>u}h(r,t).$$

Like the previous theorem, this result shows that in the study of the asymptotic behavior of large deviations of the Arratia flow a major role is played by the fact that it is made up of Wiener trajectories.

Emerging as the Radon-Nikodym densities, the stochastic exponents are known [38] to form the total set in the space of all square-integrable functionals from the Wiener process. It turns out that a similar property holds true for the Arratia flow. The following statement holds.

Theorem 2.6 ([3]). *The linear combinations of random variables of the form*

$$\exp\left\{\int_0^1\int_0^{\tau_u}f(u,s)dx(u,s)-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\tau_u}f(u,s)^2ds\right\},\quad f\in C\big([0;1]^2\big),$$

are dense in the space of square-integrable functionals of the Arratia flow $\big\{x(u,t);u,t\in[0;1]\big\}$.

3. Stochastic semi-groups and widths

In this part of the paper we make an attempt to find a common approach to the study of the geometry of stochastic flows both for smooth and non-smooth cases. It is well-known [1] that the shift of functions or differential forms by solutions to SDE with smooth coefficients is described in terms of the Lie algebra generated by vector fields, which are the coefficients of the equation. If, however, a flow is composed of discontinuous maps, then such flow may not preserve the continuity. Instead, we propose to consider how the flow transforms finite-dimensional subspaces of functions, and calculate the widths of functional compacts with respect to these subspaces. We consider in detail here a model example of a stochastic semi-group consisting of finite-dimensional projections.

We start with a definition of a strong random operator. Let H be a real separable Hilbert space.

Definition 3.1 ([40]). *A* ***strong random operator in*** H *is a continuous in probability linear map from* H *to the set of all random elements in* H.

Below, there is an appropriate example of a strong random operator.

Example 3.2. Let $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ be the Harris flow, $H = L_2(\mathbb{R})$. Define a strong random operator in H by the equality

$$Af(u) = f(x(u,t)).$$

Since

$$E\int_{\mathbb{R}} f(x(u,t))^2 du = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(v)^2 p_1(u-v)dudv = \\ = \int_{\mathbb{R}} f(v)^2 \int_{\mathbb{R}} p_1(u-v)dudv = \int_{\mathbb{R}} f(v)^2 dv,$$

where p_1 is the density of the standard Gaussian distribution, A is continuous in the square mean.

It can be checked that in the case of the Arratia flow, the strong random operator constructed in the example has the following property. For this flow does not exist a set of bounded operators $\{\widetilde{A}_\omega, \omega \in \Omega\}$ in H such that

$$\forall\, f \in H: \quad Af = \widetilde{A}_\omega f \text{ a.s.}$$

Indeed, suppose that there exists such a set, that is, that A is a bounded random operator in terms of Skorokhod [40]. Let $\{\widetilde{f}_n; n \geq 1\}$ be the Rademacher system of functions on $[0;1]$. For $n \geq 1$ denote

$$f_n(u) = \widetilde{f}_n(u), \quad u \in [0;1],\ f_n(u) = 0,\ u \notin [0;1].$$

Then f_n converges weakly to 0 in H. From the other side the sequence $\{f_n; n \geq 1\}$ does not converge almost everywhere on $[0;1]$. As we have already noted, in the Arratia flow points of any finite interval turn into a finite number of points during any positive time interval. Therefore, with probability 1, there exists an interval $\Delta = \{v : x(v,t) = x(0,t)\}$ of positive Lebesgue measure. Then

$$\int_\Delta (Af_n)(u)du = (f_n, A^*_\omega 1\!\!1_\Delta) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ a.s.}$$

On the other hand,

$$\int_\Delta (Af_n)(u)du = |\Delta| f_n(x(0,t)).$$

It means that the sequence $\{\int_\Delta (Af_n)(u)du, n \geq 1\}$ does not converge to 0 on the set of those ω for which $x(0,t) \in [0;1]$. This contradiction proves that our assumption was incorrect.

Despite the fact that strong random operators are often unbounded, their superposition can be determined in the usual way for independent operators. Therefore, a stochastic flow in $\mathbb{R}^d$ can sometimes be associated with a semi-group of strong random operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$. Let us formulate a precise definition.

Definition 3.3 ([39]). *A set $\{G_{s,t}; 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ of strong random operators in H is called a **stochastic semi-group** if*

1) *the distribution of $G_{s,t}$ depends only on $t - s$;*
2) *for all $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, operators $G_{t_1,t_2}, \ldots, G_{t_{n-1},t_n}$ are independent;*
3) *for all $r \leq s \leq t$ we have that $G_{r,t} = G_{s,t}G_{r,s}$, and $G_{r,r}$ is the identity operator.*

Let $\{\varphi_{s,t}; 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ be a stochastic flow (see Definition 1.1 in $\mathbb{R}^d$ whose one-point motions are standard Wiener processes. Then the operators $G_{s,t}$ in $L_2(\mathbb{R}^d)$ defined to

$$G_{s,t}f(u) = f(\varphi_{s,t}(u)), u \in \mathbb{R}^d$$

form a stochastic semi-group.

Note that the consideration of stochastic semi-groups associated with the flow, allows one to approach the study of the properties of flows with smooth and singular interaction in a unified way. The notion of a strong random operator was introduced by A.V. Skorokhod [40]. He also began to consider the semi-groups of such operators and received sufficient conditions for the representation of these semi-groups as the solutions of a linear

SDE with operator-valued Wiener process [39]. This presentation is made possible, in part, because the noise generated by the semi-group, is Gaussian. We present here two theorems about the structure of semi-groups of strong random operators. One of them gives a description of the multiplicative operator functionals of Gaussian noise. The second one is devoted to semi-groups of random finite-dimensional projections (here a Poisson noise arises).

We start with a Gaussian case. Let $\{w(t); t \geq 0\}$ be a standard one-dimensional Wiener process. Suppose that the semi-group

$$\{G_{s,t}; 0 \leq s \leq t < +\infty\}$$

of strong random operators is a multiplicative homogeneous functional of w, i.e. the following conditions hold:

1) $G_{s,t}$ is measurable with respect to $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(w(r) - w(s); r \in [s;t])$;
2) $\theta_r G_{s,t} = G_{s+r,t+r}, r \geq 0, s \leq t$.

Here θ_r is the shift operator along the trajectories of w. Assume that $G_{s,t}$ are square-integrable, i.e.

$$\forall u \in H: \ \forall s \leq t: \ E\|G_{s,t}u\|^2 < +\infty.$$

Define for all t, the mathematical expectation of $G_{0,t}$ as continuous linear operator in H, acting by the rule

$$\forall u \in H: \ T_t u = EG_{0,t}u.$$

Note that for the continuous in the square-mean semi-group $\{G_{s,t}\}$ the family $\{T_t\}$ is a strongly continuous semi-group of operators in H and, thus, is uniquely determined by its infinitesimal operator. It turns out, that in order to describe the semi-group $\{G_{s,t}\}$ we also need a "stochastic" infinitesimal operator. Let us define it in the following way. For $f \in H$ consider the limit

$$Bf := \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} EG_{0,t} f w(t).$$

To make sure that B is densely defined, we consider the family of operators $\{F_t; t \geq 0\}$ defined by the relation

$$F_t f = EG_{0,t} f w(t) = EG_{s,s+t} f(w(t+s) - w(s)).$$

It is easy to check that the following equalities hold

$$F_t G_{0,s} = G_{0,s} F_t, F_{t+s} = F_s T_t + T_s F_t.$$

Using these equalities, it is possible to check in a standard way that all elements of H of the form

$$\int_0^s T_r g dr, \ g \in H, s > 0$$

belong to the domain of B. The following theorem is true.

Theorem 3.4 ([6]). *Suppose that $T_t(H) \subset D(B)$ for all $t > 0$ and the kernels of the Itô-Wiener expansion for $G_{0,t}$ are continuous in time variables. Then for any $f \in H$ the equality holds*

$$G_{0,t}f = T_t f + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k(0;t)} T_{t-\tau_k} B T_{\tau_k - \tau_{k-1}} B \ldots B T_{\tau_1} f dw(\tau_1) \ldots dw(\tau_k),$$

where $\Delta_k(0;t) = \{0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k \leq t\}$.

In the case when the semi-group $\{G_{s,t}\}$ is generated by SDE, the statement of Theorem 3.4 is the well-known Krylov-Veretennikov expansion [28].

Example 3.5. Consider the following SDE in $\mathbb{R}$

$$dx(t) = a\big(x(t)\big)dw(t),$$

where w is a standard Wiener process, $a \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ is bounded together with its derivative. To this equation corresponds a stochastic flow

$$\{\varphi_{s,t}; 0 \leq s \leq t\}$$

of diffeomorphisms in $\mathbb{R}$. One can check that the operators defined by the relation

$$(G_{s,t}f)(u) = f\big(\varphi_{s,t}(u)\big)$$

on square-integrable functions, form a stochastic semi-group, which is a multiplicative functional on w. And for $f \in C_0^2(\mathbb{R})$

$$Bf(u) = a(u)f'(u).$$

Let $\inf a > 0$. Then the operator T_t for $t > 0$ is an integral operator with an infinitely differentiable kernel and thus the condition of Theorem 3.4 is satisfied. The claim of Theorem 3.4 now takes the form

$$f(\varphi_{0,t}(u)) = T_t f(u) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k(0;t)} T_{t-\tau_k} a \frac{d}{d\nu_k} T_{\tau_k - \tau_{k-1}} \ldots a \frac{d}{d\nu_1} T_{\tau_1} f(u) dw(\tau_1) \ldots dw(\tau_k).$$

Here $\nu_1, \ldots, \nu_k$ are variables on which the integration is performed by the action of $\{T_t\}$. The last formula coincides with the Krylov-Veretennikov representation [28].

It is not always the case that the noise associated with a stochastic semi-group is given by a Wiener process. In addition, semi-groups corresponding to flows with coalescence can be composed of operators with values in finite-dimensional spaces. Revealing in terms of describing the structure and the asymptotic behavior is an example of a stochastic semi-group consisting of random finite-dimensional projections in a Hilbert space.

Let H be a real Hilbert space. Under the projection in H, we understand the orthogonal projection on a subspace in H. A projector is called finite if the corresponding subspace is finite-dimensional.

Definition 3.6. *A* ***random finite-dimensional projection*** *G* ***in*** *H is a set of finite dimensional projections $\{G_\omega, \omega \in \Omega\}$ such that for any $u \in H, G_\omega u$ is a random element in H.*

It is evident that a random finite-dimensional projection is a strong random operator continuous in the square mean. The following theorem gives a complete description of the mean-square continuous stochastic semi-group consisting of random finite-dimensional projections.

Theorem 3.7 ([6]). *Let $\{G_{s,t}; 0 \le s \le t\}$ be a mean-square continuous stochastic semi-group consisting of random finite-dimensional projections in H. Then there exist an orthonormal basis $\{e_n; n \ge 1\}$ in H and a sequence of Poisson, with regard to the general filtration, random processes $\{\nu_n; n \ge 1\}$ such that*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{\nu_n(t) = 0\} < +\infty, \ t > 0;$

2) $G_{s,t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\nu_n(t)=\nu_n(s)=0}\, e_n \otimes e_n.$

Remark 3.8. This theorem states that all projections of the semi-group have a common basis, the elements of which "are killed" in accordance with the Poisson regulation. If one postulates the existence of a common basis in advance, then the theorem is simple.

Remark 3.9. The object discussed in Theorem 3.7 is significantly stochastic. It is easy to see that there is no deterministic strongly continuous semi-group consisting of finite-dimensional projections in the infinite-dimensional space H.

Since stochastic semi-groups can be built on stochastic flows, it is natural to expect that the geometric properties of the maps that make up the flow affect the properties of the operators of the semi-group. For characterization of such properties it seems promising to use the notion of width. Here is the definition. Let $K \subset H$ be a compact and $L \subset H$ a subspace in H.

Definition 3.10 ([41]). *The **width** of K with respect to L is the value*

$$\max_{u\in K}\rho(u,L),$$

where $\rho(u,L)=\inf_{v\in L}\|u-v\|$.

Further, as an example, we consider the widths of some compacts with respect to subspaces of the form $G_{0,t}(H), t>0$, where $\{G_{s,t}\}$ is a stochastic semi-group of finite-dimensional projectors.

Example 3.11 ([6]). Let the Poisson processes from the description of the semi-group $\{G_{s,t}\}$ in Theorem 3.7 be independent and their intensities equal $\lambda_n=n, n\geq 1$. Consider the following compacts in H

$$K_1=\{u:(u,e_n)^2\leq\frac{1}{n^2}, n\geq 1\},$$
$$K_2=\{u:\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x,e_n)^2\leq 1\}.$$

Define the widths

$$\alpha_i(t)=\max_{u\in K_i}\|u-G_{0,t}u\|,\ i=1,2,$$

and the value

$$d(t)=\dim G_{0,t}(H).$$

Then

$$\frac{\alpha_1(t)}{\sqrt{t|\ln t|}}\xrightarrow{P}1,\ t\to 0+,$$

$$\varliminf_{t\to 0+}\alpha_2(t)\sqrt{\frac{2}{t}l\ln t}\geq 1,\ \text{a.s.},$$

$$\varlimsup_{t\to 0+}\frac{td(t)}{2|\ln t|}\leq 1,\ \text{a.s.},$$

$$\varliminf_{t\to 0+}2t|\ln t|d(t)\geq 1,\ \text{a.s.}$$

The example shows the dependence of the asymptotic behavior of the widths on the structure of the compacts and the semi-group.

Thus, it can be expected that the proposed approach will give an opportunity to explore the geometry of both smooth and non-smooth stochastic flows.

4. Discrete time approximation of coalescing stochastic flows

It is known that a solution to SDE with smooth coefficients may be obtained via a discrete time approximation. It appears that a discrete time approximation can also be built for coalescing stochastic flows, which may not be generated by SDE's. Here we present a discrete time approximation for the Harris flow.

Consider a sequence of the independent stationary Gaussian processes $\{\xi_n(u); u \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$ with zero mean and covariation function Γ. Suppose, that Γ is continuous. Define a sequence of random mappings $\{x_n; n \geq 0\}$ by the rule

$$x_0(u) = u, \quad x_{n+1}(u) = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Note that the continuity of Γ implies that the processes $\{\xi_n; n \geq 1\}$ have measurable modifications. This allows substituting x_n into ξ_{n+1}. The independence of $\{\xi_n; n \geq 1\}$ guarantees that $\xi_{n+1}(x_n(u))$ does not depend on the choice of these modifications. Let us also define the random functions

$$y_n(u,t) = n\left(\frac{k+1}{n} - t\right) x_k(u) + n\left(t - \frac{k}{n}\right) x_{k+1}(u),$$
$$u \in \mathbb{R},\ t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right],\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Theorem 4.1 ([4]). *Let Γ be a continuous positive definite function on $\mathbb{R}$ such that $\Gamma(0) = 1$ and Γ has two continuous bounded derivatives. Suppose that y_n is built upon a sequence $\{\xi_k; k \geq 1\}$ with covariance $\frac{1}{\sqrt{n}}\Gamma$. Then for every $u_1, \ldots, u_l \in \mathbb{R}$ the random processes $\{y_n(u_j, \cdot), j = 1, \ldots, l\}$ weakly converge in $C(0;1], \mathbb{R}^l)$ to the l-point motion of the Harris flow with the local characteristic Γ.*

5. The iterated logarithm law and the fractional step method

Let $\{X_a(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ be the Arratia flow with bounded Lipschitz continuous drift a [5]. One can define the cluster formed by all particles with positive starting points that have merged with the particle started from 0:

$$L(t) = \{u > 0 \mid X_a(0,t) = X_a(u,t)\}.$$

Theorem 5.1 ([7]). *With probability* 1

$$\limsup_{t \to 0+} \frac{\mathrm{Leb}(L(t))}{\sqrt{2t \ln\ln t^{-1}}} \geq 1, \qquad \limsup_{t \to 0+} \frac{\mathrm{Leb}(L(t))}{2\sqrt{t \ln\ln t^{-1}}} \leq 1.$$

The Arratia flow is a part of the Brownian web

$$\{\varphi_{t,\cdot}(u) \in C([t;+\infty)) \mid u, t \in \mathbb{R}\},$$

see [14, 25]. The fractional step method is applied to the Brownian web perturbed by the flow of solutions to the deterministic equation

$$dz_t = a(z_t)dt$$

in [11] as follows. Consider a sequence of partitions of $[0;1]$:

$$\{t_0^{(n)}, \ldots, t_{N^{(n)}}^{(n)}\}, n \in \mathbb{N},$$

with

$$\lambda^{(n)} = \max_{k=\overline{0,N^{(n)}-1}} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Put

$$A_t(u) = u + \int_0^t a(A_s(u))ds, \quad u \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Then for fixed $n, k \in \overline{0, N^{(n)} - 1}$ and $t \in [t_k^{(n)}; t_{k+1}^{(n)})$ define

$$X_t^{(n)}(u) = \varphi_{t_k^{(n)},t}\left(\mathop{\circ}_{j=1}^{k} A_{t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)}}(\varphi_{t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)}}(\cdot))\right)(u),$$

$$\Delta_k^{(n)}(u) = X_{t_k^{(n)}}^{(n)}(u) - X_{t_k^{(n)}-}^{(n)}(u).$$

Additionally, put $X_1^{(n)}(u) = X_{1-}^{(n)}(u)$.

Theorem 5.2. *Let $\{X_t^a(u) \mid u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ be an Arratia flow with drift a. Then for any $N \in \mathbb{N}$, $(u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$*

$$\big(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)\big) \Rightarrow \big(X^a(u_1, \cdot), \ldots, X^a(u_N, \cdot)\big), \ n \to \infty,$$

in $\big(D([0;1])\big)^N$.

The convergence cannot be strengthened.

Proposition 5.3. *For arbitrary u the sequence*

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} \Big(\varphi_{t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}}(u) - u\Big), \ n \in \mathbb{N},$$

does not contain convergent in probability subsequences.

To obtain an estimate on the speed of the convergence, the following random measure are considered:

$$\mu_t = \mathrm{Leb} \circ \big(X^a(,\cdot,t)\big)^{-1}, \qquad \mu_t^{(n)} = \mathrm{Leb} \circ \big(X_t^{(n)}\big)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consider $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, the space of all probability measures on $\mathbb{R}$ endowed with the Wasserstein metric W_1, and the space $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$, of the corresponding Wasserstein metric in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ being denoted by $W_{1,p}$.

Theorem 5.4 ([12, Theorem 2.1]). *Assume that the sequence $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded. Then for every $p \geq 2$ there exist a positive constant C and a number $N \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N$*

$$W_{1,p}\Big(\mathrm{Law}(\mu_t), \mathrm{Law}(\mu_t^{(n)})\Big) \leq C\big(\log\log \delta_n^{-1}\big)^{-1/p}.$$

Remark 5.5. The formulation of Theorem 2.1 in [12] is mistakenly missing the second logarithm.

6. Approximations with SDEs

Fix $\beta \in (0;+\infty), \alpha \in (0;2)$. In [42] a coalescing Harris [23] flow with infinitesimal covariance

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\beta|x|^\alpha},\ x \in \mathbb{R}.$$

and the corresponding dual flow are approximated with solutions to SDEs. The dual flow $\widehat{X}$ [23, 27] is defined via

$$\widehat{X}(x, t_1, t_2, s) = \inf_{\substack{X(y,r,t_2)\geq x,\ y\in\mathbb{R},\\ r\in[t_1;t_1+t_2-s]}} X(y, r, t_1 + t_2 - s), \tag{6.1}$$

where $x \in \mathbb{R},\ s \in [t_1; t_2]$. Consider a sequence of twice continuously differentiable symmetric nonnegative definite functions $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ such that $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, $\varepsilon \to 0+$, uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}$, and $\varphi_\varepsilon(0) = 1$.

For each $\varepsilon \in (0; 1)$ let

$$F_\varepsilon \equiv \big\{F_\varepsilon(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+\big\}$$

be a Gaussian process with

$$\mathrm{Cov}(F_\varepsilon(t, x), F_\varepsilon(s, y)) = \min\{t, s\}\varphi_\varepsilon(x - y).$$

The process F_ε is a continuous $C(\mathbb{R})$-valued martingale in the sense of [30] and therefore the flow given via

$$X_\varepsilon(x, s, t) = x + \int_s^t F_\varepsilon(X_\varepsilon(x, s, r), dr)$$

is a flow of homeomorphisms. For $\varepsilon \in (0; 1), 0 \leq s \leq t \leq T$, define

$$\mu_\varepsilon(s, t) = \mathrm{Leb} \circ X_\varepsilon(\cdot, s, t)^{-1}, \qquad \mu(s, t) = \mathrm{Leb} \circ X(\cdot, s, t)^{-1},$$

$$\widehat{\mu}_\varepsilon(s, t) = \mathrm{Leb} \circ \big(X_\varepsilon^{-1}(\cdot, 0, t, s)\big)^{-1}, \quad \widehat{\mu}(s, t) = \mathrm{Leb} \circ \Big(\widehat{X}(\cdot, 0, t, s)\Big)^{-1}.$$

Let $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ be a space of locally finite nonnegative Borel measures on the real line equipped with the vague topology. Given real numbers a, a_1, b with $a < a_1 < b$ and a function $f \in C\big([a_1; b]\big)$ put

$$\mathcal{P}_{a,b} f(s) = \mathbb{1}_{s\in[a;a_1]} f(a_1) + f(s)\mathbb{1}_{s\in(a_1;b]},\ s \in [a; b].$$

Theorem 6.1. *Fix $T > 0$ and a set $\{(x_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \times [0; T])^\infty$. Then*

$$\Big(\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_1, t_1, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon^{-1}(x_1, t_1, T, T + t_1 - \cdot), \ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_N, t_N, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon^{-1}(x_N, t_N, T, T + t_N - \cdot), \ldots\Big)$$
$$\Longrightarrow \Big(\mathcal{P}_{0,T} X(x_1, t_1, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}(x_1, t_1, T, T + t_1 - \cdot), \ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T} X(x_N, t_N, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}(x_N, t_N, T, T + t_N - \cdot), \ldots\Big),$$

in $\Big(C\big([0; T]\big)\Big)^\infty$ as $\varepsilon \to 0+$.

For any $s_1 \le, \ldots \le s_N$, $t_1 \le, \ldots \le t_N$, $s_i \le t_i$, $i = \overline{1, N}$, $N \in \mathbb{N}$,

$$(\mu_\varepsilon(s_1, t_1), \ldots, \mu_\varepsilon(s_N, t_N), \widehat{\mu}_\varepsilon(s_1, t_1), \ldots, \widehat{\mu}_\varepsilon(s_N, t_N))$$
$$\Longrightarrow (\mu(s_1, t_1), \ldots, \mu(s_N, t_N), \widehat{\mu}(s_1, t_1), \ldots, \widehat{\mu}(s_N, t_N)),$$

in $(\mathcal{M}(\mathbb{R}))^{2N}$ as $\varepsilon \to 0+$.

7. Point densities

Point process associated with an Arratia flow

$$\{X^a(u, t) | u \in [0; 1], t \in [0; T]\}$$

with bounded Lipshitz continuous drift a are discussed in [13] in terms of special (n, k)-point densities $p_t^{a,n,k}, k \le n$ which were introduced in [12] and represent a further development of the well known notions used, for instance, in [34].

To describe sequences of collisions, the following reformulation of the scheme in [4, pp. 433-434] is used. Put

$$Sh_{n,k} = \{(j_1, \ldots, j_k) \mid j_i \in \{1, \ldots, n - i\}, i = \overline{1, k}\}, \quad k = \overline{1, n},$$
$$Sh_n = \varnothing \ \vee \bigcup_{k=\overline{1,n-1}} Sh_{n,k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Let $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ to be a continuous function on $[0; T]$ with coalescing coordinates and no triple collisions. Let $n-\varkappa$ be the number of distinct values in $\{\xi_i(T) \mid i = \overline{1, n}\}$. Let $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\varkappa$ be moments of subsequent collisions of the coordinates of ξ. Put $j_1 = \min\{i \mid \exists j \ne i \ \xi_j(\tau_1) = \xi_i(\tau_1)\}$

and define the process ξ^{n-1} by excluding the j_1-th coordinate from the vector ξ. Then put $j_2 = \min\{i \mid \exists\ j \neq i\ \xi_j^{n-1}(\tau_2) = \xi_i^{n-1}(\tau_2)\}$, define ξ^{n-2} by excluding the j_2-th coordinate in ξ^{n-1} and repeat the procedure until a collection $S(\xi) = (j_1, \dots, j_\varkappa) \in Sh_{n,\varkappa}$ appears. We will call $S(\xi)$ the coalescing scheme for ξ.

Put

$$\Delta_n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_1 < \ldots < u_n\},$$
$$\mathfrak{X}_t^a(u) = \{X^a(u_k, t) \mid k = \overline{1, n}\},$$
$$\overrightarrow{X}^a(u, \cdot) \equiv \overrightarrow{X}^a(u) = \left(X^a(u_1, \cdot), \dots, X^a(u_n, \cdot)\right),$$

for $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ and $n \in \mathbb{N}$.

Definition 7.1. *Given an Arratia flow X^a, a starting point $u \in \Delta_n$ and a coalescence scheme $s \in \mathcal{S}_{n,j}$ for some j and k such that $k \leq n - j$ the corresponding (n,k)-point density $p_T^{a,n,s,k}(u;\cdot), j \geq k$, is a measurable function on $\mathbb{R}^k$ such that for any bounded non-negative measurable function $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*

$$\mathrm{E}1\!\!1(S(\overrightarrow{X}^a(u) = s) \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{X}_T^a(u), \\ v_1, \dots, v_k \text{ are distinct}}} f(v_1, \dots, v_k) = \int_{\mathbb{R}^k} p_T^{a,n,s,k}(u; y) f(y) dy.$$

Definition 7.2. *Given an Arratia flow X^a, a starting point $u \in \Delta_n$ and $k \in \{1, \dots, n\}$ the corresponding (n,k)-point density is a measurable function $p_T^{a,n,k}(u;\cdot)$ on $\mathbb{R}^k$ such that for any bounded non-negative measurable function $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*

$$\mathrm{E}1\!\!1\left(|\mathfrak{X}_t^a(u)| \geq k\right) \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{X}_t^a(u), \\ v_1, \dots, v_k \text{ are distinct}}} f(v_1, \dots, v_k) = \int_{\mathbb{R}^k} p_T^{a,n,k}(u; y) f(y) dy. \tag{7.1}$$

Then a.e.

$$p_T^{a,n,k}(u;\cdot) = \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{s \in Sh_{n,l}} p_T^{a,n,s,k}(u;\cdot).$$

The k-point density $p_T^{a,k}(\cdot)$ is defined as a measurable function on $\mathbb{R}^k$ such that the analogue of (7.1) holds with $\mathfrak{X}_T^a(u)$ replaced with the set

$$\{X^a(v, T) \mid v \in [0; 1]\}$$

and the condition $|\mathfrak{X}_t^a(u)| \geq k$ dropped.

Theorem 7.3. *Let* $u^{(n)} = \left(u_1^{(n)}, \ldots, u_n^{(n)}\right) \in \Delta_n$, $n \in \mathbb{N}$, *be such that* $u_1^{(n)} = 0, u_n^{(n)} = 1$,

$$\left\{u_1^{(n)}, \ldots, u_n^{(n)}\right\} \subset \left\{u_1^{(n+1)}, \ldots, u_{n+1}^{(n+1)}\right\},$$

and

$$\max_{j=\overline{0,n-1}} \left(u_{j+1}^{(n)} - u_j^{(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Then for all $k \in \mathbb{N}$ *a.e.*

$$p_T^{a,n,k}\left(u^{(n)}; \cdot\right) \nearrow p_T^{a,k},\ n \to \infty.$$

Suppose $\zeta_k \in C\big([0;T]\big)$, $k = \overline{1,n}$. Put $\widetilde{\zeta}_1 = \zeta_1, r_1 = T$ and construct $\widetilde{\zeta}_k$, $k = \overline{2,n}$ as follows:

$$r_k = \inf\left\{T; t \mid \widetilde{\zeta}_{k-1}(t) = \zeta_k(t)\right\},$$
$$\widetilde{\zeta}_k(t) = \zeta_k(t)\mathbb{1}(t < r_k) + \widetilde{\zeta}_{k-1}(t))\mathbb{1}\left(t \geq r_k\right), \quad k = \overline{2,n}.$$

Assume that $S((\widetilde{\zeta}_1, \ldots, \widetilde{\zeta}_n)) = s$. Define

$$\theta_{ij} = \inf\left\{t \mid \zeta_i(s) = \zeta_j(s)\right\}, \quad j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2,n},$$
$$\theta_{00} = T.$$

Assume additionally that $\theta_{ij} \neq T$ for all pairs $(i,j) \neq (0,0)$. Then there exists a unique collection $\{\lambda_{ij}(s) \mid i = 1,2, j = \overline{1,n}\}$ such that

$$r_k = \theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Consider independent Brownian bridges $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ with

$$\eta_k(0) = \eta_k(T) = 0,\ k = \overline{1,n},$$

define

$$\eta^{u,y}(t) = \eta(t) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)u + \frac{t}{T}y, \quad u \in \Delta^n,\ y \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0;T].$$

and put

$$\theta_{00}(u,y) = T, \qquad \theta_{ij}(u,y) = \inf\left\{t \mid \eta_i^{u,y}(t) = \eta_j^{u,y}(t)\right\} \wedge T,$$

for $\overline{1, i-1}$, $i = \overline{2,n}$, $u \in \Delta^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, and

$$\mathfrak{e}_{T,n}^a(u,y,s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^n \int_0^{\theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u,y)} a\left(\eta_k^{u,y}(t)\right) d\eta_k(t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^n \int_0^{\theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u,y)} a\left(\eta_k^{u,y}(t)\right)\left(\frac{y_k - u_k}{T} - \frac{1}{2}a_k(t,u,y,s)\right) ds\right\},$$

for $u \in \Delta^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $s \in Sh_n$.

Fix some $u \in \mathbb{R}^n$ and $k \in \{0, \dots, n-1\}$. A partition of the set $\{1, \dots, n\}$ is associated with a coalescence scheme s naturally. The blocks of the partition being $\pi_1, \dots, \pi_k$, we define $I(s) = \{\min \pi_i \mid i = \overline{1, n-k}\}$.

Given a set

$$K = \{k_1, \dots, k_m\} \subset \{1, \dots, n\}$$

and a point $z \in \mathbb{R}^n$ we denote by z^{-K} the vector obtained by removing in the vector z all the coordinates whose numbers are in K; by z^K, the vector obtained by removing all coordinates except those in K. We write $z^{K_1, \pm K_2}$ for $(z^{K_1})^{\pm K_2}$. Denote by $g_T^m(u; \cdot)$ the m-dimensional Gaussian density with mean u and variance $T\,\mathrm{Id}_{m\times m}$, where $\mathrm{Id}_{m\times m}$ is the unit square matrix of size m, $m \in \mathbb{N}$.

Theorem 7.4. *If $u \in \Delta_n$ and $s \in Sh_{n,n-k}$ for some $k \in \{0, \dots, n-1\}$, then for each $j \in \{1, \dots, k\}$ for all $y \in \Delta_k$*

$$\begin{aligned}
&p_T^{a,n,s,j}(u; y) = \\
&\quad = \sum_{\substack{L=\{l_1,\dots,l_j\}\subset \\ \{1,\dots,k\}}} g_T^j\left(u^{I(s),L}; z^{I(s),L}\right) \int_{\mathbb{R}^{k-j}} dz^{I(s),-L} g_T^{k-j}\left(u^{I(s),-L}; z^{I(s),-L}\right) \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^{n-k}} dz^{-I(s)} g_T^{n-k}(u^{-I(s)}; z^{-I(s)}) \left(\mathrm{E}\mathbb{1}(S(\eta^{u,z}) = s)\mathfrak{e}_{T,n}^a(u, z, s)\right)\Big|_{\substack{z\in\mathbb{R}^n, \\ z^{I(s),L}=y}}.
\end{aligned}$$

Another representation of point densities is obtained in terms of stochastic exponentials for the Arratia flow. To formulate the corresponding result, the following notation is needed. Let $U = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ be a dense subset of $[0; 1]$, and define

$$\rho_1 = T, \quad \rho_k = \inf\Big\{s \mid \prod_{j=1}^{k-1}\big(X^0(u_k, s) - X^0(u_j, s)\big) = 0\Big\} \wedge T, \quad k \ge 2,$$

and put, for $u^{(n)} = (u_1, \dots, u_n)$,

$$\begin{aligned}
I_n\big(u^{(n)}\big) &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\rho_k} a\big(X^0(u_k, t)\big) dX(u_k, t), \\
J_n\big(u^{(n)}\big) &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\rho_k} a^2\big(X^0(u_k, t)\big) dt, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Then the following quantities are well-defined [5, §§7.2-7.3]:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_T^a = \exp\left\{L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} I_n\left(u^{(u)}\right) - \frac{1}{2}L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} J_n\left(u^{(u)}\right)\right\},$$
$$\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a(u^{(n)}) = \exp\left\{I_n(u^{(n)}) - J_n(u^{(n)})\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consider $u \in \Delta_n$. Suppose that elements of the set $\mathfrak{X}_T(u)$ are listed in ascending order. Let $\varkappa$ be the cemetery state. Given a set

$$L = \{l_1, \ldots, l_k\},\ l_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,k},$$

for some k, put the random vector $\mathcal{X}_T^L(u)$ to be equal to

$$\left(\left(\mathfrak{X}_T(u)\right)_{l_1}, \ldots, \left(\mathfrak{X}_T(u)\right)_{l_k}\right), \tag{7.2}$$

if $\max\limits_{i=\overline{1,k}} l_i \leq |\mathfrak{X}_T(u)|$, and $\varkappa$, otherwise. We denote the density of $\mathcal{X}_T^L(u)$ in $\mathbb{R}^k$ by $q_T^L(u;\cdot)$.

Theorem 7.5. *For any $u \in \Delta_n$ and any $k \in \{1, \ldots, n\}$ a.e.*

$$p_T^{a,n,k}(u;y) = \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} q_T^L(u;y)\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a(u)/\mathcal{X}_T^L(u) = y\right).$$

Replacing in (7.2) the set $\mathfrak{X}_T(u)$ with the set

$$\{X(v,T) \mid v \in [0;1]\}$$

one defines, analogously to $\mathcal{X}_T^L(u)$, the random vector $\mathcal{X}_T^L$ with values in $\mathbb{R}^k \cup \{\varkappa\}$. The corresponding density being denoted by $q_T^L(\cdot)$, the following result holds.

Theorem 7.6. *For any $k \in \mathbb{N}$ a.e.*

$$p_T^{a,k}(y) = \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} q_T^L(y)\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_T^a/\mathcal{X}_T^L = y\right).$$

8. Brownian particles with singular interaction

The discrete-time approximation of the Arratia flow $\{x_k^n(u), k = 0, \ldots, n\}$ is given by a difference equation with random perturbation generated by a sequence of independent stationary Gaussian processes

$$\{\xi_k^n(u),\ u \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n\}$$

with covariance function Γ_n:

$$x^n_{k+1}(u) = x^n_k(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi^n_{k+1}(x^n_k(u)),\ x^n_0(u) = u,\ u \in \mathbb{R}.$$

Define the random process $\tilde{x}_n(u,\cdot)$ on $[0,1]$ as the polygonal line with edges $\left(\frac{k}{n}, x^n_k(u)\right)$, $k = 0,\ldots,n$. It was proved by I. I. Nishchenko in [35] that if the covariance Γ_n approximates in some sense the function $\mathbb{I}_{\{0\}}$ then m-point motion of $\tilde{x}_n$ weakly converges to the m-point motion of the Arratia flow.

An explicit form of the Ito-Wiener expansion for $f\big(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m)\big)$ with respect to noise that produced by the processes

$$\{\xi^n_k(u),\ u \in \mathbb{R},\ k = 0,\ldots,n\}_{n\geq 1}$$

was obtained by E. Glinyanaya in [15, 18]. This expansion can be regarded as a discrete-time analogue of the Krylov-Veretennikov representation formula. Let η_i be the wight noise that correspond to the process ξ_i. Define the operators $\{Q_k\}_{k\geq 1}$ from the Ito-Wiener expansion:

$$f\big(u_1+\xi_1(u_1),\ldots,u_m+\xi_1(u_m)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(\vec{u};\eta_1,\ldots,\eta_1).$$

Theorem 8.1 ([15], E. Glinyanaya, 2015)**.** *Let $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ be the discrete-time flow:*

$$x_{n+1} = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)), \qquad x_0(u) = u.$$

Then for any $\varphi \in B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ the Ito-Wiener expansion of $\varphi\big(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m)\big)$ has the form

$$\varphi\big(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m)\big) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n\geq 0 \\ l_1+\ldots+l_n=k}} Q_{l_n}Q_{l_{n-1}}\ldots Q_{l_1}\varphi(\vec{u};\underbrace{\eta_n,\ldots,\eta_n}_{l_n},\ldots,\underbrace{\eta_1,\ldots,\eta_1}_{l_1}).$$

In contrasts to the flow of Brownian particles on the line, in the discrete-time approximations the order between particles can change in time. We define a measure of disordering for 2-point motion as follows

$$\Phi_n = \int_0^1 \mathbb{I}_{\{\tilde{x}_n(u_2,s)-\tilde{x}_n(u_1,s)<0\}}ds,$$

where $u_1 < u_2$. If the discrete-time flow approximates the Arratia flow, then the following asymptotics holds [16]:

Theorem 8.2 ([16], E. Glinyanaya, 2012)**.** *Let $\{\Gamma_m\}_{m\geq 1}$ be such that*

1) $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{c_m^2 e^{c_m}}{m} = 0$;

2) $\frac{u}{\sqrt{2-2\Gamma_m(u)}}$ *increase for* $u > 0$;

3) $2 - 2\Gamma_m\Big(\frac{1}{\sqrt{c_m}}\Big) \geq \frac{1}{K^2}$, $m \geq 1$, *for some constant* K.

Then

$$\frac{\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\}}{F\Big(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\Big)} \leq m,$$

and for any $\varepsilon > 0$ *there exists a constant* $A > 0$ *such that*

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\}}{F\Big(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\Big)} \geq A.$$

where

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx.$$

E. Glinyanaya obtained an explicit form for the semigroup of m-point motion of the Arratia flow in terms of binary forests that correspond to order of trajectories coalescence [20]. For the Arratia flow define its m-point motion semigroup $(Q_{m,t})_{t\geq 0}$:

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = \mathbb{E}f(x(\vec{u},t)).$$

An iterative scheme of boundary value problems for the functions $Q_{m,t}f$ was obtained:

Theorem 8.3. *The following relations hold:*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{m,t}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta Q_{m,t}f(\vec{u}),\ \vec{u} \in \Delta_m,\ t \geq 0,$$

$$Q_{m,0}f(\vec{u}) = f(\vec{u}),$$

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = (Q_{m-1,t}f \circ \pi_i^{-1})(\pi_i\vec{u}), \vec{u} \in K_i^m, Q_{m,t}f(\cdot) \in D_m,$$

where $\Delta_m = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m : u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_m\}$,

$$D_m = \left\{ f \in C_0^2(\Delta_m) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\Delta_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} 1\!\!1_{\{x_i = x_j\}}(\vec{x}) = 0,\, i \neq j \right\},$$

and

$$\pi_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_m)$$

$$\pi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_{m-1}) = (u_1, \ldots, u_i, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1}).$$

A solution to the boundary value problem from the previous theorem was represented as a sum in which each summand is indexed by a binary forest that correspond to the order of trajectories' coalescence.

Theorem 8.4 ([20], E. Glinyanaya, 2014). *Let G_m be the Karlin-McGregor determinant. Then for any $f \in D_m$*

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = \int\limits_{\Delta_m} f(\vec{y})G_m(\vec{u},\vec{y},t,0)\,d\vec{y}+$$

$$+\sum_{T\in T^m_{m-1}}(-1)^{\varepsilon(T)}\int\limits_0^t\int\limits_{\Delta_{m-1}}\int\limits_{\Delta_{m-1}} f_T(\vec{y})G_{m-1}(\vec{u}^{(m-1)},\vec{y},t_{m-1},0)\cdot$$

$$\cdot\,|T(\vec{u},\vec{u}^{(m)},t,t_{m-1})|\,d\vec{u}^{(m-1)}\,d\vec{y}\,dt_{m-1}+$$

$$+\sum_{T\in T^m_{m-2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_{m-1}}\int\limits_{\Delta_{m-1}}\int\limits_{\Delta_{m-2}}\int\limits_{\Delta_{m-2}}(-1)^{\varepsilon(T)}f_T(\vec{y})G_{m-2}(\vec{u}^{(m-2)},\vec{y},t_{m-2},0)\cdot$$

$$\cdot\,|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\vec{u}^{(m-2)},t,t_{m-1},t_{m-2})|d\vec{y}d\vec{u}^{(m-2)}d\vec{u}^{(m-1)}dt_{m-2}dt_{m-1}$$

$$+\ldots+$$

$$+\sum_{T\in T^m_1}(-1)^{\varepsilon(T)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_{m-1}}\ldots\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Delta_{m-1}}\int\limits_{\Delta_{m-2}}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f_T(y)G_1(u^{(1)},y,t_1,0)\cdot$$

$$\cdot\,|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\ldots,\vec{u}^{(2)},\vec{u}^{(1)},t,t_{m-1},\ldots,t_1)|\cdot$$

$$\cdot\,dydu^{(1)}\ldots d\vec{u}^{(m-1)}dt_1\ldots dt_{m-1}.$$

The main tool in the investigation of limit theorems for functionals of stochastic flows is its mixing property with respect to spatial variable. It was proved that considered discrete-time flows and flows with continuous time are ergodic and mixing with respect to spatial variable under some conditions on covariance function [17, 21, 19]. More precisely, the upper bound for the strong mixing coefficient was obtained:

Theorem 8.5 ([19], E. Glinyanaya, 2017). *Let α denotes strong mixing coefficient of the Arraita flow at the time 1. Then for $h>0$ we have that*

$$\alpha(h) \le 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_h^{\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

These properties allow to obtain the central limit theorem for linear functionals of the flows with coalescings. Namely, limit theorems was obtained for number of clusters in the Arratia flow in the paper [22]. The following central limit theorem for $\nu_t([0;n])$ as $n \to \infty$ holds

Theorem 8.6 ([19], E. Glinyanaya, V. Fomichov, 2018). *For any* $t > 0$

$$\frac{\nu_t([0;n]) - \mathbb{E}\nu_t([0;n])}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_t^2), \quad n \to \infty,$$

where $\sigma_t^2 := \dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}}$.

Furthermore, an estimate for the rate of this convergence was obtained by proving the following inequality of the Berry-Esseen type.

Theorem 8.7 ([22], E. Glinyanaya, V. Fomichov, 2018). *For any* $n \geq 1$

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\Big\{ \frac{\nu_t([0;n]) - \mathbb{E}\nu_t([0;n])}{\sqrt{n}} \leq z \Big\} - \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-r^2/2\sigma_t^2}\, dr \right| \leq$$
$$\leq Cn^{-1/2}(\log n)^2.$$

9. Random dynamical systems generated by coalescing stochastic flows on the real line

Consider a sequence of transition probabilities $\{P^{(n)} : n \geq 1\}$, where $\{P_t^{(n)} : t \geq 0\}$ is a transition probability on $\mathbb{R}^n$. Assume that transition probabilities satisfy the following conditions.

TP1: For each $n \geq 1$ the expression

$$T_t^{(n)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) P_t^{(n)}(x, dy),\ x \in \mathbb{R}^n$$

defines a Feller semigroup on $C_0(\mathbb{R}^n)$.

TP2: Given $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ and

$$C_n = \{y \in \mathbb{R}^n : (y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) \in B_k\}$$

one has

$$P_t^{(n)}(x, C_n) = P_t^{(k)}((x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), B_k),\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

TP3: For all $x \in \mathbb{R}$,

$$P_t^{(2)}((x,x), \Delta) = 1,\ t \geq 0,$$

where $\Delta = \{(y,y) : y \in \mathbb{R}\}$ is the diagonal in the space $\mathbb{R}^2$.

TP4: For all $x \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ one has

$$t^{-1} P_t^{(1)}(x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)^c) \to 0,\ t \to 0.$$

Under this condition a transition probability $P^{(1)}$ generates a continuous Feller process on $\mathbb{R}$. Conditions **TP1**, **TP2** imply that for each $n \geq 1$ there exists a family $\{\mathbb{P}_x^{(n)}, x \in \mathbb{R}^n\}$ of probability measures on $C\big([0,\infty), \mathbb{R}^n\big)$ such that with respect to $\mathbb{P}_x^{(n)}$ the canonical process

$$X_t^{(n)}(f) = f(t), \quad f \in C\big([0,\infty), \mathbb{R}^n\big),$$

is a continuous Markov process with a transitional probability $\{P_t^{(n)} : t \geq 0\}$ and a starting point x.

TP5: For each $c < c'$ and $t > 0$ there exists a continuous increasing function $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all x, y

$$\mathbb{P}^{(2)}_{(x,y)}\Big(\forall s \in [0,t] : \ \big(X_1^{(2)}(s), X_2^{(2)}(s)\big) \in [c, c']^2 \\ \text{and } X_1^{(2)}(s) \neq X_2^{(2)}(s)\Big) \leq |m(x) - m(y)|.$$

TP6: For arbitrary $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}$ the measure $P_t^{(1)}(x, \cdot)$ has no atoms.

Theorem 9.1 ([37]). *Consider a sequence of transition probabilities*

$$\{P^{(n)} : n \geq 1\}$$

*that satisfy conditions **TP1-TP6** above. Then there exists a metric dynamical system*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\theta_h, h \in \mathbb{R}\})$$

and a perfect cocycle

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

over θ such that

$$\psi(s, t, \omega, x) = \varphi(t - s, \theta_s \omega, x)$$

is a stochastic flow of mappings generated by transition probabilities

$$\{P^{(n)} : n \geq 1\}.$$

10. Stationary points in coalescing stochastic flows

Existence of a random dynamical system generating a stochastic flow makes it possible to study invariant distributions and stationary points. A random variable η is a stationary point for the random dynamical system φ, whenever there exists a forward-invariant set of full-measure $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ (i.e. $\theta_t(\Omega_0) \subset \Omega_0$ for all $t \geq 0$), such that for all $\omega \in \Omega_0$ and $t \geq 0$

$$\varphi\big(t, \omega, \eta(\omega)\big) = \eta(\theta_t \omega).$$

In [10] existence of stationary points was studied for Arratia flows with drifts. Consider a SDE

$$dX(t) = a\big(X(t)\big)dt + dw(t),$$

where w is a Wiener process, and a is a Lipschitz function. For every $x \in \mathbb{R}$ this equation has a unique strong solution $\{X_x(t) : t \geq 0\}$ and defines a Feller semigroup of transition probabilities on $\mathbb{R}$

$$P_t^{(1)}(x, A) = \mathbb{P}(X_x(t) \in A),$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Further,

$$P_t^{(n),ind.}\big((x_1, \ldots, x_n), A_1 \times \ldots \times A_n\big) = \prod_{i=1}^{n} P_t^{(1)}(x_i, A_i),$$

where $t \geq 0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, defines a Feller transition probability on $\mathbb{R}^n$ that corresponds to an n-dimensional SDE

$$dX_i(t) = a\big(X_i(t)\big)dt + dw_i(t),\ 1 \leq i \leq n,$$

where $w_1, \ldots, w_n$ are independent Wiener processes. The result of [32, Th. 4.1] implies that there exists a unique consistent sequence of Feller transition semigroups $\{P_t^{(n),c} : n \geq 1\}$ such that

(1) for every $n \geq 1$ $\{P_t^{(n),c} : t \geq 0\}$ is a transition semigroup on $\mathbb{R}^n$;

(2) for all $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$

$$P_t^{(2),c}((x, x), \Delta) = 1,$$

where $\Delta = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ is a diagonal;

(3) Given $x \in \mathbb{R}^n$ let $X = (X_1, \ldots, X_n)$ be an $\mathbb{R}^n$-valued Feller process with the starting point x and transition probabilities $\{P_t^{(n),c} : t \geq 0\}$ and $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ be an $\mathbb{R}^n$-valued Feller process with the starting point x and transition probabilities $\{P_t^{(n),ind.} : t \geq 0\}$. Let

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | \exists i, j :\ 1 \leq i < j \leq n, X_i(t) = X_j(t)\}$$

be the first meeting time for processes $X_1, \ldots, X_n$, and

$$\tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0 | \exists i, j :\ 1 \leq i < j \leq n, \tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_j(t)\}$$

be the first meeting time for processes $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$. Then the distributions of stopped processes

$$\{(X_1(t \wedge \tau), \ldots, X_n(t \wedge \tau)) : t \geq 0\}$$

and

$$\{(\tilde{X}_1(t \wedge \tilde{\tau}), \ldots, \tilde{X}_n(t \wedge \tilde{\tau})) : t \geq 0\}$$

coincide.

Denote by $\psi = \{\psi_{s,t} : -\infty < s \le t < \infty\}$ a stochastic flow on $\mathbb{R}$, such that for all $s \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$, and $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ the finite-point motion

$$t \to (\psi_{s,s+t}(x_1), \dots, \psi_{s,s+t}(x_n)), t \ge 0,$$

is a Feller process with a starting point x and transition probabilities $\{P_t^{(n),c} : t \ge 0\}$. We will assume that ψ is generated by a random dynamical system φ.

Theorem 10.1 ([10]). *Let φ be a random dynamical system that corresponds to the Arratia flow with the drift a. Assume that the drift a is Lipschitz and for some $\lambda > 0$ and all $x, y \in \mathbb{R}$ one has*

$$\big(a(x) - a(y)\big)(x - y) \le -\lambda(x - y)^2.$$

Then there exists a unique stationary point η for the random dynamical system φ.

Theorem 10.2 ([10]). *Let φ be a random dynamical system that corresponds to the Arratia flow without drift (i.e. $a = 0$). Then there is no stationary point η for the random dynamical system φ.*

11. Duality for coalescing stochastic flows on the real line

Backward flow $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_{t,s} : -\infty < s \le t < \infty\}$ is *dual* to the flow $\psi = \{\psi_{s,t} : -\infty < s \le t < \infty\}$, if for all $s \le t$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\psi_{s,t}(x) - y)(x - \tilde{\psi}_{t,s}(y)) \ge 0.$$

Consider a sequence of transition probabilities $\{P^{(n)} : n \ge 1\}$ that satisfy conditions **TP1-TP6** above. Given reals $a < b$ and $t > 0$ denote

$$f_{a,b,t} = \sup_{a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b} \mathbb{P}^{(3)}_{(x_1,x_2,x_3)}(\forall s \in [0,t]\ a \le X_1^{(3)}(s) < X_2^{(3)}(s) < X_3^{(3)}(s) \le b)$$

Let also

$$w_{a,b}(\varepsilon, \delta) = \inf\big\{t > 0 : \sup_{x \in [a,b]} P_t^{(1)}(x, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)^c) \ge \delta t\big\}.$$

Theorem 11.1 ([36]). *Assume that for any reals $a < b$ and $t > 0$*

$$\liminf_{\varepsilon,\delta \to 0} \frac{f_{a,b,t}(8\varepsilon)}{w_{a,b}(\varepsilon, \delta)} = 0.$$

Then there exists a metric dynamical system $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\theta_h, h \in \mathbb{R}\})$, a perfect cocycle φ over θ and a backward perfect cocycle $\tilde{\varphi}$ over θ, such that

(1) *the flow* $\psi_{s,t}(\omega, x) = \varphi(t - s, \theta_s\omega, x)$ *is a stochastic flow on* $\mathbb{R}$ *with finite-point motions determined by* $\{P^{(n)} : n \geq 1\}$;
(2) *the backward flow* $\tilde{\psi}_{t,s}(\omega, x) = \tilde{\varphi}(t - s, \theta_s\omega, x)$ *is a backward stochastic flow on* $\mathbb{R}$;
(3) *the backward stochastic flow* $\tilde{\psi}$ *is dual to the stochastic flow* ψ.

Moreover, the finite-point motions of $\tilde{\psi}$ *are determined by a sequence* $\{\tilde{P}^{(n)} : n \geq 1\}$ *which is a unique compatible sequence of coalescing Feller transition probabilities on* $\mathbb{R}$ *that satisfy the duality relation*

$$\tilde{P}^{(n)}(y, (x_1, x_2) \times (x_2, x_3) \times \ldots \times (x_n, \infty)) = \\ = P^{(n)}(x, (-\infty, y_1) \times (y_1, y_2) \times \ldots \times (y_{n-1}, y_n))$$

for all $n \geq 1$, $t \geq 0$ *and* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *such that*

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n.$$

References

[1] Baudoin F. *An introduction to the geometry of stochastic flows.* Imperial College Press, 2019.

[2] Dorogovtsev A. A. "A stochastic integral with respect to Arratia's flow". *Dokl. Akad. Nauk.* 410 (2006), pp. 156–157.

[3] Dorogovtsev A. A. "Fourier-Wiener Transform of Functionals of Arratia Flow". *Ukrainian Math. Bulletin.* 4:3 (2007), pp. 329–350.

[4] Dorogovtsev A. A. "Krylov-Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows". *Commun. Stoch. Anal.* 6:3 (2012), pp. 421–435.

[5] Dorogovtsev A. A. *Measure-valued processes and stochastic flows.* T. 66. K.: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2007.

[6] Dorogovtsev A. A. "Semigroups of finite-dimensional random projections". *Lithuanian Math. J.* 2 (2011), pp. 329–350.

[7] Dorogovtsev A. A., Gnegin A. V., and Vovchanskii M. B. "Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow". *Theory Stoch. Process.* 18:2 (2012), pp. 1–7.

[8] Dorogovtsev A. A. and Nishchenko I. I. "An analysis of stochastic flows". *Communications on Stochastic Analysis* 8:3 (2014).

[9] Dorogovtsev A. A. and Ostapenko O. V. "Large deviations for flows of interacting Brownian motions". *Lithuanian Math.Journ.* 10:3 (2010), pp. 315–339.

[10] Dorogovtsev A. A., Riabov G. V., and Schmalfuß B. "Stationary points in coalescing stochastic flows on $\mathbb{R}$". *Stochastic Processes and their Applications* 130:8 (2020), pp. 4910–4926.

[11] Dorogovtsev A. A. and Vovchanskii M. B. "Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web". *Commun. Stoch. Anal.* 12:1 (2018), pp. 89–108.

[12] Dorogovtsev A. A. and Vovchanskii M. B. "On approximations of the point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and the discretization of the initial interval". *Ukrain. Math. J.* 72:9 (2020), pp. 1179–1194.

[13] Dorogovtsev A. A. and Vovchanskii M. B. "Representations of the finite-dimensional point densities in Arratia flows with drift". *Theory Stoch. Process.* 25:1 (2020), pp. 25–36.

[14] Fontes L. R. and Newman C. M. “The full Brownian web as scaling limit of stochastic flows”. *Stoch. Dyn.* 6:2 (2006), pp. 213–228.
[15] Glinyanaya E. V. “Discrete analogue of the Krylov-Veretennikov expansion”. *Theory of Stochastic Processes* 17(33):1 (2011), pp. 39–49.
[16] Glinyanaya E. V. “Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow”. *Theory of Stochastic Processes* 18(34):2 (2012), pp. 8–14.
[17] Glinyanaya E. V. “Ergodicity with respect to the spatial variable of discrete-time stochastic flows”. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 8:1 (2015), pp. 13–20.
[18] Glinyanaya E. V. “Krylov-Veretennikov representation for the m-point motion of a discrete-time flow”. *Theory of Stochastic Processes* 20(36):1 (2015), pp. 63–77.
[19] Glinyanaya E. V. “Mixing Coefficient for Discrete-Time Stochastic Flow”. *Journal of Stochastic Analysis* 1:1 (2020).
[20] Glinyanaya E. V. “Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests”. *Theory of Stochastic Processes* 19(35):2 (2014), pp. 31–41.
[21] Glinyanaya E. V. “Spatial Ergidicity of the Harris Flows”. *Communication on Stochastic Analysis* 11:2 (2017), pp. 223–231.
[22] Glinyanaya E. V. and Fomichov V. V. “Limit Theorems for the number of clusters of the Arratia flow”. *Theory of Stochastic Processes* 23(39):2 (2018), pp. 33–40.
[23] Harris T. E. “Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R^1”. *Stochastic Process. Appl.* 17:2 (1984), pp. 187–210.
[24] Harris T. E. “Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}$”. *Stochastic Processes and their Applications* 17:3 (1984), pp. 187–210.
[25] Howitt C. and Warren J. “Dynamics for the Brownian web and the erosion flow”. *Stochastic Process. Appl.* 119:6 (2009), pp. 2028–2051.
[26] Kallenberg O. *Foundations of Modern Pobability.* Springer, 1997.
[27] Korenovskaya Y. A. “Properties of strong random operators constructed with respect to an Arratia flow”. *Ukr. Math. J.* 69:2 (2017), pp. 186–204.
[28] Krylov N. N. and Veretennikov A. Yu. “Explicit formulae for the solutions of the stochastic differential equations”. *Math. USSA Sb.* 29:2 (1976), pp. 239–256.
[29] Kunita H. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
[30] Kunita H. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Vol. 24. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, pp. xiv+346.
[31] Le Jan Y. and Raimond O. “Flows, coalescence and noise”. *Ann. Probab.* 32:2 (2004), pp. 1247–1315.
[32] Le Jan Y. and Raimond O. “Flows, coalescence and noise”. *Ann. Probab.* 32:2 (2004), pp. 1247–1315.
[33] Matsumoto H. “Coalescing stochastic flows on the real line”. *Osaka J.Math.* 26 (1989), pp. 139–158.
[34] Munasinghe R., Rajesh R., Tribe R., and Zaboronski O. “Multi-scaling of the n-point density function for coalescing Brownian motions”. *Comm. Math. Phys.* 268:3 (2006), pp. 717–725.
[35] Nishchenko I. I. “Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line”. *Theory of Stochastic Processes* 17(33):1 (2011), pp. 70–78.
[36] Riabov G. V. “Duality for coalescing stochastic flows on the real line”. *Theory of Stochastic Processes* 23 (39):2 (2018), pp. 55–74.
[37] Riabov G. V. “Random dynamical systems generated by coalescing stochastic flows on $\mathbb{R}$”. *Stochastics and Dynamics* 4 (2018).
[38] Simon B. *$P(\varphi)_2$ model of Euclidean quantum field theory.* M.: Mir, 1976.

[39] Skorokhod A. V. “Operator-valued stochastic differential equations and stochastic semi-groups”. *Uspekhi Mat.Nauk* 37:6(228) (1982), pp. 157–183.

[40] Skorokhod A. V. *Random Linear Operators.* D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

[41] Tikhomirov V. M. *Some questions in approximation theory.* Izdat. Moskov. Univ., 1976.

[42] Vovchanskii M. B. “Convergence of solutions of SDEs to Harris flows”. *Theory Stoch. Process.* 23:2 (2018), pp. 80–91.

A. A. Dorogovtsev

Institute of mathematics NAS of Ukraine, Kyiv

Email: `andrey.dorogovtsev@gmail.com`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 456–507

Про стохастичне інтегрування, диференціювання та віківське числення в аналізі білого шуму Леві

М. О. Качановський

Abstract. The paper is a survey of some author's results related to the development of the Lévy white noise analysis in terms of Lytvynov's generalization of the chaotic representation property, which is an analog of decomposition of square integrable random variables by the Hermite orthogonal polynomials in the Gaussian analysis. Namely with this approach a significant part of definitions and statements are quite similar to their prototypes from the Gaussian white noise analysis, which is very convenient for possible applications. The survey covers a fairly wide range of issues: constructions of spaces of regular and nonregular test and generalized functions; an extended stochastic integral, a Hida stochastic derivative and operators of stochastic differentiations on different spaces; elements of a Wick calculus; etc.

Анотація. Стаття є оглядом низки результатів автора, пов'язаних з розбудовою аналізу білого шуму Леві в термінах узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим, яке є аналогом розкладу квадратично інтегровних випадкових величин за ортогональними поліномами Ерміта у гауссівському аналізі. Саме при такому підході значна частина означень та тверджень є цілком аналогічними своїм прототипам із гауссівського аналізу білого шуму, що є дуже зручним для можливих застосувань. Огляд охоплює доволі широке коло питань: конструкції просторів регулярних і нерегулярних основних та узагальнених функцій; розширений стохастичний інтеграл, стохастичну похідну Хіди та оператори стохастичного диференціювання на різних просторах; елементи віківського числення; тощо.

2010 Mathematics Subject Classification: 46F05, 46F25, 47A05, 60H40, 60G51, 60H05
УДК 517.98

Ключові слова: процес Леві; властивість хаотичного розкладу; розширений стохастичний інтеграл; стохастична похідна; віківське числення

Вступ

Теорія основних та узагальнених функцій, що залежать від нескінченної кількості змінних (тобто з аргументами, що належать нескінченновимірним просторам), є дуже затребуваною у багатьох розділах сучасної фізики та математики. Існують різні підходи до побудови такої теорії. Наприклад, один з них базується на ідеї І. М. Гельфанда використовувати двоїстість між множинами функцій та мір; інший, що розроблявся у роботах Ю. М. Березанського, Ю. Г. Кондратьєва та Ю. С. Самойленка, передбачає розгляд просторів основних та узагальнених функцій як нескінченних тензорних добутків одновимірних просторів. Дуже вдалим виявився підхід, що полягає в уведенні просторів згаданих вище функцій таким чином, що дуальне спарювання між основними та узагальненими функціями породжується інтегруванням за деякою ймовірнісною мірою на дуально-ядерному просторі. Спочатку це була гауссівська міра, відповідна теорія називається *гауссівський аналіз білого шуму* (див., наприклад, [2, 14, 31, 43, 30]), пізніше були реалізовані численні узагальнення. Зокрема, важливі результати вдається отримати, використовуючи узагальнену міру Майкснера ([35]), а також міру білого шуму Леві (наприклад, [32, 7, 6]), відповідні теорії називаються *майкснерівський аналіз білого шуму* та *аналіз білого шуму Леві*.

Дуже важливу роль у гауссівському аналізі відіграє так звана *властивість хаотичного розкладу* (ВХР). Ця властивість полягає, грубо кажучи, у наступному: кожну квадратично інтегровну випадкову величину можна єдиним чином розкласти в ряд із повторних стохастичних інтегралів Іто від невипадкових функцій (див. детальний опис, наприклад, у [33]). Використовуючи ВХР, можна будувати різні простори основних та узагальнених функцій, уводити й досліджувати стохастичні інтеграли та похідні на цих просторах тощо. В аналізі білого шуму Леві, на жаль, ВХР немає (точніше, серед процесів Леві тільки вінерівський та пуассонівський мають цю властивість, див. подробиці у [38]); але існують різні її узагальнення. Так, наприклад, узагальнення, запропоноване К. Іто [16] (див. також [5]), полягає в тому, що процес Леві L розкладається за формулою Леві-Хінчина у суму гауссівського процесу та стохастичного інтеграла вигляду $\int_{[0,t)}\int_{\mathbb{R}} x\widetilde{N}(du,dx)$, де $\widetilde{N}$ – компенсована пуассонівська випадкова міра процесу L, а квадратично інтегровні випадкові величини розкладаються в ряди, у яких фігурують повторні стохастичні інтеграли від невипадкових функцій за гауссівським процесом та за випадковою мірою $\widetilde{N}$; при узагальненні Нуаларта-Скоутенса [34] (див. також [36]) квадратично інтегровні випадкові величини розкладаються в ряди з повторних стохастичних інтегралів від невипадкових функцій за спеціальним чином побудованими з використанням вихідного процесу Леві випадковими процесами; узагальнення, запропоноване Є. В. Литвиновим [32] (див. також [4]), базується на ортогоналізації мономів в просторі квадратично інтегровних випадкових величин (див. детальний опис у Підрозділі 1.2). Взаємозв'язок між деякими (включаючи згадані вище) узагальненнями ВХР в аналізі білого шуму Леві описано, зокрема, у [32, 1, 39, 7, 37, 6, 23]. Таким чином, в залежності від задач, що розглядаються, можна обрати найбільш придатне узагальнення ВХР і будувати за його допомогою простори основних та узагальнених функцій, а також інші об'єкти аналізу.

Дана робота є оглядом низки результатів автора, пов'язаних з розбудовою аналізу білого шуму Леві в термінах узагальнення ВХР, запропонованого Є. В. Литвиновим. Саме при такому підході значна частина означень та тверджень є цілком аналогічними своїм прототипам із класичного гауссівського аналізу білого шуму (іноді навіть може здаватись, що йдеться про переформулювання зі зміною позначень, бо все нетривіальне «ховається» у доведеннях), що є дуже зручним для можливих застосувань. Огляд охоплює доволі широке коло питань: конструкцію просторів регулярних і нерегулярних основних та узагальнених функцій; розширений стохастичний інтеграл, стохастичну похідну Хіди та оператори стохастичного диференціювання на різних просторах; елементи віківського числення на просторах узагальнених функцій; тощо. Спроба викласти весь цей матеріал із детальними чи навіть конспективними доведеннями привела б до неприпустимо великого обсягу статті, до того ж це може відволікати читача, який не готовий глибоко занурюватись у технічні деталі, а хоче лише отримати загальне уявлення про запропоновану версію аналізу білого шуму Леві. Втім, кожне твердження супроводжується посиланням на публікацію, у якій міститься його доведення, а часто і коротким описом ідеї доведення.

Наведемо перелік публікацій, які лягли в основу огляду, та дамо необхідні коментарі. Результати, пов'язані із розширеним стохастичним інтегралом та стохастичною похідною Хіди на просторі квадратично інтегровних випадкових величин, анонсовано у [27] та детально викладено у [23]; в останній статті встановлено також, що стохастичні інтеграли на цьому просторі, побудовані у термінах згаданих вище узагальнень ВХР, співпадають. Простори регулярних і нерегулярних основних та узагальнених функцій уведено у [20], там же побудовано і досліджено розширений стохастичний інтеграл та стохастичну похідну Хіди на просторах узагальнених та основних функцій відповідно. У роботах [10, 8] розглянуто стохастичні інтеграл та похідну на просторах *регулярних* основних та узагальнених функцій відповідно. Тут слід відзначити, що простори *регулярних* й *нерегулярних* основних та узагальнених функцій доволі суттєво відрізняються, що обумовлює, зокрема, неможливість уведення природним чином стохастичних інтеграла та похідної на просторах *нерегулярних* основних та узагальнених функцій відповідно (детальніше про це див. у Зауваженні 4.2.5). Втім, на вказаних просторах можна уводити та вивчати природні аналоги згаданих операторів. Ми не торкаємось цих питань у нашому огляді, зацікавлений читач може знайти детальний виклад у [26, 25]. Оператори стохастичного диференціювання, які є тісно пов'язаними зі стохастичними інтегралом та похідною, і діють на ортогональні розклади основних та узагальнених функцій аналогічно дії звичайного диференціювання на ряди Тейлора, вивчаються на просторах *регулярних* основних та узагальнених функцій у [9, 8, 13], на просторах *нерегулярних* основних функцій – у [26]. Як і стохастична похідна Хіди, ці оператори не мають природного продовження на простори *нерегулярних* узагальнених функцій, але на вказаних просторах можна уводити та вивчати їхні природні аналоги. Ми трохи торкнемось цього питання у Підрозділі 4.3, детальний виклад наведено у [19, 25]. У межах віківського числення вивчаються, зокрема, природні аналоги поточкового добутку (віківський добуток) та голоморфних функцій (віківські версії голоморфних функцій) на просторах узагальнених функцій. У *регулярному* випадку ці питання, включаючи зв'язок між віківським численням та операторами стохастичного диференціювання (зокрема, встановлено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку задовольняє правило Лейбніца відносно віківського множення), вивчала учениця автора М. М. Фрей (Дирів) [11], у *нерегулярному* – автор [24]. Взаємозв'язок між віківським численням і стохастичним інтегруванням у регулярному та нерегулярному випадках вивчається у [12] та [17] відповідно.

Статтю організовано наступним чином. В першому розділі ми розглядаємо процес Леві L та будуємо пов'язаний з L ймовірнісний простір (трійку), зручний для подальшого викладу; після цього ми описуємо узагальнення ВХР, запропоноване Є. В. Литвиновим. У другому розділі розглянуто розширений стохастичний інтеграл та стохастичну похідну Хіди на просторі квадратично інтегровних випадкових величин. У третьому розділі уведено простори *регулярних* основних та узагальнених функцій; на цих просторах розглянуто стохастичні інтеграл та похідну; уведено оператори стохастичного диференціювання та описано властивості цих операторів; насамкінець уведено віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій і описано їхні властивості та зв'язок зі стохастичними диференціюванням та інтегруванням. Зокрема, наведено приклади розв'язання стохастичних інтегральних рівнянь з віківським добутком. У четвертому розділі уведено простори *нерегулярних* основних та узагальнених функцій; розглянуто розширений стохастичний інтеграл на просторах нерегулярних узагальнених функцій; також за аналогією із третім розділом уведено віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на цих просторах і описано їхні властивості та зв'язок зі стохастичним інтегруванням.

1. Попередні відомості

В цій роботі будемо позначати через $\|\cdot\|_H$ або $|\cdot|_H$ норму в просторі H; через $(\cdot,\cdot)_H$ – дійсний (тобто білінійний) скалярний добуток у просторі H; через $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_H$ або $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ – дуальне спарювання, породжене скалярним добутком в просторі H. Також ми використовуємо позначення pr lim (відповідно, ind lim) для проєктивної (відповідно, індуктивної) границі сім'ї просторів; це позначення означає, що граничний простір наділено топологією проєктивний (відповідно, індуктивної) границі (див., наприклад, [40]).

1.1. **Процес Леві та його ймовірнісний простір.** Скрізь далі позначатимемо $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$. Нехай $L = (L_u)_{u\in\mathbb{R}_+}$ – дійснозначний локально квадратично інтегровний процес Леві (тобто неперервний за ймовірністю випадковий процес на $\mathbb{R}_+$ зі стаціонарними незалежними приростами і такий, що $L_0 = 0$, див. детальний опис, наприклад, у [3]) без гауссівської частини та зсуву. Добре відомо (наприклад, [7]), що характеристична функція L має вигляд

$$\mathbb{E}[e^{i\theta L_u}] = \exp\Big[u\int_{\mathbb{R}}(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu(dx)\Big], \tag{1.1}$$

де ν – міра Леві процесу L, що є мірою на $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, тут і далі через $\mathcal{B}$ позначено борелівську σ-алгебру, через $\mathbb{E}$ позначено математичне сподівання. Накладемо додатково такі умови: *ν є мірою Радона з носієм, що містить нескінченну кількість точок; $\nu(\{0\}) = 0$; існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty$; та $\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1$.*

Визначимо міру білого шуму процесу L. Нехай $\mathcal{D}$ – простір Шварца всіх дійснозначних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+$ з компактними носіями. Як добре відомо (наприклад, [40]), $\mathcal{D}$ можна наділити топологією проєктивної границі, породженою сім'єю соболевських просторів (див. детальніше у Підрозділі 4.1). Нехай $\mathcal{D}'$ – множина лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$. Варто відзначити, що $\mathcal{D}'$ та $\mathcal{D}$

є відповідно негативним та позитивним просторами ланцюжка

$$\mathcal{D}' \supset L^2(\mathbb{R}_+) \supset \mathcal{D}, \tag{1.2}$$

де $L^2(\mathbb{R}_+)$ – простір (класів) квадратично інтегровних за мірою Лебега дійснозначних функцій на $\mathbb{R}_+$ [40]. Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дуальне спарювання, породжене скалярним добутком у $L^2(\mathbb{R}_+)$, це позначення будемо використовувати і для дуальних спарювань у тензорних степенях комплексифікації ланцюжку (1.2).

Означення 1.1.1. Ймовірнісна міра μ на вимірному просторі

$$(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}')),$$

де $\mathcal{C}$ позначає циліндричну σ-алгебру, з перетворенням Фур'є

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle \omega, \varphi \rangle} \mu(d\omega) = \exp\Big[\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (e^{i\varphi(u)x} - 1 - i\varphi(u)x) du \nu(dx) \Big], \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

називається *мірою білого шуму Леві.*

Коректність цього визначення (тобто існування μ) випливає з теореми Бохнера-Мінлоса (наприклад, [15]), див. [32]. Нижче будемо вважати, що *σ-алгебра $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ поповнена відносно μ.*

Позначимо через $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ простір (класів) квадратично інтегровних за μ комплекснозначних функцій на $\mathcal{D}'$ (це позначення буде дуже часто використовуватись надалі). Нехай $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ та послідовність $(\varphi_k \in \mathcal{D})_{k \in \mathbb{N}}$ збігається до f у $L^2(\mathbb{R}_+)$, коли $k \to \infty$ (нагадаємо, що $\mathcal{D}$ є щільною множиною у $L^2(\mathbb{R}_+)$). Можна показати (наприклад, [32, 7, 6, 23]), що $\langle \circ, f \rangle := (L^2) - \lim_{k \to \infty} \langle \circ, \varphi_k \rangle$ є коректно визначеним елементом (L^2) (зокрема, $\langle \circ, f \rangle$ не залежить від того, якою саме послідовністю елементів $\mathcal{D}$ апроксимовано f).

Позначимо через 1_A індикатор множини A, і покладемо $1_{[0,0)} \equiv 0$ (формальний півінтервал $[0,0)$ природно вважати порожньою множиною). З (1.1) та (1.3) випливає, що $\big(\langle \circ, 1_{[0,u)} \rangle\big)_{u \in \mathbb{R}_+}$ можна ототожнити з процесом Леві на ймовірнісному просторі (ймовірнісній трійці) $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$, див., наприклад, [7, 6]. Таким чином, для кожного $u \in \mathbb{R}_+$ маємо $L_u = \langle \circ, 1_{[0,u)} \rangle \in (L^2)$.

Зауважимо, що похідна у сенсі узагальнених функцій процесу Леві (тобто білий шум Леві) $\dot{L}_{\cdot}(\omega) = \langle \omega, \delta_{\cdot} \rangle \equiv \omega(\cdot)$, де δ є дельта-функцією Дірака. Отже, $\dot{L}$ є узагальненим випадковим процесом (в сенсі [41]) з траєкторіями з $\mathcal{D}'$, та μ є мірою $\dot{L}$ у класичному сенсі [42].

Зауваження 1.1.2. Процес Леві без гауссівської частини та зсуву є *пуассонівським процесом*, якщо його міра Леві є точковою масою (дельта-мірою), зосередженою в одиниці. Ця міра не задовольняє накладені вище умови (її носій не містить нескінченну кількість точок); однак, всі результати, наведені у цій статті, мають природні аналоги у пуассонівському аналізі. Зацікавлений читач може знайти більше інформації про особливості пуассонівського випадку у [23], Підрозділ 1.2.

1.2. **Литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу.** Будемо позначати символом $\widehat{\otimes}$ симетричне тензорне множення, нижнім індексом $\mathbb{C}$ комплексифікації лінійних топологічних просторів (елементами $H_{\mathbb{C}}$ є $a+bi$, $a, b \in H$). Нехай $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Позначимо через $\mathcal{P}$ множину комплекснозначних поліномів на $\mathcal{D}'$, яка складається з нуля та елементів вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}',\ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},\ N_f \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f – *степінь поліному* f; $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{C}$. Міра білого шуму Леві μ має голоморфне у нулі перетворення Лапласа (це випливає з (1.3) та властивостей міри Леві ν, див. також [32]), отже $\mathcal{P}$ є щільною множиною у (L^2) [44]. Позначимо через $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, множину поліномів степені не більше n, через $\overline{\mathcal{P}}_n$ – замикання $\mathcal{P}_n$ в (L^2). Нехай для $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ (ортогональна різниця в (L^2)); покладемо також $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. Зрозуміло, що

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n. \tag{1.4}$$

Нехай $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Позначимо через $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \in (L^2)$ ортогональну проєкцію монома $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ на $\mathbf{P}_n$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot, \cdot)_{\text{ext}}$ на $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поклавши для $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{\text{ext}} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle : \mu(d\omega). \tag{1.5}$$

Доведення коректності цього визначення співпадає з точністю до очевидних модифікацій із доведенням коректності відповідного визначення у [32].

Позначимо через $|\cdot|_{\text{ext}}$ норми, що відповідають скалярним добуткам (1.5), тобто $|\cdot|_{\text{ext}} := \sqrt{(\cdot, \bar{\cdot})_{\text{ext}}}$. Нехай для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ гільбертів простір $\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ є поповненням $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ за відповідною нормою $|\cdot|_{\text{ext}}$ (для скалярних добутків та норм у $\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ ми збережемо позначення $(\cdot, \cdot)_{\text{ext}}$ та $|\cdot|_{\text{ext}}$ відповідно). Для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ *визначимо віківський моном*

$:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle: \stackrel{\text{def}}{=} (L^2){-}\lim_{k\to\infty} :\langle\circ^{\otimes n}, f_k^{(n)}\rangle:$, де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \underset{k\to\infty}{\to} F^{(n)}$ в $\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ (коректність цього визначення можна довести методом «змішаних послідовностей»). Легко бачити що, зокрема,

$$:\langle\circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle: = \langle\circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle = F^{(0)}, \qquad :\langle\circ, F^{(1)}\rangle: = \langle\circ, F^{(1)}\rangle$$

(пор. з [32]).

Оскільки, очевидно, для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ множина

$$\{:\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle: | f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}\}$$

є щільною в $\mathbf{P}_n$, з розкладу (1.4) випливає таке твердження.

Теорема 1.2.1. (литвинівське узагальнення ВХР, пор. з [32]) *Випадкова величина $F \in (L^2)$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle: \tag{1.6}$$

(ряд збігається у (L^2)) та

$$\|F\|_{(L^2)}^2 = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbb{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|_{\text{ext}}^2 < \infty. \tag{1.7}$$

Наслідок 1.2.2. *Для $F, G \in (L^2)$ дійсний скалярний добуток має вигляд*

$$(F, G)_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} F(\omega) G(\omega) \mu(d\omega) = \mathbb{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{\text{ext}},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно. Зокрема, для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:, :\langle\circ^{\otimes m}, G^{(m)}\rangle:)_{(L^2)} = \delta_{nm} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{\text{ext}},$$

де δ_{nm} – символ Кронекера.

Зауваження 1.2.3. Розклад (1.6) є аналогом розкладу квадратично інтегровної випадкової величини за ортогональними поліномами Ерміта (який є еквівалентним розкладу за повторними стохастичними інтегралами Іто) у гауссівському аналізі. В той самий час віківські мономи з (1.6) є поліномами лише у тому випадку, коли процес Леві є стаціонарним процесом Майкснера. Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про це у [32].

Для отримання багатьох результатів, пов'язаних з просторами $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, необхідно рахувати скалярні добутки та норми у цих просторах. Наведена вище формула (1.5) практично непридатна для таких підрахунків, але, на щастя, існує відносно проста явна формула для згаданих скалярних добутків, отримана Є. В. Литвиновим у роботі [32]. Ми не будемо безпосередньо користуватись цією формулою у нашому огляді, але вважаємо за доцільне навести її задля зручності читача (у трохи модифікованій та більш зручній для певних підрахунків формі, отриманій у [23]). Позначимо через $\|\cdot\|_\nu$ норму в просторі $L^2(\mathbb{R},\nu)$ (класів) квадратично інтегровних за мірою Леві ν (див. (1.1)) дійснозначних функцій на $\mathbb{R}$. Нехай

$$p_n(x) := x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x,$$
$$a_{n,j} \in \mathbb{R},\ j \in \{1,\dots,n-1\},\ n \in \mathbb{N},$$

є ортогональними у $L^2(\mathbb{R},\nu)$ поліномами, тобто для довільних натуральних чисел n,m таких, що $n \neq m$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\nu(dx) = 0$. Для $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned}
&(F^{(n)},G^{(n)})_{\mathrm{ext}} \equiv (F^{(n)},G^{(n)})_{\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}} \\
&\quad= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\\ l_1>l_2>\cdots>l_k,\\ l_1s_1+\cdots+l_ks_k=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times \\
&\quad\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} F^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\dots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\times \\
&\quad\times G^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\dots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\times \\
&\qquad\qquad\qquad\times du_1\cdots du_{s_1+\cdots+s_k}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Зокрема, для $n=1$ $(F^{(1)},G^{(1)})_{\mathrm{ext}} = (F^{(1)},G^{(1)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}}$, для $n=2$

$$(F^{(2)},G^{(2)})_{\mathrm{ext}} = (F^{(2)},G^{(2)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}} + \frac{\|p_2\|_\nu^2}{2}\int_{\mathbb{R}_+} F^{(2)}(u,u)G^{(2)}(u,u)du,$$

і т. д. Зауважимо, що для кожного натурального $n>1$ простір $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ є симетричним підпростором простору (класів) квадратично інтегровних за певною мірою Радона комплекснозначних функцій на $\mathbb{R}_+^n$.

Позначимо $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$, тоді $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}$ (ці позначення будуть дуже часто використовуватись надалі). З (1.8) випливає, що $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, і для $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ простір $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ можна ототожнити із власним підпростором простору $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, який складається зі «зникаючих на діагоналях» елементів (грубо кажучи, таких, що $F^{(n)}(u_1, \dots, u_n) = 0$, якщо існують $k, j \in \{1, \dots, n\}$: $k \neq j$, але $u_k = u_j$). У цьому сенсі *простір* $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ *є розширенням (англ. extension) простору* $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, цим пояснюється, чому ми використовуємо індекси «ext» у наших позначеннях.

2. Стохастичні інтеграл та похідна на просторі квадратично інтегровних випадкових величин

2.1. **Розширений стохастичний інтеграл.** Розклад (1.6) визначає ізометричний ізоморфізм (узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала)

$$\mathbf{I} : (L^2) \to \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} n!\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$$

між простором квадратично інтегровних випадкових величин (L^2) та зваженим розширеним симетричним простором Фока $\mathop{\oplus}\limits_{n=0}^{\infty} n!\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$: для $F \in (L^2)$ з розкладом (1.6) $\mathbf{I}F = (F^{(0)}, F^{(1)}, \dots) \in \mathop{\oplus}\limits_{n=0}^{\infty} n!\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$. Нехай $\mathbf{1} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – одиничний оператор. Тоді оператор

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{1} : (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \big(\mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} n!\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \big) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \cong \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} n!(\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})$$

є ізометричним ізоморфізмом між просторами

$$(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \text{та} \quad \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} n!(\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}).$$

Зрозуміло, що для довільних $m \in \mathbb{Z}_+$ та $F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ вектор $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, F_{\cdot}^{(m)}, 0, \dots)$ належить $\mathop{\oplus}\limits_{n=0}^{\infty} n!(\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})$. Покладемо

$$:\langle \circ^{\otimes m}, F_{\cdot}^{(m)} \rangle: \stackrel{def}{=} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})^{-1}(\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, F_{\cdot}^{(m)}, 0, \dots) \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \tag{2.1}$$

За побудовою елементи $:\langle \circ^{\otimes n}, F_{\cdot}^{(n)} \rangle:$, $n \in \mathbb{Z}_+$, формують ортогональний базис у просторі $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ у тому сенсі, що F *належить* $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *якщо та лише якщо* F *можна єдиним чином представити у вигляді ряду*

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F_{\cdot}^{(n)} \rangle:, \quad F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.2}$$

який збігається у $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *тобто*

$$\|F\|^2_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \|(\mathbf{I}\otimes\mathbf{1})F\|^2_{\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} n!(\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \sum_{n=0}^{\infty} n!|F^{(n)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty. \quad (2.3)$$

Опишемо конструкцію розширеного стохастичного інтеграла за процесом Леві, яка базується на розкладі (2.2). Нехай $F^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$. У класі еквівалентності $F^{(n)}_{\cdot}$ оберемо представника (функцію) $\dot{f}^{(n)}_{\cdot} \in F^{(n)}_{\cdot}$ такого, що

$$\forall u, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}_+ \ \big\{\exists k \in \{1, \dots, n\} : u = u_k\big\} \Rightarrow \dot{f}^{(n)}_u(u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (2.4)$$

(тобто $\dot{f}^{(n)}_u(u_1, \dots, u_n) = 0$, якщо аргумент u співпадає хоча б з одним з аргументів $u_1, \dots, u_n$). Нехай $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $\widehat{f}^{(n)}_{\Delta}$ – симетризація функції $\dot{f}^{(n)}_{\cdot} 1_{\Delta}(\cdot)$ за $n+1$ змінною. Визначимо $\widehat{F}^{(n)}_{\Delta} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{\mathrm{ext}}$ як клас еквівалентності в $\mathcal{H}^{(n+1)}_{\mathrm{ext}}$, породжений $\widehat{f}^{(n)}_{\Delta}$ (тобто $\widehat{f}^{(n)}_{\Delta} \in \widehat{F}^{(n)}_{\Delta}$). Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного результату з [23].

Лема 2.1.1. *Для довільних* $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *та* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *елемент* $\widehat{F}^{(n)}_{\Delta} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{\mathrm{ext}}$ *визначений коректно (зокрема,* $\widehat{F}^{(n)}_{\Delta}$ *не залежить від вибору представника* $\dot{f}^{(n)}_{\cdot} \in F^{(n)}_{\cdot}$, *який задовольняє умову* (2.4)*), та*

$$|\widehat{F}^{(n)}_{\Delta}|_{\mathrm{ext}} \le |F^{(n)}_{\cdot} 1_{\Delta}(\cdot)|_{\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le |F^{(n)}_{\cdot}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \quad (2.5)$$

Означення 2.1.2. Для $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві $\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)$, поклавши

$$\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)}_{\Delta}\rangle:, \quad (2.6)$$

де $\widehat{F}^{(0)}_{\Delta} := F^{(0)}_{\cdot} 1_{\Delta}(\cdot) \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{(1)}_{\mathrm{ext}}$ та $\widehat{F}^{(n)}_{\Delta} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{\mathrm{ext}}$, $n \in \mathbb{N}$, побудовані за ядрами $F^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ з розкладу (2.2) для F, якщо ряд у правій частині (2.6) збігається у (L^2).

Область визначення цього інтеграла, тобто оператора

$$\int_{\Delta} \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2), \quad (2.7)$$

складається з $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ таких, що (див. (1.7))

$$\Big\| \int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u \Big\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!|\widehat{F}^{(n)}_{\Delta}|^2_{\mathrm{ext}} < \infty. \quad (2.8)$$

Зауважимо, що інтеграл (2.7) називається *розширеним*, оскільки він є узагальненням стохастичного інтеграла Іто. Точніше, справедливе наступне твердження, яке легко випливає з відповідного результату [23].

Теорема 2.1.3. *Нехай $F \in (L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ інтегровне за Іто (тобто F узгоджене з потоком σ-алгебр, породженим процесом Леві L). Тоді для кожного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ F інтегровне у розширеному сенсі (тобто F належить області визначення інтеграла* (2.7)*) і $\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u = \int_\Delta F(u)dL_u$, де інтеграл у правій частині є стохастичним інтегралом Іто.*

Зауваження 2.1.4. Кожне $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ можна інтерпретувати як певну функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в (L^2). Умова інтегровності за Іто означає, що для кожного $t \in \mathbb{R}_+$ $F(t)$ (як функція на $\mathcal{D}'$ зі значеннями в $\mathbb{C}$) є вимірною відносно σ-алгебри, породженої $\{L_u : u \leq t\}$ (тобто найменшої σ-алгебри, відносно якої є вимірними всі L_u з $u \leq t$).

Зауважимо, що умову інтегровності за Іто можна сформулювати і «на мові ядер з розкладу (2.2)»: $F \in (L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є інтегровним за Іто якщо та лише якщо кожне ядро $F_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ з розкладу (2.2) містить представника (функцію) $\dot{f}_\cdot^{(n)} \in F_\cdot^{(n)}$ такого, що $\dot{f}_u^{(n)}(u_1,\dots,u_n) = 0$ коли $\max(u_1,\dots,u_n) > u$.

2.2. **Стохастична похідна Хіди.** Опишемо конструкцію стохастичної похідної Хіди на (L^2), яка базується на розкладі (1.6). Нехай

$$G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$ – представник $G^{(n)}$. Розглянемо $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, тобто відділимо один аргумент $\dot{g}^{(n)}$, та визначимо $G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ як клас еквівалентності у $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, породжений $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ (тобто $\dot{g}^{(n)}(\cdot) \in G^{(n)}(\cdot)$).

Лема 2.2.1. *Для кожного $G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, елемент*

$$G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

визначений коректно (зокрема, $G^{(n)}(\cdot)$ не залежить від вибору представника $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$) та

$$|G^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq |G^{(n)}|_{\mathrm{ext}}. \tag{2.9}$$

Доведення цього твердження співпадає з точністю до очевидних модифікацій із доведенням відповідного результату у [23].

Зауваження 2.2.2. Варто відзначити, що, попри оцінку (2.9), простір $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, не є підпростором простору $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, оскільки різні елементи $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ можуть співпадати у $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, тобто представники різних класів еквівалентності у $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ можуть потрапляти у один і той самий клас еквівалентності у $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Означення 2.2.3. Для $G \in (L^2)$ та $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо стохастичну похідну Хіди $1_\Delta(\cdot)\partial.G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши

$$1_\Delta(\cdot)\partial.G := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1){:}\langle \circ^{\otimes n}, G^{(n+1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)\rangle{:}, \tag{2.10}$$

де $G^{(n+1)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n+1)}$ – ядра з розкладу (1.6) для G, які розглядаються як елементи $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (в описаному вище сенсі), якщо ряд у правій частині (2.10) збігається у $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Область визначення цієї похідної, тобто оператора

$$1_\Delta(\cdot)\partial. : (L^2) \to (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.11}$$

складається з $G \in (L^2)$ таких, що (див. (2.3))

$$\|1_\Delta(\cdot)\partial.G\|^2_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!(n+1)|G^{(n+1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty. \tag{2.12}$$

Як і у класичному гауссівському аналізі, розширений стохастичний інтеграл та стохастична похідна Хіди є спряженими один до одного операторами. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 2.2.4. ([23]) *Для довільного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ розширений стохастичний інтеграл* (2.7) *та стохастична похідна Хіди* (2.11) *є взаємно спряженими операторами:*

$$\int_\Delta \circ \widehat{d}L = \big(1_\Delta(\cdot)\partial.\big)^*, \quad 1_\Delta(\cdot)\partial. = \Big(\int_\Delta \circ \widehat{d}L\Big)^*, \tag{2.13}$$

тобто для довільних $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $G \in (L^2)$, що задовольняють умови (2.8) *та* (2.12) *(належать областям визначення інтеграла* (2.7) *та похідної* (2.11)*) відповідно,*

$$\Big(\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)} = \big(F(\cdot), 1_\Delta(\cdot)\partial.G\big)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.14}$$

Зокрема, інтеграл (2.7) *та похідна* (2.11) *є замкненими операторами.*

Відзначимо, що рівності (2.13) можна використовувати як альтернативні визначення розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди.

Зауваження 2.2.5. Рівність (2.14) можна записати у вигляді

$$\Big(\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)} = \int_{\Delta} \big(F(u), \partial_u G\big)_{(L^2)} du \equiv \int_{\Delta} \big(\partial_u^{\dagger} F(u), G\big)_{(L^2)} du,$$

отже, розширений стохастичний інтеграл $\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u$ можна *формально* представити як $\int_{\Delta} \partial_u^{\dagger} F(u) du$, тут $\partial_u^{\dagger}$ – *формальний* оператор, спряжений до похідної Хіди $\partial_u \equiv 1_{\mathbb{R}_+}(u)\partial_u$ у точці u (пор. з [29, 35]). Зауважимо, що операторам ∂_u та $\partial_u^{\dagger}$ можна надати неформального сенсу, якщо визначити їх на придатних просторах основних та узагальнених функцій відповідно.

Одним з основних недоліків стохастичних інтеграла та похідної на просторі квадратично інтегровних випадкових величин є залежність їхніх областей визначення від вимірної множини Δ, що може привести до певних проблем у застосуваннях. Наприклад, стохастичний інтеграл Іто має таку властивість: для будь-яких $t_1, t_2, t_3 \in [0, +\infty]$ таких, що $t_1 < t_2 < t_3$,

$$\int_{[t_1,t_2)} \circ(u) dL_u + \int_{[t_2,t_3)} \circ(u) dL_u = \int_{[t_1,t_3)} \circ(u) dL_u. \qquad (2.15)$$

Ця властивість, зокрема, відіграє важливу роль у теорії стохастичних інтегральних рівнянь. *Формально* розширений стохастичний інтеграл також задовольняє рівність (2.15), але кожен з трьох інтегралів у цій рівності має власну область визначення, що робить неможливим застосування згаданої рівності для низки задач. Обійти вказану проблему можна, звузивши області визначення стохастичних інтеграла та похідної так, щоб зробити ці області незалежними від Δ. Але «платою» буде втрата замкненості згаданих операторів (вони будуть лише допускати замикання) та виникнення низки додаткових обмежень. Інший можливий шлях – увести у розгляд природні оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин, на просторах яких стохастичні інтеграли та похідні можна природним чином визначити як лінійні *неперервні* оператори з областями визначення, що співпадають із відповідними просторами. Детальний опис реалізації цього шляху наведено у наступних розділах статті.

3. Елементи аналізу білого шуму Леві на регулярному оснащенні простору квадратично інтегровних випадкових величин

3.1. Регулярне оснащення простору (L^2). Позначимо

$$\mathcal{P}_W := \{f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle: | f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, N_f \in \mathbb{Z}_+\} \subset (L^2). \tag{3.1}$$

Приймемо за умовчанням $\beta \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ у випадку $\beta \neq 0$, та $q \in \mathbb{Z}_+$ якщо $\beta = 0$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ на $\mathcal{P}_W$, поклавши для

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle:, \ g = \sum_{n=0}^{N_g} :\langle\circ^{\otimes n}, g^{(n)}\rangle: \in \mathcal{P}_W \tag{3.2}$$

$$(f,g)_{q,\beta} := \sum_{n=0}^{\min(N_f,N_g)} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathrm{ext}}. \tag{3.3}$$

Легко перевірити [11], що $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ задовольняє аксіоми скалярного добутку.

Позначимо через $(L^2)_q^\beta$ поповнення $\mathcal{P}_W$ за нормами, породженими скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$, та покладемо $(L^2)^\beta := \operatorname{pr\,lim}_{q\to+\infty} (L^2)_q^\beta$. Легко бачити, що $F \in (L^2)_q^\beta$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що F розкладається в ряд (1.6), який збігається у $(L^2)_q^\beta$, тобто

$$\|F\|^2_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F^{(n)}|^2_{\mathrm{ext}} < \infty; \tag{3.4}$$

і $F \in (L^2)^\beta$ якщо та лише якщо F можна єдиним чином представити у вигляді (1.6), а відповідний ряд (3.4) збігається для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$. Для $F, G \in (L^2)_q^\beta$ скалярний добуток у $(L^2)_q^\beta$ має вигляд

$$(F,G)_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (F^{(n)}, G^{(n)})_{\mathrm{ext}},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно.

Наступне твердження є тривіальною модифікацією подібного твердження з роботи [20].

Твердження 3.1.1. *Для довільних $\beta \in (0,1]$ та $q \in \mathbb{Z}$, так само як і для $\beta = 0$ та $q \in \mathbb{Z}_+$, простір $(L^2)_q^\beta$ щільно та неперервно вкладено у простір $(L^2) = (L^2)_0^0$.*

Зважаючи на цей результат, побудуємо ланцюжок

$$(L^2)^{-\beta} \supset (L^2)_{-q}^{-\beta} \supseteq (L^2) = (L^2)_0^0 \supseteq (L^2)_q^\beta \supset (L^2)^\beta, \tag{3.5}$$

де $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta} = \operatorname{ind}\lim_{q\to+\infty}(L^2)_{-q}^{-\beta}$ – простори, спряжені відповідно до $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ відносно (L^2).

Означення 3.1.2. Ланцюжок (3.5) називається параметризованим регулярним оснащенням простору (L^2) квадратично інтегровних випадкових величин. Простори $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ називаються параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних основних функцій, а простори $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta}$ – параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних узагальнених функцій.

Наступне твердження випливає безпосередньо із цього означення та загальної теорії дуальності.

Твердження 3.1.3. *1. Кожну регулярну узагальнену функцію*

$$F \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$$

можна єдиним чином представити як формальний ряд (1.6) з ядрами $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, який збігається у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$, тобто

$$\|F\|^2_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}|F^{(n)}|^2_{\mathrm{ext}} < \infty; \tag{3.6}$$

і, навпаки, кожний формальний ряд (1.6) такий, що ряд (3.6) збігається, є регулярною узагальненою функцією з $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ (тобто зараз ряд (1.6) збігається у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$).

2. Кожну регулярну узагальнену функцію $F \in (L^2)^{-\beta}$ можна єдиним чином представити як формальний ряд (1.6) з ядрами $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, який збігається у $(L^2)^{-\beta}$, тобто ряд (3.6) збігається для деякого $q \in \mathbb{Z}_+$; і, навпаки, кожний формальний ряд (1.6) такий, що ряд (3.6) збігається для деякого $q \in \mathbb{Z}_+$, є регулярною узагальненою функцією з $(L^2)^{-\beta}$.

3. Для $F, G \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ скалярний добуток у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ має вигляд

$$(F,G)_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}(F^{(n)},G^{(n)})_{\mathrm{ext}},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ *– ядра з розкладів* (1.6) *для* F *та* G *відповідно.*

4. Дуальне спарювання між елементами $F \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ *та* $f \in (L^2)_q^{\beta}$*, породжене дійсним (білінійним) скалярним добутком у* (L^2)*, має вигляд*

$$\langle\!\langle F, f \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{\mathrm{ext}},$$

де $F^{(n)}, f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$ *– ядра з розкладів* (1.6) *для* F *та* f *відповідно.*

Зауважимо, що термін «регулярні» у назвах ланцюжка (3.5) і просторів основних та узагальнених функцій пов'язаний із тим фактом, що ядра з розкладів (1.6) елементів всіх просторів ланцюжка (3.5) належать одним і тим самим просторам $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$. До того, простори $(L^2)_q^{\beta}$, $(L^2) = (L^2)_0^0$ та $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ мають однакову структуру (пор. (3.4) та (3.6)), і у багатьох випадках зручно абстрагуватись від того, йдеться про регулярні основні, квадратично інтегровні чи регулярні узагальнені функції, та розглядати $(L^2)_q^{\beta}$, $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$, з нормою (3.4).

Зауваження 3.1.4. Використання ваг 2^{qn} саме з числом 2 у визначенні скалярних добутків $(\cdot, \cdot)_{q,\beta}$ не є принциповим – можна використовувати більш загальні ваги K^{qn} із довільним числом $K > 1$. Але таке узагальнення не є суттєвим для кола питань, які розглядаються у статті, тому ми обмежимось розглядом випадку $K = 2$ задля певного спрощення формул та позначень.

3.2. **Розширений стохастичний інтеграл та стохастична похідна Хіди на просторах регулярного оснащення** (L^2)**.** У цьому підрозділі зручно увести загальне позначення $(L^2)_q^{\beta}$, $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$, для «дограничних» просторів з ланцюжка (3.5); норма у $(L^2)_q^{\beta}$ задається формулою (3.4).

Нехай $F \in (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. За аналогією із Підрозділом 2.1 можна показати [13], що F єдиним чином представляється у вигляді (2.2) (ряд збігається у $(L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$), при цьому

$$\|F\|^2_{(L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F_{\cdot}^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty. \tag{3.7}$$

Означення 3.2.1. Для $F \in (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві $\int_{\Delta} F(u) \widehat{d}L_u \in (L^2)_{q-1}^{\beta}$ формулою (2.6), зараз $\widehat{F}_{\Delta}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n+1)}$ такі, як у Означенні 2.1.2.

Оскільки (див. (2.6), (3.4), (2.5) та (3.7))

$$\Big\| \int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u \Big\|^2_{(L^2)^\beta_{q-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)!)^{1+\beta}2^{(q-1)(n+1)}|\widehat{F}^{(n)}_\Delta|^2_{\mathrm{ext}} \le$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}[(n+1)^{1+\beta}2^{-n+q-1}]|F^{(n)}_\cdot|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le \tag{3.8}$$
$$\le c\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

де $c := \max\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}[(n+1)^{1+\beta}2^{-n+q-1}]$, це визначення є коректним, а інтеграл

$$\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^\beta_{q-1} \tag{3.9}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому й *неперервним* оператором.

Зрозуміло, що у випадку, коли $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є простором регулярних *узагальнених* або квадратично інтегровних функцій (тобто коли $\beta < 0$ або $\beta = 0$ і $q \le 0$), інтеграл (3.9) є узагальненням (*розширенням* на $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \supseteq (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$) інтеграла (2.7), а тому, зокрема, є узагальненням стохастичного інтеграла Іто; а у випадку, коли $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – простір регулярних *основних* функцій (тобто коли $\beta > 0$ або $\beta = 0$ і $q > 0$), інтеграл (3.9) є *звуженням* інтеграла (2.7) на $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Відзначимо також, що у випадку $\beta = q = 0$ інтеграл (3.9) є природним розширенням інтеграла (2.7) до лінійного *неперервного* оператора на $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = (L^2)^0_0 \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ зі значеннями в $(L^2)^0_{-1}$ (таке розширення розглядалось у [27]).

Легко бачити, що розширений стохастичний інтеграл можна визначити формулою (2.6) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \mathrm{pr}\ \lim_{q\to+\infty}(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^\beta$, або з простору $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \mathrm{ind}\ \lim_{q\to+\infty}(L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0,1]$. Саме

$$\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta}, \quad \beta \in [0,1], \tag{3.10}$$

буде одним з об'єктів нашого розгляду у Підрозділі 3.4.

Зауваження 3.2.2. З визначення розширеного стохастичного інтеграла випливає, що для кожного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u = \int_{\mathbb{R}_+} \circ(u)1_\Delta(u)\widehat{d}L_u. \tag{3.11}$$

Це представлення можна використати для важливого узагальнення. Нехай функція $F : \mathbb{R}_+ \to (L^2)^{-\beta}$, $\beta \in [0,1]$, є такою, що $F \notin (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, але для деякої множини $\Theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ (наприклад, зі скінченною мірою Лебега) $F(\cdot)1_\Theta(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ (подібні функції часто виникають у застосуваннях). Тоді для довільної вимірної множини $\Delta \subseteq \Theta$ $F(\cdot)1_\Delta(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ і $\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)^{-\beta}$ можна визначити формулою (3.11). Зрозуміло, що вищесказане справедливе (з точністю до очевидних модифікацій) для всіх розглянутих вище стохастичних інтегралів.

Перейдемо до розгляду стохастичної похідної Хіди на просторах ланцюжка (3.5).

Означення 3.2.3. Для $G \in (L^2)^\beta_{q+1}$ та $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо стохастичну похідну Хіди $1_\Delta(\cdot)\partial.G \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ формулою (2.10), де $G^{(n+1)} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{\rm ext}$ такі, як у Означенні 2.2.3.

Оскільки (див. (2.10), (3.7), (2.9) та (3.4))

$$\begin{aligned}\|1_\Delta(\cdot)\partial.G\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} &= \sum_{n=0}^\infty (n!)^{1+\beta}(n+1)^2 2^{qn}|G^{(n+1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{\rm ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^\infty ((n+1)!)^{1+\beta}2^{(q+1)(n+1)}[(n+1)^{1-\beta}2^{-(n+q+1)}]|G^{(n+1)}|^2_{\rm ext} \leq \\ &\leq C\|G\|^2_{(L^2)^\beta_{q+1}},\end{aligned} \tag{3.12}$$

де $C := \max_{n\in\mathbb{Z}_+}[(n+1)^{1-\beta}2^{-(n+q+1)}]$, це визначення є коректним, а похідна

$$1_\Delta(\cdot)\partial. : (L^2)^\beta_{q+1} \to (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \tag{3.13}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним* оператором. Зрозуміло, що, як і розширений стохастичний інтеграл, похідна (3.13) є звуженням або розширенням похідної (2.11) на простір регулярних основних або узагальнених функцій $(L^2)^\beta_{q+1}$; а також похідну (2.11) можна природним чином розширити до лінійного неперервного оператора на $(L^2) = (L^2)^0_0$ зі значеннями в $(L^2)^0_{-1} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$. Легко бачити також, що стохастичну похідну Хіди можна визначити формулою (2.10) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta$ в простір $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, або з простору $(L^2)^{-\beta}$ в простір $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, тут $\beta \in [0,1]$.

Теорема 3.2.4. (пор. з Теоремою 2.2.4) *Для довільного* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *розширений стохастичний інтеграл* $\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \to (L^2)^{-\beta}_{-q-1}$ *та стохастична похідна Хіди* (3.13) *є взаємно спряженими операторами, тобто для довільних* $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *та* $G \in (L^2)^\beta_{q+1}$ *є справедливою рівність* (2.14).

Доведення зводиться до встановлення рівності (2.14), яке проводиться так само, як і для інтеграла та похідної на просторах $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та (L^2) відповідно.

Зауважимо, що результат Теореми 3.2.4 очевидним чином розповсюджується на випадок граничних просторів, тобто коли стохастичні інтеграл та похідна визначені відповідно на $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $(L^2)^{\beta}$, або на $(L^2)^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0,1]$. Ясно також, що рівності (2.13) залишаються справедливими та можуть використовуватись як альтернативні визначення розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди.

Зауваження 3.2.5. Іноді буває зручно розглядати розширений стохастичний інтеграл та стохастичну похідну Хіди як лінійні оператори, що діють з простору $(L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ та з простору $(L^2)^{\beta}_{q}$ в простір $(L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно. З викладок (3.8) та (3.12) випливає, що у випадку $\beta = 1$ згадані інтеграл та похідна є обмеженими, а тому і неперервними операторами; в інших випадках вони є взаємно спряженими та замкненими необмеженими операторами з областями визначення $\mathrm{dom}\big(\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u\big) = \{F \in (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} : \|\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} < \infty\}$ та $\mathrm{dom}(1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot) = \{G \in (L^2)^{\beta}_{q} : \|1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot G\|_{(L^2)^{\beta}_{q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty\}$, довести це твердження можна за аналогією з випадком $\beta = q = 0$ [23].

3.3. **Оператори стохастичного диференціювання.** Як і у попередньому підрозділі, використаємо позначення $(L^2)^{\beta}_{q}$, $\beta \in [-1,1]$, $q \in \mathbb{Z}$, для «дограничних» просторів з ланцюжка (3.5).

Для того, щоб визначити оператори стохастичного диференціювання на просторах $(L^2)^{\beta}_{q}$, потрібна певна підготовка (зокрема, треба ввести природний аналог симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$). Нехай $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо функцію $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{C}$. Позначимо

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}(u_1,\dots,u_n;u_{n+1},\dots,u_{n+m}) &:= \\
&:= H(u_1,\dots,u_{n+m})1_{\{\forall i\in\{1,\dots,n\},j\in\{n+1,\dots,n+m\}\ u_i\neq u_j\}}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Нехай $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{\mathrm{ext}}$. Оберемо представників (функції) $\dot f^{(n)} \in F^{(n)}$ та $\dot g^{(m)} \in G^{(m)}$. Нехай $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(u_1,\dots,u_{n+m})$ – симетризація $\dot f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)\cdot\widetilde{\dot g^{(m)}(u_{n+1},\dots,u_{n+m})}$ за всіма змінними, $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(n+m)}_{\mathrm{ext}}$ – клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n+m)}_{\mathrm{ext}}$, породжений функцією $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ (тобто $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}} \in F^{(n)} \diamond G^{(m)}$). Наступне твердження є у певному сенсі узагальненням Леми 2.1.1.

Лема 3.3.1. ([8]) *Для довільних* $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ *і* $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, *елемент* $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n+m)}$ *визначений коректно (зокрема, він не залежить від вибору представників з* $F^{(n)}$ *та* $G^{(m)}$*), і*

$$|F^{(n)} \diamond G^{(m)}|_{\text{ext}} \leq |F^{(n)}|_{\text{ext}} |G^{(m)}|_{\text{ext}}. \tag{3.15}$$

Зауважимо, що множення $\diamond$ за побудовою є комутативним, асоціативним та дистрибутивним, а також для довільного $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\alpha F^{(n)}) \diamond G^{(m)} = F^{(n)} \diamond (\alpha G^{(m)}) = \alpha (F^{(n)} \diamond G^{(m)}) \equiv \alpha F^{(n)} \diamond G^{(m)}. \tag{3.16}$$

Нехай тепер $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $m > n$. Визначимо частковий добуток $(f^{(n)}, F^{(m)})_{\text{ext}} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)}$, поклавши для кожного $g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)}$

$$(g^{(m-n)}, (f^{(n)}, F^{(m)})_{\text{ext}})_{\text{ext}} = (f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F^{(m)})_{\text{ext}}. \tag{3.17}$$

Оскільки за нерівністю Коши-Буняковського та оцінкою (3.15)

$$\begin{aligned} |(f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F^{(m)})_{\text{ext}}| &\leq |f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}|_{\text{ext}} |F^{(m)}|_{\text{ext}} \leq \\ &\leq |f^{(n)}|_{\text{ext}} |g^{(m-n)}|_{\text{ext}} |F^{(m)}|_{\text{ext}}, \end{aligned}$$

це визначення є коректним та справедлива оцінка

$$|(f^{(n)}, F^{(m)})_{\text{ext}}|_{\text{ext}} \leq |f^{(n)}|_{\text{ext}} |F^{(m)}|_{\text{ext}}. \tag{3.18}$$

Означення 3.3.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$. Визначимо оператор стохастичного диференціювання n-го порядку

$$(D^n \circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \to (L^2)_{q-1}^\beta, \tag{3.19}$$

поклавши для $F \in (L^2)_q^\beta$

$$\begin{aligned} (D^n F)(f^{(n)}) &:= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} :\langle \circ^{\otimes m-n}, (f^{(n)}, F^{(m)})_{\text{ext}} \rangle : \equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m}, (f^{(n)}, F^{(m+n)})_{\text{ext}} \rangle :, \end{aligned} \tag{3.20}$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$ – ядра з розкладу (1.6) для F.

Безпосереднім підрахунком з використанням оцінки (3.18) можна встановити [8], що

$$\|(D^n F)(f^{(n)})\|_{(L^2)_{q-1}^\beta} \leq \sqrt{2^{-qn} \max_{m \in \mathbb{Z}_+} \Big[2^{-m} \Big(\frac{(m+n)!}{m!} \Big)^{1-\beta} \Big]} |f^{(n)}|_{\text{ext}} \|F\|_{(L^2)_q^\beta},$$

отже, це визначення є коректним, оператор (3.19) є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним*; до того ж для кожного $F \in (L^2)_q^\beta$ $(D^n F)(\circ)$ є лінійним неперервним оператором, що діє з $\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ в $(L^2)_{q-1}^{\beta}$. Зауважимо, що у випадку $\beta = 1$ маємо (див. (3.20), (3.4) та (3.18))

$$\|(D^n F)(f^{(n)})\|^2_{(L^2)^1_q} = \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^2 2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |(f^{(n)}, F^{(m+n)})_{\text{ext}}|^2_{\text{ext}} \leq$$

$$2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{\text{ext}}\sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^2 2^{q(m+n)}|F^{(m+n)}|^2_{\text{ext}} \leq 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{\text{ext}}\|F\|^2_{(L^2)^1_q},$$

отже, формула (3.20) визначає лінійний *обмежений*, а тому та *неперервний* оператор $(D^n\circ)(f^{(n)})$ в просторі $(L^2)^1_q$, $q \in \mathbb{Z}$. Легко бачити також, що оператор стохастичного диференціювання можна визначити формулою (3.20) як лінійний неперервний оператор, що діє в просторі $(L^2)^{\beta}$, або в просторі $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0, 1]$.

Сформулюємо теорему про основні властивості операторів стохастичного диференціювання.

Позначимо $D := D^1$, $\partial. := 1_{\mathbb{R}_+}(\cdot)\partial.$ (див. (2.10)).

Теорема 3.3.3. ([8])

1) Для $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, $f_j^{(k_j)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(k_j)}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$(D^{k_m}(\cdots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\cdots))(f_m^{(k_m)}) =$$
$$= (D^{k_1+\cdots+k_m}\circ)(f_1^{(k_1)} \diamond \cdots \diamond f_m^{(k_m)}).$$

2) Для кожного $F \in (L^2)_q^{\beta}$ *ядра* $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, *з розкладу* (1.6) *можна представити у вигляді*

$$F^{(n)} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}(D^n F),$$

тобто для кожного $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$ $(F^{(n)}, f^{(n)})_{\text{ext}} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}((D^n F)(f^{(n)}))$, *тут* $\mathbb{E}\circ := \langle\!\langle \circ, 1\rangle\!\rangle_{(L^2)}$ *– узагальнене математичне сподівання.*

3) Спряжений до D^n, $n \in \mathbb{N}$, *оператор має вигляд*

$$(D^n G)(f^{(n)})^* = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{m+n}, f^{(n)} \diamond G^{(m)}\rangle: \in (L^2)_{-q}^{-\beta}, \tag{3.21}$$

тут $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$; $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$ *– ядра з розкладу* (1.6) *для* G.

4) Для всіх $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$ *та* $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(DG)(f^{(1)})^* = \int_{\mathbb{R}_+}(G \otimes f^{(1)})(u)\widehat{d}L_u \equiv \int_{\mathbb{R}_+} G \cdot f^{(1)}(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)_{-q}^{-\beta}.$$

5) Для всіх $F \in (L^2)^\beta_q$ та $f^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}_{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(DF)(f^{(1)}) = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u)du \in (L^2)^\beta_{q-1}, \tag{3.22}$$

тут інтеграл у правій частині є інтегралом Петтіса (слабким інтегралом).

Зауваження 3.3.4. Інтеграл Петтіса $\int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u)du$ з правої частини (3.22) дорівнює частковому спарюванню $\langle \partial_\cdot F, f^{(1)}(\cdot)\rangle$, тобто єдиному елементу $(L^2)^\beta_{q-1}$ такому, що для кожного $G \in (L^2)^{-\beta}_{1-q}$

$$\langle\!\langle G, \langle \partial_\cdot F, f^{(1)}(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle G \otimes f^{(1)}(\cdot), \partial_\cdot F\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$$

(пор. з (3.17) та конструкцією часткового добутку $(f^{(n)}, F^{(m)})_{\mathrm{ext}}$).

У деяких задачах аналізу білого шуму Леві важливу роль відіграє комутатор між оператором стохастичного диференціювання першого порядку D та розширеним стохастичним інтегралом. Але оскільки ці оператори визначені на різних просторах ($(L^2)^\beta_q$ та $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно), для коректного запису згаданого комутатора треба, строго кажучи, увести природний аналог оператора D, визначений на просторах $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Як і вище, почнемо з підготовки. Нехай $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо функцію $H : \mathbb{R}_+^{n+m+1} \to \mathbb{C}$. За аналогією з (3.14) позначимо

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_u(u_1, \dots, u_n; u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) &:= \\ &:= H_u(u_1, \dots, u_{n+m})1_{\left\{\forall i\in\{1,\dots,n\}, j\in\{n+1,\dots,n+m\}\ u_i \neq u_j\right\}}.\end{aligned}$$

Нехай $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$, $G^{(m)}_\cdot \in \mathcal{H}^{(m)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Оберемо представників (функції) $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$ та $\dot{g}^{(m)}_\cdot \in G^{(m)}_\cdot$. Нехай $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}_u}(u_1, \dots, u_{n+m})$ – симетризація

$$\dot{f}^{(n)}(u_1, \dots, u_n) \cdot \widetilde{\dot{g}^{(m)}_u}(u_{n+1}, \dots, u_{n+m})$$

за змінними $u_1, \dots, u_{n+m}$, $F^{(n)} \overline{\diamond}\, G^{(m)}_\cdot \in \mathcal{H}^{(n+m)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n+m)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, породжений функцією $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}_\cdot}$ (іншими словами, $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}_\cdot} \in F^{(n)} \overline{\diamond} G^{(m)}_\cdot$).

Лема 3.3.5. ([13], пор. з Лемою 3.3.1) *Для довільних $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$ та $G^{(m)}_\cdot \in \mathcal{H}^{(m)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, елемент $F^{(n)} \overline{\diamond} G^{(m)}_\cdot \in \mathcal{H}^{(n+m)}_{\mathrm{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначений коректно (зокрема, він не залежить від вибору представників* *з* $F^{(n)}$ *та* $G_\cdot^{(m)}$*), і*

$$|F^{(n)}\overline{\diamond}G_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le |F^{(n)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}}|G_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{3.23}$$

Зауваження 3.3.6. З конструкції добутків $\diamond$ та $\overline{\diamond}$ випливає, що вони тісно пов'язані між собою. Точніше, неважко показати [13], що для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, та $H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$F^{(n)}\overline{\diamond}(G^{(m)} \otimes H^{(1)}) = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}) \otimes H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \tag{3.24}$$

Нехай тепер $F_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $m \ge n$. Визначимо частковий добуток $(f^{(n)}, F_\cdot^{(m)})_{\text{EXT}} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши для кожного $g_\cdot^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(g_\cdot^{(m-n)}, (f^{(n)}, F_\cdot^{(m)})_{\text{EXT}})_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = (f^{(n)}\overline{\diamond}g_\cdot^{(m-n)}, F_\cdot^{(m)})_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Оскільки за нерівністю Коши-Буняковського та оцінкою (3.23)

$$\begin{aligned}|(f^{(n)}\overline{\diamond}g_\cdot^{(m-n)}, F_\cdot^{(m)})_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \le |f^{(n)}\overline{\diamond}g_\cdot^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}|F_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le \\ \le |f^{(n)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}}|g_\cdot^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}|F_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},\end{aligned}$$

це визначення є коректним та справедлива оцінка

$$|(f^{(n)}, F_\cdot^{(m)})_{\text{EXT}}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le |f^{(n)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}}|F_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{3.25}$$

Зауваження 3.3.7. Як і добутки $\diamond$ та $\overline{\diamond}$, часткові добутки $(\cdot,\cdot)_{\text{ext}}$ та $(\cdot,\cdot)_{\text{EXT}}$ тісно пов'язані між собою. Точніше, користуючись рівністю (3.24), можна довести [13], що для $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m)}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m \ge n$, та $H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(f^{(n)}, F^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{\text{EXT}} = (f^{(n)}, F^{(m)})_{\text{ext}} \otimes H^{(1)}(\cdot). \tag{3.26}$$

Означення 3.3.8. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(n)}$. Визначимо оператор стохастичного диференціювання n-ного порядку

$$(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{3.27}$$

поклавши для $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)}) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m}, (f^{(n)}, F_\cdot^{(m+n)})_{\text{EXT}}\rangle: \tag{3.28}$$

(пор. з (3.20)), де $F_\cdot^{(m+n)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m+n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (2.2) для F.

Безпосереднім підрахунком з використанням оцінки (3.25) можна встановити [13], що

$$\|(\mathbf{D}^n F)(f^{(n)})\|_{(L^2)^\beta_{q-1}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \leq$$
$$\leq \sqrt{2^{-qn}\max_{m\in\mathbb{Z}_+}\Big[2^{-m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^{1-\beta}\Big]}|f^{(n)}|_{\mathrm{ext}}\|F\|_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}}.$$

отже, це визначення є коректним, оператор (3.27) є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним*; до того ж для кожного $F\in(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ оператор $(\mathbf{D}^n F)(\circ)$ є лінійним неперервним оператором, що діє з $\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$ в $(L^2)^\beta_{q-1}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$. Щобільше, як і у випадку операторів D^n, $n\in\mathbb{N}$, нескладно перевірити, що за умови $\beta=1$ формула (3.28) визначає лінійний *обмежений*, а тому і *неперервний* оператор $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ в просторі $(L^2)^1_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, $q\in\mathbb{Z}$. Легко бачити також, що оператор стохастичного диференціювання можна визначити формулою (3.28) як лінійний неперервний оператор, що діє в просторі $(L^2)^\beta\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, або в просторі $(L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, тут $\beta\in[0,1]$.

Як і добутки $\diamond$ та $\overline{\diamond}$, і часткові добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{ext}}$ та $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{EXT}}$, оператори D^n та $\mathbf{D}^n$ тісно пов'язані між собою. Зокрема, за допомогою рівності (3.26) неважко довести, що для $F\in(L^2)^\beta_q$, $H^{(1)}\in\mathcal{H}_\mathbb{C}$, та $f^{(n)}\in\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$

$$(\mathbf{D}^n F\otimes H^{(1)})(f^{(n)})=(D^n F)(f^{(n)})\otimes H^{(1)}\in(L^2)^\beta_{q-1}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}.$$

Властивості операторів стохастичного диференціювання $\mathbf{D}^n$, $n\in\mathbb{N}$, аналогічні властивостям операторів D^n. Зацікавлений читач може знайти більше інформації з цього приводу у [13].

Перейдемо до твердження про комутатор між оператором стохастичного диференціювання та розширеним стохастичним інтегралом. Позначимо $\mathbf{D}:=\mathbf{D}^1$.

Теорема 3.3.9. ([13], див. також [8]) *Для довільних* $F\in(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, $f^{(1)}\in\mathcal{H}^{(1)}_{\mathrm{ext}}=\mathcal{H}_\mathbb{C}$, *та* $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned}\Big(D\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u\Big)(f^{(1)})-\int_\Delta(\mathbf{D}F(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u=\\ =\int_\Delta F(u)f^{(1)}(u)du\in(L^2)^\beta_q,\end{aligned}\tag{3.29}$$

де $\int_\Delta(\mathbf{D}F(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u:=\int_\Delta g(u)\widehat{d}L_u$ *з*

$$g(\cdot):=(\mathbf{D}F(\cdot))(f^{(1)})\in(L^2)^\beta_{q-1}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C},$$

а $\int_\Delta F(u)f^{(1)}(u)du\in(L^2)^\beta_q$ *є інтегралом Петтіса (пор. з* (3.22)*).*

Відзначимо, що $\int_\Delta F(u)f^{(1)}(u)du$ дорівнює частковому спарюванню $\langle F(\cdot), f^{(1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)\rangle$, яке визначається як у Зауваженні 3.3.4.

Зауваження 3.3.10. Інтерпретуючи F як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(L^2)_q^\beta$ і беручи до уваги конструкцію операторів стохастичного диференціювання D та $\mathbf{D}$, можна переписати рівність (3.29) у класичній формі

$$\big(D\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u\big)(f^{(1)}) - \int_\Delta (DF(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u = \int_\Delta F(u)f^{(1)}(u)du \in (L^2)_q^\beta,$$

зараз для $u \in \mathbb{R}_+$ $(DF(u))(f^{(1)}) \in (L^2)_{q-1}^\beta$ розуміється як результат дії оператора $(D\circ)(f^{(1)})$ на $F(u) \in (L^2)_q^\beta$.

Легко бачити, що представлені вище результати зберігаються (з точністю до очевидних модифікацій), якщо оператори стохастичного диференціювання $(D^n\circ)(f^{(n)})$ та $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, розглядаються відповідно на просторах $(L^2)^\beta$ та $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, або $(L^2)^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, тут $\beta \in [0,1]$.

У деяких випадках може бути корисним визначити $(D^n\circ)(f^{(n)})$ та $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ як лінійні оператори, що діють відповідно у просторах $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$. Як відзначалось вище, у випадку $\beta = 1$ такі оператори є неперервними, але для $\beta \in [-1,1)$ це не так. Розглянемо останній випадок детальніше.

Означення 3.3.11. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$. Визначимо оператор стохастичного диференціювання n-ного порядку

$$(D^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \to (L^2)_q^\beta \tag{3.30}$$

з областю визначення

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\big((D^n\circ)(f^{(n)})\big) = \big\{F \in (L^2)_q^\beta : \|(D^nF)(f^{(n)})\|^2_{(L^2)_q^\beta} = \\ = \sum_{m=0}^\infty (m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |(f^{(n)}, F^{(m+n)})_{\mathrm{ext}}|^2_{\mathrm{ext}} < \infty\big\}\end{aligned} \tag{3.31}$$

(тут $F^{(m+n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(m+n)}$ – ядра з розкладу (1.6) для F) формулою (3.20).

Оскільки множина (3.31) є, очевидно, щільною в просторі $(L^2)_q^\beta$, оператор

$$(D^n\circ)(f^{(n)})^* : (L^2)_{-q}^{-\beta} \to (L^2)_{-q}^{-\beta}, \tag{3.32}$$

спряжений до оператора (3.30), визначений коректно. Неважко бачити, що дію оператора (3.32) на елемент $G \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ можна порахувати за формулою (3.21), а його область визначення має вигляд

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}\bigl((D^n\circ)(f^{(n)})^*\bigr) = \bigl\{G \in (L^2)^{-\beta}_{-q} : \|(D^nG)(f^{(n)})^*\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1-\beta}2^{-q(m+n)}|f^{(n)} \diamond G^{(m)}|^2_{\text{ext}} < \infty\bigr\},\end{aligned} \tag{3.33}$$

тут $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{\text{ext}}$ – ядра з розкладу (1.6) для G.

Твердження 3.3.12. ([8]) *Оператор* (3.30) *з областю визначення* (3.31) *та оператор* (3.32) *з областю визначення* (3.33) *є взаємно спряженими. Зокрема, ці оператори замкнені.*

Зауваження 3.3.13. Область визначення оператора (3.30) залежить від «коефіцієнта» $f^{(n)}$, що може бути незручним для певних застосувань. Цю проблему можна вирішити, увівши за допомогою формули (3.20) оператор стохастичного диференціювання у $(L^2)^\beta_q$ з областю визначення

$$\bigl\{F \in (L^2)^\beta_q : \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Bigl(\frac{(m+n)!}{m!}\Bigr)^2|F^{(m+n)}|^2_{\text{ext}} < \infty\bigr\}.$$

Легко бачити, що це визначення є коректним, а уведений оператор допускає замикання (для кожного $f^{(n)}$ його замиканням є оператор (3.30) з областю визначення (3.31)).

Визначення та властивості оператора

$$(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

аналогічні визначенню та властивостям оператора (3.30). Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію у [13].

3.4. **Елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій.** У цьому підрозділі зручно використовувати різні позначення для просторів регулярних основних та узагальнених функцій (тобто такі, як у ланцюжку (3.5)). Отже, будемо вважати за умовчанням, що $\beta \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ у випадку $\beta > 0$, і $q \in \mathbb{Z}_+$, якщо $\beta = 0$.

Для кожного $F \in (L^2)^{-\beta}$ визначимо S-перетворення $(SF)(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, як *формальний* ряд

$$(SF)(\lambda) := \sum_{m=0}^{\infty}(F^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{\text{ext}} \equiv F^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty}(F^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{\text{ext}}, \tag{3.34}$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{\text{ext}}$ – ядра з розкладу (1.6) для F.

Зокрема, $(SF)(0) = F^{(0)}$, $S1 \equiv 1$. Зауважимо, що кожний доданок у правій частині (3.34) визначений коректно, але ряд може розбігатись.

Означення 3.4.1. Для $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ визначимо віківський добуток $F \Diamond G$ та віківську версію $h^{\Diamond}(F)$, поклавши формально

$$F \Diamond G := S^{-1}(SF \cdot SG), \quad h^{\Diamond}(F) := S^{-1} h(SF). \tag{3.35}$$

Безпосередньо з визначення випливає, що віківське множення $\Diamond$ комутативне, асоціативне та дистрибутивне, і для довільного $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\alpha F) \Diamond G = F \Diamond (\alpha G) = \alpha (F \Diamond G) \equiv \alpha F \Diamond G. \tag{3.36}$$

Зауваження 3.4.2. Голоморфну функцію h з Означення 3.4.1 можна розкласти в ряд Тейлора

$$h(u) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \big(u - (SF)(0)\big)^m. \tag{3.37}$$

Використовуючи цей розклад, неважко порахувати, що

$$h^{\Diamond}(F) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \big(F - (SF)(0)\big)^{\Diamond m}, \tag{3.38}$$

де $F^{\Diamond m} := \underbrace{F \Diamond \cdots \Diamond F}_{m \text{ раз}}$, $m \in \mathbb{N}$, $F^{\Diamond 0} := 1$.

Випишемо «координатні формули» для віківського добутку та віківської версії голоморфної функції, тобто представлення $F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n$ та $h^{\Diamond}(F)$, $F_1, \ldots, F_n, F \in (L^2)^{-\beta}$, h як у Означенні 3.4.1, через ядра з розкладів (1.6) для $F_1, \ldots, F_n, F$ та коефіцієнти з розкладу (3.37) для h. Використовуючи рівність

$$\begin{gathered}(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{\mathrm{ext}} (G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{\mathrm{ext}} = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m})_{\mathrm{ext}}, \\ F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)},\ G^{(m)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(m)},\ n, m \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}},\end{gathered} \tag{3.39}$$

доведену у [26], за аналогією з майкснерівським аналізом [18] можна встановити наступне твердження.

Твердження 3.4.3. ([11]) *Для* $F_1, \ldots, F_n \in (L^2)^{-\beta}$

$$F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+ :\ k_1 + \cdots + k_n = m} F_1^{(k_1)} \diamond \cdots \diamond F_n^{(k_n)} \rangle :, \tag{3.40}$$

зокрема, для $F, G \in (L^2)^{-\beta}$

$$F \Diamond G = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k=0}^{m} F^{(k)} \diamond G^{(m-k)} \rangle :, \tag{3.41}$$

де $F_j^{(k_j)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(k_j)}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *– ядра з розкладів* (1.6) *для* F_j; $F^{(k)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(k)}$ *та* $G^{(m-k)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(m-k)}$ *– ядра з тих же розкладів для* F *та* G *відповідно. Далі, для* $F \in (L^2)^{-\beta}$ *та голоморфної у* $(SF)(0) = F^{(0)}$ *функції* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$h^{\Diamond}(F) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{n=1}^{m} h_n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}:\ k_1 + \dots + k_n = m} F^{(k_1)} \diamond \dots \diamond F^{(k_n)} \rangle :, \tag{3.42}$$

де $F^{(k)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(k)}$ *– ядра з розкладу* (1.6) *для* F, $h_n \in \mathbb{C}$ *– коефіцієнти з розкладу* (3.37) *для* h.

Зауваження 3.4.4. Формули (3.41) та (3.42) можна використати як альтернативні визначення віківського добутку та віківської версії голоморфної функції.

Відзначимо, що наразі ряди у правих частинах рівностей (3.40), (3.41) та (3.42) розуміються як формальні: кожен доданок є коректно визначеним елементом простору $(L^2)^{-\beta}$ (і навіть простору $(L^2)^{\beta}$), але про збіжність згаданих рядів в $(L^2)^{-\beta}$ (чи в будь-якому іншому просторі) у Твердженні 3.4.3 не йдеться. Разом з тим зрозуміло, що для надання неформального сенсу поняттям «віківський добуток» та «віківська версія голоморфної функції» треба вивчити питання збіжності цих рядів у просторах регулярних узагальнених функцій. Це можна зробити за аналогією з майкснерівським аналізом [18], використовуючи оцінку (3.15). В результаті отримуємо таке твердження.

Теорема 3.4.5 ([11])**.** *1. Нехай* $F_1, \dots, F_n \in (L^2)^{-\beta}$. *Тоді*

$$F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n \in (L^2)^{-\beta}.$$

Більш того, віківське множення є неперервним у тому сенсі, що для $q, q' \in \mathbb{Z}_+$ *таких, що* $F_1, \dots, F_n \in (L^2)^{-\beta}_{-q'}$ *та* $q > q' + (1-\beta)\log_2 n + 1$, *маємо* $F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *і*

$$\|F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} \le \sqrt{\max_{m \in \mathbb{Z}_+} [2^{-m}(m+1)^{n-1}]} \|F_1\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q'}} \cdots \|F_n\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q'}}.$$

2. Нехай $F \in (L^2)^{-\beta}$ *та функція* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна у* $(SF)(0)$. *Тоді* $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-1}$.

Зауваження 3.4.6. Нехай $\beta \in [0,1)$, $F \in (L^2)^{-\beta}$, та функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна у $(SF)(0)$. Згідно з Теоремою 3.4.5 $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-1}$; але, як показано у [11], $h^{\Diamond}(F) \notin (L^2)^{-\beta}$, взагалі кажучи. Втім, $h^{\Diamond}(F)$ може належати $(L^2)^{-\beta}$, якщо h або F задовольняє певні додаткові умови (наприклад, $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta}$, якщо h є поліномом). Зацікавлений читач може знайти більш детальну інформацію з цього приводу у [11], див. також [18].

Як вже відзначалось, оператор стохастичного диференціювання та віківське множення на просторах узагальнених функцій є природними аналогами звичайних диференціювання та множення. Отже, природними є наступні твердження, які належать М. М. Фрей.

Теорема 3.4.7. ([11]) *Оператор стохастичного диференціювання першого порядку D є диференціюванням (тобто задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення: для довільних $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ та $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$*

$$\big(D(F\Diamond G)\big)(f^{(1)}) = (DF)(f^{(1)})\Diamond G + F\Diamond(DG)(f^{(1)}) \in (L^2)^{-\beta}.$$

Наслідок 3.4.8. *Нехай $F \in (L^2)^{-\beta}$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, та функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна у $(SF)(0)$. Тоді*

$$\big(Dh^{\Diamond}(F)\big)(f^{(1)}) = h'^{\Diamond}(F)\Diamond(DF)(f^{(1)}) \in (L^2)^{-1},$$

тут $h'^{\Diamond}$ – віківська версія звичайної похідної функції h.

Важливі застосування віківського числення пов'язані зі стохастичним інтегруванням. Розглянемо це детально.

Як відомо, деякі властивості розширеного стохастичного інтеграла суттєво відрізняються від властивостей інтеграла Лебега. Зокрема, для $G \in (L^2)^{-\beta}$ та $H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (G \otimes H^{(1)})(u)\widehat{d}L_u \equiv \int_{\mathbb{R}_+} G \cdot H^{(1)}(u)\widehat{d}L_u \neq G \cdot \int_{\mathbb{R}_+} H^{(1)}(u)\widehat{d}L_u,$$

взагалі кажучи, не зважаючи на те, що G не залежить від u. Щобільше, добуток узагальнених функцій G та $\int_{\mathbb{R}_+} H^{(1)}(u)\widehat{d}L_u$ у загальному випадку не визначений. Однак, незалежний від часу (тобто від u) множник можна виносити з-під знаку розширеного стохастичного інтеграла, якщо використовувати віківське множення замість поточкового. Пояснимо це.

Означення 3.4.9. Нехай $F \in (L^2)^{-\beta}$ та $G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Визначимо віківський добуток $F\overline{\Diamond}G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши

$$(F\overline{\Diamond}G)(\cdot) := \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k=0}^{m} F^{(k)} \overline{\diamond} G_{\cdot}^{(m-k)} \rangle :, \tag{3.43}$$

де $F^{(k)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(k)}$ та $G_{\cdot}^{(m-k)} \in \mathcal{H}_{\text{ext}}^{(m-k)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладів (1.6) та (2.2) для F та G відповідно (пор. з (3.41)).

Використовуючи оцінку (3.23), за аналогією з [18] можна довести, що це визначення є коректним, а віківське множення $\overline{\Diamond}$ неперервне у тому сенсі, що для $q, q' \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $F \in (L^2)_{-q'}^{-\beta}$, $G \in (L^2)_{-q'}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, та $q > q' + 2 - \beta$ маємо $F\overline{\Diamond}G \in (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та

$$\|F\overline{\Diamond}G\|_{(L^2)_{-q}^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le \|F\|_{(L^2)_{-q'}^{-\beta}} \|G\|_{(L^2)_{-q'}^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$$

(пор. з Теоремою 3.4.5).

Зауваження 3.4.10. Нехай $F, G \in (L^2)^{-\beta}$, $H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Використовуючи (3.43), (3.41) та (3.24) нескладно довести, що

$$F\overline{\Diamond}(G \otimes H^{(1)}) = (F\Diamond G) \otimes H^{(1)} \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \tag{3.44}$$

Теорема 3.4.11. ([12]) *Нехай* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $F \in (L^2)^{-\beta}$, $G \in (L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Тоді*

$$\int_\Delta F\overline{\Diamond}G(u)\widehat{d}L_u \equiv \int_\Delta (F\overline{\Diamond}G)(u)\widehat{d}L_u = F\Diamond \int_\Delta G(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)^{-\beta}. \tag{3.45}$$

Зауваження 3.4.12. Інтерпретуючи G як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(L^2)^{-\beta}$ та беручи до уваги конструкцію віківських добутків $\Diamond$ і $\overline{\Diamond}$, можна переписати рівність (3.45) у класичній формі

$$\int_\Delta F\Diamond G(u)\widehat{d}L_u = F\Diamond \int_\Delta G(u)\widehat{d}L_u. \tag{3.46}$$

Розглянемо аналог властивості (3.45) для інтеграла Петтіса на просторах регулярних узагальнених функцій. Позначимо через ρ міру Лебега на $\mathbb{R}_+$. Нехай $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ є таким, що $\rho(\Delta) < \infty$. Для кожного $G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо інтеграл Петтіса $\int_\Delta G(u)du$ як єдиний елемент з простору $(L^2)^{-\beta}$ такий, що для кожного $f \in (L^2)^{\beta}$

$$\langle\!\langle \int_\Delta G(u)du, f \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle G(\cdot), f \otimes 1_\Delta(\cdot) \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \tag{3.47}$$

(пор. Зауваження 3.3.4). Оскільки за узагальненою нерівністю Коши-Буняковського для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$

$$|\langle\langle G(\cdot), f \otimes 1_\Delta(\cdot)\rangle\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}}| \le \|G\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \|f\|_{(L^2)^\beta_q} \sqrt{\rho(\Delta)},$$

це визначення є коректним, а інтеграл Петтіса

$$\int_\Delta \circ(u)du : (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \to (L^2)^{-\beta} \tag{3.48}$$

є лінійним *неперервним* оператором. Використовуючи цей факт, неперервність віківських множень $\lozenge$ і $\overline{\lozenge}$, а також рівність (3.44), можна довести таке твердження.

Теорема 3.4.13. ([12], пор. з Теоремою 3.4.11) *Нехай $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ є таким, що $\rho(\Delta) < \infty$, $F \in (L^2)^{-\beta}$ та $G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$. Тоді*

$$\int_\Delta F\overline{\lozenge}G(u)du \equiv \int_\Delta (F\overline{\lozenge}G)(u)du = F\lozenge \int_\Delta G(u)du \in (L^2)^{-\beta}. \tag{3.49}$$

Зауважимо, що як і у випадку розширеного стохастичного інтеграла, можна інтерпретувати G як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(L^2)^{-\beta}$ та переписати рівність (3.49) у класичній формі

$$\int_\Delta F\lozenge G(u)du = F\lozenge \int_\Delta G(u)du. \tag{3.50}$$

Зауваження 3.4.14. У випадку $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ з $\rho(\Delta) = \infty$ інтеграл Петтіса (3.48) можна визначити як лінійний *не неперервний* оператор з областю визначення

$$\Big\{G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} : \text{для деякого } q \in \mathbb{Z}_+ \ \int_\Delta \|G(u)\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} du < \infty\Big\}.$$

Можна довести, що для такого інтеграла, як і у випадку $\rho(\Delta) < \infty$, є справедливою рівність (3.49).

Як відомо, у різних версіях нескінченновимірного аналізу білого шуму розширений стохастичний інтеграл можна представити як інтеграл Петтіса від віківського добутку вихідної підінтегральної функції на відповідний білий шум. В залежності від просторів, на яких розглядається інтегрування, такі представлення можуть бути формальними або мати строгий сенс. В обох випадках вони є зручними для розв'язання різних задач, зокрема, для дослідження стохастичних інтегральних рівнянь з віківськими добутками та нелінійностями віківського типу. В аналізі білого шуму Леві згадане представлення має місце як *формальна* рівність на просторах регулярних узагальнених функцій (див. наступну теорему); рівність *у строгому сенсі* справедлива на просторах нерегулярних узагальнених функцій (див. Підрозділ 4.3).

Теорема 3.4.15. ([12]) *Для довільних* $F \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *та* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *розширений стохастичний інтеграл* $\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u$ *можна формально представити у вигляді*

$$\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u = \int_\Delta F(u)\Diamond\dot{L}_u du \equiv \int_\Delta F(u)\Diamond\langle\circ, \delta_u\rangle du, \tag{3.51}$$

де $\dot{L}$ *– білий шум Леві (див. Підрозділ 1.1), а інтеграл у правій частині є формальним інтегралом Петтіса.*

Зауважимо, що формальний характер рівності (3.51) обумовлений тим фактом, що $\dot{L}_u = \langle\circ, \delta_u\rangle \notin (L^2)^{-\beta}$, оскільки дельта-функція Дірака $\delta_u \notin \mathcal{H}^{(1)}_{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Зауваження 3.4.16. Неважко бачити, що рівність (3.51) (відповідно (3.45), (3.49)) зберігається для узагальненої функції F (відповідно G) та вимірної множини Δ, описаних у Зауваженні 3.2.2.

Наведемо прості приклади застосування сформульованих результатів.

Приклад 3.4.17. (лінійне рівняння з віківським добутком) Розглянемо інтегральне стохастичне рівняння

$$X_t = X_0 + \int_{[0,t)} F\overline{\Diamond}X_u du + \int_{[0,t)} G\overline{\Diamond}X_u\widehat{d}L_u, \tag{3.52}$$

де $X_0, F, G \in (L^2)^{-\beta}$, $\int_{[0,t)} F\overline{\Diamond}X_u du \in (L^2)^{-1}$ – інтеграл Петтіса. Застосовуючи до цього рівняння S-перетворення з урахуванням (3.49), (3.45) і (3.51), та розв'язуючи отримане нестохастичне рівняння, отримаємо

$$SX_t = SX_0 \cdot \exp\Big\{SFt + SG\int_{[0,t)} \lambda(u)du\Big\}.$$

Зараз достатньо застосувати до цього виразу зворотне S-перетворення, щоб отримати розв'язок (3.52):

$$X_t = X_0\Diamond \exp^{\Diamond}\left\{Ft + G\Diamond L_t\right\} \in (L^2)^{-1}.$$

Зауважимо, що для того, щоб мати $X_t \in (L^2)^{-\beta}$ у випадку $\beta \in [0, 1)$, треба накласти на F та G певні додаткові умови, див. детальніше у [12].

Приклад 3.4.18. (рівняння типу Верхюльста) Розглянемо інтегральне стохастичне рівняння

$$X_t = X_0 + r\int_{[0,t)} X_u\Diamond(N - X_u)du + v\int_{[0,t)} X_u\Diamond(N - X_u)\widehat{d}L_u, \quad (3.53)$$

де $X_0 \in (L^2)^{-1}$, $N, r, v \in \mathbb{R}$, $N > 0$, $r > 0$, $(SX_0)(0) > 0$. Тут для кожного $u \in \mathbb{R}_+$ ми розуміємо X_u як узагальнену функцію, з розв'язку (3.53) (див. нижче) випливає, що $X_u \in (L^2)^{-1}$. Як і у попередньому прикладі, застосовуючи до (3.53) S-перетворення, розв'язуючи отримане нестохастичне рівняння, та застосовуючи до його розв'язку зворотне S-перетворення, отримаємо розв'язок (3.53):

$$X_t = N\Big[1 + (NX_0^{\Diamond(-1)} - 1)\Diamond\exp^{\Diamond}\big\{-N(rt + vL_t)\big\}\Big]^{\Diamond(-1)} \in (L^2)^{-1},$$

де $Y^{\Diamond(-1)} := S^{-1}\big(\frac{1}{SY}\big)$.

Зауваження 3.4.19. Віківське числення можна будувати і на просторах регулярних основних функцій $(L^2)^\beta$, $\beta \in [0,1]$, за аналогією із майкснерівським аналізом (див. [21]). При цьому віківський добуток елементів з $(L^2)^\beta$ є елементом $(L^2)^\beta$ (а тому для *полінома* h та основної функції $F \in (L^2)^\beta$ віківська версія $h^\Diamond(F) \in (L^2)^\beta$), в той час, як для голоморфної у $(SF)(0)$ функції h, що не є поліномом, $h^\Diamond(F)$ є основною функцією лише за доволі жорстких додаткових умов. Результати Теорем 3.4.7, 3.4.11, 3.4.13 та 3.4.15 залишаються справедливими з точністю до відповідних модифікацій. Детальному вивченню елементів віківського числення на просторах $(L^2)^\beta$ буде присвячено одну з наступних робіт автора.

4. Елементи аналізу білого шуму Леві на просторах нерегулярних узагальнених функцій

4.1. **Нерегулярне оснащення простору** (L^2)**.** Нехай T – множина індексів $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, де $\tau_1 \in \mathbb{N}$, τ_2 – нескінченно диференційовна функція на $\mathbb{R}_+$ така, що для всіх $u \in \mathbb{R}_+$ $\tau_2(u) \geq 1$. Позначимо через $\mathcal{H}_\tau$ дійсний соболевський простір (функцій) на $\mathbb{R}_+$ порядку τ_1 з вагою τ_2, тобто $\mathcal{H}_\tau$ – поповнення $\mathcal{D}$ за нормою, породженою скалярним добутком

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{H}_\tau} = \int_{\mathbb{R}_+}\Big(\varphi(u)\psi(u) + \sum_{k=1}^{\tau_1}\varphi^{[k]}(u)\psi^{[k]}(u)\Big)\tau_2(u)du,$$

де $\varphi^{[k]}$ та $\psi^{[k]}$ – похідні k-го порядку функцій φ та ψ відповідно. Добре відомо (див., наприклад, [40]), що $\mathcal{D} = \mathrm{pr}\lim_{\tau\in T}\mathcal{H}_\tau$ (більше того, можна довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}n} = \mathrm{pr}\lim_{\tau\in T}\mathcal{H}_\tau^{\widehat{\otimes}n}$), і для кожного $\tau \in T$ $\mathcal{H}_\tau$ щільно та неперервно вкладене у $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}_+)$. Отже, можна побудувати ланцюжок (пор. з (1.2))

$$\mathcal{D}' \supset \mathcal{H}_{-\tau} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_\tau \supset \mathcal{D},$$

де $\mathcal{H}_{-\tau}$, $\tau \in T$, – простори, спряжені до $\mathcal{H}_\tau$ відносно $\mathcal{H}$. Зауважимо, що за теоремою Шварца (наприклад, [40]) $\mathcal{D}' = \bigcup_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}$. Надалі нам буде зручно наділити $\mathcal{D}'$ топологією індуктивної границі, тобто вважати, що $\mathcal{D}' = \operatorname{ind}\lim_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}$. За аналогією з майкснерівським аналізом [22] можна показати, що міра μ білого шуму Леві сконцентрована на $\mathcal{H}_{-\widetilde{\tau}}$ з деяким $\widetilde{\tau} \in T$, тобто $\mu(\mathcal{H}_{-\widetilde{\tau}}) = 1$. Виключаючи з T індекси τ такі, що μ не сконцентрована на $\mathcal{H}_{-\tau}$, надалі будемо вважати, що *для кожного* $\tau \in T$ $\mu(\mathcal{H}_{-\tau}) = 1$.

Позначимо через $|\cdot|_\tau$ норми у $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$ (тобто у комплексифікаціях $\mathcal{H}_\tau$) та у симетричних тензорних степенях цих просторів, іншими словами для $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$|f^{(n)}|_\tau = \sqrt{(f^{(n)}, \overline{f^{(n)}})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}}}$$

(зауважимо, що $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{C}$ та $|f^{(0)}|_\tau = |f^{(0)}|$).

З результатів [20] випливає, що можна ще раз модифікувати T (необхідно виключити з T певні «погані» індекси) та отримати наступне твердження.

Твердження 4.1.1. *Для кожного $\tau \in T$ і кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ простір $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ щільно та неперервно вкладений у простір $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$. Щобільше, існує (незалежне від n) $c(\tau) > 0$ таке, що для всіх $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$*

$$|f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}} \le n! c(\tau)^n |f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}}.$$

Приймемо за умовчанням $\tau \in T$ та $q \in \mathbb{Z}_+$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\tau,q}$ на $\mathcal{P}_W$ (див. (3.1)), поклавши для $f, g \in \mathcal{P}_W$ вигляду (3.2)

$$(f, g)_{\tau,q} := \sum_{n=0}^{\min(N_f, N_g)} (n!)^2 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}}$$

(пор. з (3.3)). Коректність цього визначення доведено у [24].

Позначимо через $(\mathcal{H}_\tau)_q$ поповнення $\mathcal{P}_W$ за нормами, породженими скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{\tau,q}$, та покладемо $(\mathcal{H}_\tau) := \operatorname{pr}\lim_{q \to +\infty} (\mathcal{H}_\tau)_q$, $(\mathcal{D}) := \operatorname{pr}\lim_{\tau \in T, q \to +\infty} (\mathcal{H}_\tau)_q$. Легко бачити, що $f \in (\mathcal{H}_\tau)_q$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що f розкладається в ряд

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:, \tag{4.1}$$

який збігається у $(\mathcal{H}_\tau)_q$, тобто

$$\|f\|^2_{(\mathcal{H}_\tau)_q} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} |f^{(n)}|^2_\tau < \infty \tag{4.2}$$

(оскільки для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^{(n)}$, для $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ є коректно визначеним віківським мономом, див. Підрозділ 1.2). Далі, $f \in (\mathcal{H}_\tau)$ ($f \in (\mathcal{D})$) якщо та лише якщо f можна єдиним чином представити у вигляді (4.1), а відповідний ряд (4.2) збігається для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$ (для кожного $\tau \in T$ і кожного $q \in \mathbb{Z}_+$).

Твердження 4.1.2. ([20, 24]) *Для кожного $\tau \in T$ існує $q_0(\tau) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)} := \{q_0(\tau), q_0(\tau)+1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}_+$ простір $(\mathcal{H}_\tau)_q$ щільно та неперервно вкладений у (L^2).*

З огляду на це твердження можна побудувати ланцюжок (пор. (3.5))

$$(\mathcal{D}') \supset (\mathcal{H}_{-\tau}) \supset (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \supset (L^2) \supset (\mathcal{H}_\tau)_q \supset (\mathcal{H}_\tau) \supset (\mathcal{D}), \tag{4.3}$$

де $\tau \in T$, $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)}$,

$$(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}, \quad (\mathcal{H}_{-\tau}) = \operatorname*{ind\,lim}_{q' \to +\infty} (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q'}, \quad (\mathcal{D}') = \operatorname*{ind\,lim}_{\tau' \in T, q' \to +\infty} (\mathcal{H}_{-\tau'})_{-q'}$$

– простори, спряжені відповідно до $(\mathcal{H}_\tau)_q$, $(\mathcal{H}_\tau)$ та $(\mathcal{D})$ відносно (L^2).

Означення 4.1.3. Ланцюжок (4.3) називається нерегулярним оснащенням простору (L^2) квадратично інтегровних випадкових величин. Простори $(\mathcal{H}_\tau)_q$, $(\mathcal{H}_\tau)$ та $(\mathcal{D})$ називаються просторами Кондратьєва нерегулярних основних функцій, а простори $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$, $(\mathcal{H}_{-\tau})$ та $(\mathcal{D}')$ – просторами Кондратьєва нерегулярних узагальнених функцій.

Зауваження 4.1.4. Як і у випадку регулярного оснащення (L^2), замість ваг 2^{qn} у визначенні скалярних добутків $(\cdot,\cdot)_{\tau,q}$ можна використовувати більш загальні ваги K^{qn} із довільним $K > 1$, але таке узагальнення не є суттєвим для кола питань, що розглядаються у статті.

Зауваження 4.1.5. Нехай $\tau \in T$, $q \in \mathbb{Z}_+$ та $\beta \in [0,1]$. За аналогією із регулярним випадком можна увести на $\mathcal{P}_W$ скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\tau,q,\beta}$, поклавши для $f, g \in \mathcal{P}_W$ вигляду (3.2)

$$(f,g)_{\tau,q,\beta} := \sum_{n=0}^{\min(N_f,N_g)} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}}$$

(пор. (3.3)), і визначити «параметризовані простори Кондратьєва основних функцій» $(\mathcal{H}_\tau)_q^\beta$ як поповнення $\mathcal{P}_W$ за нормами, породженими цими скалярними добутками. Можна вивчати властивості просторів $(\mathcal{H}_\tau)_q^\beta$ та їх проєктивних границь, уводити та досліджувати на них певні оператори, зокрема, стохастичну похідну, оператори стохастичного диференціювання тощо. Такий розгляд є цікавим сам по собі та може бути корисним для певних застосувань; але $(\mathcal{H}_\tau)_q^\beta \not\subset (L^2)$, якщо $\beta < 1$, взагалі кажучи, отже, не можна розглядати $(\mathcal{H}_\tau)_q^\beta$ з $\beta < 1$ як простори основних функцій в аналізі білого шуму Леві. В той самий час як у регулярному, так і у нерегулярному випадках можна увести простори основних функцій $(L^2)_q^\beta$ та $(\mathcal{H}_\tau)_q^\beta$ відповідно, з параметром $\beta > 1$. Побудова аналізу, пов'язаного з такими просторами та відповідними просторами узагальнених функцій, не відрізняється суттєво від побудови для $\beta \in [0,1]$ у регулярному випадку та для $\beta = 1$ у нерегулярному, але має певні особливості, які ми не будемо розглядати у цій статті.

Опишемо природні ортогональні базиси у просторах $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ (зрозуміло, що на відміну від регулярного випадку, вони не можуть складатись з таких самих елементів, як і ортогональні базиси у просторах $(\mathcal{H}_\tau)_q$). Розглянемо ланцюжки

$$\mathcal{D}'^{(n)}_{\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}} \supset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}_{\mathbb{C}}, \tag{4.4}$$

$n \in \mathbb{N}$, де $\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ та $\mathcal{D}'^{(n)}_{\mathbb{C}} = \operatorname{ind}\lim_{\tau' \in T} \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau',\mathbb{C}}$ – простори, спряжені відповідно до $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}}$ та $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}_{\mathbb{C}} = \operatorname{pr}\lim_{\tau' \in T} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau',\mathbb{C}}$ відносно $\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$. Покладемо $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} 0}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} 0}_{\tau,\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{(0)}_{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}^{(0)}_{-\tau,\mathbb{C}} = \mathcal{D}'^{(0)}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ext}}$ дійсні (білінійні) дуальні спарювання між елементами негативних та позитивних просторів ланцюжків (4.4), породжені скалярними добутками у $\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}$. Наступне твердження випливає з визначення просторів $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ та загальної теорії дуальності (пор. з [22, 20]).

Твердження 4.1.6. *У кожному просторі $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$, $\tau \in T$, $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)}$, існує система узагальнених функцій*

$$\left\{ :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext}} \rangle: \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \mid F^{(n)}_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}},\ n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

таких, що

1) для $F^{(n)}_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}} \subset \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ $:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext}}\rangle:$ *– віківський моном, визначений у Підрозділі 1.2;*

2) кожну узагальнену функцію $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ *можна єдиним чином представити у вигляді ряду*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext}}\rangle:, \ \ F^{(n)}_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}, \tag{4.5}$$

який збігається у $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$*, тобто*

$$\|F\|^2_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-qn} |F^{(n)}_{\mathrm{ext}}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}} < \infty; \tag{4.6}$$

і, навпаки, кожний ряд (4.5) *зі скінченною нормою* (4.6) *є узагальненою функцією з* $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ *(тобто такий ряд збігається у* $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$*);*

3) дуальне спарювання між елементами $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ *та* $f \in (\mathcal{H}_{\tau})_{q}$*, породжене скалярним добутком у* (L^2)*, має вигляд*

$$\langle\!\langle F, f\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle F^{(n)}_{\mathrm{ext}}, f^{(n)}\rangle_{\mathrm{ext}},$$

де $F^{(n)}_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ *та* $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}}$ *– ядра з розкладів* (4.5) *та* (4.1) *для* F *та* f *відповідно.*

Зрозуміло, що $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ ($F \in (\mathcal{D}')$) якщо та лише якщо F можна єдиним чином представити у вигляді (4.5) та норма (4.6) є скінченною для деякого $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)}$ (для деяких $\tau \in T$ та $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)}$).

4.2. **Розширений стохастичний інтеграл на просторах нерегулярних узагальнених функцій.** У Підрозділі 2.1 описано узагальнений ізометричний ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала між простором квадратично інтегровних випадкових величин (L^2) та зваженим розширеним симетричним простором Фока. Оскільки, очевидно, звуження цього ізоморфізму на простори $(\mathcal{H}_\tau)_q \subset (L^2)$ є ізометричними ізоморфізмами між $(\mathcal{H}_\tau)_q$ та зваженими симетричними просторами Фока (пор. з [28]) $\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}}$, для довільних $n \in \mathbb{Z}_+$ та $f^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ віківськи мономи $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)}_{\cdot}\rangle:$ (див. (2.1)) належать $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і, щобільше, такі мономи формують ортогональні базиси у вказаних просторах у тому сенсі, що $f \in (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ якщо та лише якщо f можна єдиним чином представити у вигляді (пор. з (2.2))

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)}_{\cdot}\rangle:, \quad f^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

(ряд збігається у $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$), з

$$\|f\|^2_{(\mathcal{H}_\tau)_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^2 2^{qn}|f^{(n)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} < \infty.$$

Отже, як і у випадку просторів $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$, із загальної теорії дуальності випливає, що у кожному просторі $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, $\tau\in T$, $q\in\mathbb{N}_{q_0(\tau)}$, існує система узагальнених функцій

$$\left\{:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\rangle :\in(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} \mid F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C},\ n\in\mathbb{Z}_+\right\}$$

таких, що для $F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{ext}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}\subset\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ елемент $:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\rangle:$ визначається формулою (2.1); кожну узагальнену функцію

$$F\in(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$$

можна єдиним чином представити у вигляді ряду

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\rangle:,\ \ F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}, \tag{4.7}$$

який збігається у $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, тобто

$$\|F\|^2_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty}2^{-qn}|F^{(n)}_{\mathrm{ext},\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} < \infty; \tag{4.8}$$

і, навпаки, кожний ряд (4.7) зі скінченною нормою (4.8) є узагальненою функцією з $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ (тобто такий ряд збігається у $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$). Щобільше, зрозуміло, що

$$F\in(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} = \operatorname*{ind\,lim}_{q'\to+\infty}(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q'}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$$

($F\in(\mathcal{D}')\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} = \operatorname*{ind\,lim}_{\tau'\in T, q'\to+\infty}(\mathcal{H}_{-\tau'})_{-q'}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$) якщо та лише якщо F можна єдиним чином представити у вигляді (4.7) та норма (4.8) є скінченною для деякого $q\in\mathbb{N}_{q_0(\tau)}$ (для деяких $\tau\in T$ та $q\in\mathbb{N}_{q_0(\tau)}$).

Опишемо конструкцію розширеного стохастичного інтеграла за процесом Леві, яка базується на розкладі (4.7). Почнемо з підготовки. Розглянемо сім'ю ланцюжків

$$\mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C}\supset\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{-\tau,\mathbb{C}}\supset\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C}\supset\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{\tau,\mathbb{C}}\supset\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C}, \tag{4.9}$$

$n\in\mathbb{N}$ (добре відомо (пор. з [40]), що $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{-\tau,\mathbb{C}}$ та $\mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C} = \operatorname*{ind\,lim}_{\tau'\in T}\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{-\tau',\mathbb{C}}$ – простори, спряжені відповідно до $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_{\tau,\mathbb{C}}$ та $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C}$ відносно $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}_\mathbb{C}$). Покладемо $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}0}_\mathbb{C} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}0}_{\tau,\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}0}_\mathbb{C} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}0}_{-\tau,\mathbb{C}} = \mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}0}_\mathbb{C} := \mathbb{C}$. Оскільки простори основних функцій у ланцюжках (4.9) та (4.4) співпадають, існує сім'я природних ізоморфізмів

$$U_n : \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}{}^{(n)} \to \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}{}^{\widehat{\otimes} n},\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

таких, що для всіх $F^{(n)}_{\text{ext}} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}{}^{(n)}$ та $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$\langle F^{(n)}_{\text{ext}}, f^{(n)}\rangle_{\text{ext}} = \langle U_n F^{(n)}_{\text{ext}}, f^{(n)}\rangle. \tag{4.10}$$

Легко бачити, що звуження U_n на простори $\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ є *ізометричними* ізоморфізмами між просторами $\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ та $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}}$.

Зауваження 4.2.1. Оскільки $\mathcal{H}^{(1)}_{\text{ext}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, у випадку $n = 1$ ланцюжки (4.9) та (4.4) збігаються. Отже, $U_1 = \mathbf{1}$ – одиничний оператор на $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}{}^{(1)} = \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$. Якщо $n = 0$, U_0 є, очевидно, одиничним оператором на $\mathbb{C}$.

Означення 4.2.2. Для $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві

$$\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q},$$

поклавши

$$\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)}_{\text{ext},\Delta}\rangle: \tag{4.11}$$

(пор. з (2.6)), де

$$\widehat{F}^{(n)}_{\text{ext},\Delta} := U^{-1}_{n+1}\{Pr[(U_n \otimes \mathbf{1})F^{(n)}_{\text{ext},\cdot} 1_{\Delta}(\cdot)]\} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{-\tau,\mathbb{C}}, \tag{4.12}$$

Pr – оператор симетризації (точніше, ортопроєктор, що діє для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ з $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$ до $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+1}_{-\tau,\mathbb{C}}$), $F^{(n)}_{\text{ext},\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – ядра з розкладу (4.7) для F.

Оскільки

$$\begin{aligned}|\widehat{F}^{(n)}_{\text{ext},\Delta}|_{\mathcal{H}^{(n+1)}_{-\tau,\mathbb{C}}} &= |Pr[(U_n \otimes \mathbf{1})F^{(n)}_{\text{ext},\cdot} 1_{\Delta}(\cdot)]|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+1}_{-\tau,\mathbb{C}}} \leq \\ &\leq |(U_m \otimes \mathbf{1})F^{(n)}_{\text{ext},\cdot}|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = |F^{(m)}_{\text{ext},\cdot}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}\end{aligned}$$

і тому в силу (4.11), (4.6) та (4.8)

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u \Big\|^2_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-q(n+1)} |\widehat{F}^{(n)}_{\text{ext},\Delta}|^2_{\mathcal{H}^{(n+1)}_{-\tau,\mathbb{C}}} \leq \\ &\leq 2^{-q} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-qn} |F^{(n)}_{\text{ext},\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = 2^{-q}\|F\|^2_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}},\end{aligned}$$

це визначення є коректним і, щобільше, розширений стохастичний інтеграл

$$\int_{\Delta} \circ(u)\widehat{d}L_u : (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q} \tag{4.13}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому й *неперервним* оператором.

Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного результату з [20].

Твердження 4.2.3. *Розширений стохастичний інтеграл* (4.13) *є розширенням інтеграла* (2.7), *а тому і розширенням стохастичного інтеграла Іто за процесом Леві.*

Легко бачити, що розширений стохастичний інтеграл можна визначити за допомогою (4.11), (4.12) як лінійний *неперервний* оператор, що діє з простору $(\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(\mathcal{H}_{-\tau})$, або з простору $(\mathcal{D}') \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(\mathcal{D}')$. Саме

$$\int_{\Delta} \circ(u)\widehat{d}L_u : (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (\mathcal{H}_{-\tau}) \tag{4.14}$$

буде одним з об'єктів нашого розгляду в наступному підрозділі.

Зауваження 4.2.4. Як і інтеграли (3.9), (3.10), інтеграл (4.13) та його розширення (4.14) мають властивість (3.11), що дозволяє узагальнити розширений стохастичний інтеграл за аналогією із Зауваженням 3.2.2: якщо функція $F : \mathbb{R}_+ \to (\mathcal{H}_{-\tau})$ є такою, що $F \notin (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, але для деякої множини $\Theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$F(\cdot)1_{\Theta}(\cdot) \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

то для довільної вимірної множини $\Delta \subseteq \Theta$

$$F(\cdot)1_{\Delta}(\cdot) \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

і $\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ можна визначити формулою (3.11).

Насамкінець зауважимо, що лінійний неперервний оператор

$$1_{\Delta}(\cdot)\partial_{\cdot} : (\mathcal{H}_{\tau})_q \to (\mathcal{H}_{\tau})_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{4.15}$$

спряжений до розширеного стохастичного інтеграла (4.13), є звуженням стохастичної похідної Хіди (2.11) з (L^2) на $(\mathcal{H}_{\tau})_q$. Оператори (4.13) та (4.15) є взаємно спряженими, див. детальніше у [20].

Зауваження 4.2.5. На відміну від регулярного випадку, розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві, взагалі кажучи, неможливо природним чином звузити на простори нерегулярних основних функцій. Точніше, для $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ та $f \in (\mathcal{H}_{\tau})_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (чи навіть для $\Delta = \mathbb{R}_+$ та $f \in (\mathcal{H}_{\tau})_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$) $\int_{\Delta} f(u)\widehat{d}L_u$ може не бути *нерегулярною* основною функцією (можна показати, що для достатньо великих натуральних q цей інтеграл є *регулярною* основною функцією). Стохастичну похідну Хіди, своєю чергою, взагалі кажучи, не можна природним чином розширити на простори нерегулярних узагальнених функцій: немає ані стохастичного інтеграла на просторах нерегулярних основних функцій, до якого таке розширення мало б бути спряженим оператором, ані природного способу «відокремити одну змінну» від елементів $\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $n > 1$, щоб скористатись для визначення похідної формулою типу (2.10). Втім, можна увести природні аналоги розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди на просторах нерегулярних основних та узагальнених функцій відповідно, які є взаємно спряженими операторами і володіють багатьма властивостями стохастичних інтеграла та похідної. Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про це у [26, 25].

4.3. **Елементи віківського числення на просторах нерегулярних узагальнених функцій.** За аналогією з регулярним випадком, для кожного $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ визначимо S-перетворення $(SF)(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, як *формальний* ряд (пор. з (3.34))

$$(SF)(\lambda) := \sum_{m=0}^{\infty} \langle F^{(m)}_{\mathrm{ext}}, \lambda^{\otimes m}\rangle_{\mathrm{ext}} \equiv F^{(0)}_{\mathrm{ext}} + \sum_{m=1}^{\infty} \langle F^{(m)}_{\mathrm{ext}}, \lambda^{\otimes m}\rangle_{\mathrm{ext}}, \tag{4.16}$$

де $F^{(m)}_{\mathrm{ext}} \in \mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (4.5) для F.

Зокрема, $(SF)(0) = F^{(0)}_{\mathrm{ext}}$, $S1 \equiv 1$. Як і у регулярному випадку, кожний доданок у правій частині (4.16) визначений коректно, але ряд може розбігатись.

Означення 4.3.1. (пор. з Означенням 3.4.1) Для $F, G \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ визначимо віківський добуток $F\Diamond G$ та віківську версію $h^{\Diamond}(F)$ за формулою (3.35).

Зрозуміло, що зараз, як і у регулярному випадку, віківське множення $\Diamond$ комутативне, асоціативне, дистрибутивне, та для довільного $\alpha \in \mathbb{C}$ задовольняє рівність (3.36); а віківську версію голоморфної у $(SF)(0)$ функції h можна представити у вигляді (3.38).

Порівнюючи визначення S-перетворення на просторах $(L^2)^{-\beta}$ (тут і далі вважаємо, що $\beta \in [0, 1]$) та $(\mathcal{H}_{-\tau})$ (див. (3.34) та (4.16); нагадаємо, що дуальні спарювання $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ext}}$ породжені скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{ext}}$), приходимо до висновку, що для $F, G \in (L^2)^{-\beta} \cap (\mathcal{H}_{-\tau})$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $F\Diamond G$ та $h^{\Diamond}(F)$, визначені у Означеннях 3.4.1 та 4.3.1, співпадають (саме тому ми зберігаємо позначення Підрозділу 3.4).

Для того, щоб виписати «координатні формули» для віківського добутку та віківської версії голоморфної функції на $(\mathcal{H}_{-\tau})$ за аналогією з Твердженням 3.4.3, потрібна невелика підготовка: слід увести природний аналог симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $F^{(n)}_{\text{ext}} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ та $G^{(m)}_{\text{ext}} \in \mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, покладемо

$$\begin{aligned} F^{(n)}_{\text{ext}} \diamond G^{(m)}_{\text{ext}} &:= U^{-1}_{n+m}\{Pr[(U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \otimes (U_m G^{(m)}_{\text{ext}})]\} \equiv \\ &\equiv U^{-1}_{n+m}\{(U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \widehat{\otimes} (U_m G^{(m)}_{\text{ext}})\} \in \mathcal{H}^{(n+m)}_{-\tau,\mathbb{C}}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

де Pr – оператор симетризації (точніше, ортопроектор, що діє з $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m}_{-\tau,\mathbb{C}}$ в $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+m}_{-\tau,\mathbb{C}}$). З властивостей операторів U_n та симетричного тензорного добутку випливає, що множення $\diamond$ є комутативним, асоціативним та дистрибутивним, а також для довільного $\alpha \in \mathbb{C}$ задовольняє рівність (3.16). Далі, оскільки $U_n : \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \to \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – *ізометричні* ізоморфізми,

$$\begin{aligned} |F^{(n)}_{\text{ext}} \diamond G^{(m)}_{\text{ext}}|_{\mathcal{H}^{(n+m)}_{-\tau,\mathbb{C}}} &= |(U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \widehat{\otimes} (U_m G^{(m)}_{\text{ext}})|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+m}_{-\tau,\mathbb{C}}} \leq \\ &\leq |U_n F^{(n)}_{\text{ext}}|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}}} |U_m G^{(m)}_{\text{ext}}|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m}_{-\tau,\mathbb{C}}} = |F^{(n)}_{\text{ext}}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}} |G^{(m)}_{\text{ext}}|_{\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Насамкінець, в силу (4.10) та (4.17) для кожного $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ маємо

$$\begin{aligned} &\langle F^{(n)}_{\text{ext}}, \lambda^{\otimes n}\rangle_{\text{ext}} \langle G^{(m)}_{\text{ext}}, \lambda^{\otimes m}\rangle_{\text{ext}} = \langle U_n F^{(n)}_{\text{ext}}, \lambda^{\otimes n}\rangle \langle U_m G^{(m)}_{\text{ext}}, \lambda^{\otimes m}\rangle = \\ &\quad = \langle (U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \otimes (U_m G^{(m)}_{\text{ext}}), \lambda^{\otimes n+m}\rangle = \langle (U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \widehat{\otimes} (U_m G^{(m)}_{\text{ext}}), \lambda^{\otimes n+m}\rangle \\ &\quad = \langle U^{-1}_{n+m}\{(U_n F^{(n)}_{\text{ext}}) \widehat{\otimes} (U_m G^{(m)}_{\text{ext}})\}, \lambda^{\otimes n+m}\rangle_{\text{ext}} = \langle F^{(n)}_{\text{ext}} \diamond G^{(m)}_{\text{ext}}, \lambda^{\otimes n+m}\rangle_{\text{ext}} \end{aligned}$$

(пор. з (3.39)). Використовуючи (3.35), (4.16) та цю рівність, як і у регулярному випадку за аналогією з майкснерівським аналізом [18] можна довести таке твердження (пор. з Твердженням 3.4.3).

Твердження 4.3.2. ([24]) *Для* $F_1, \ldots, F_n \in (\mathcal{H}_{-\tau})$, $n \in \mathbb{N}$, $F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n$ *задовольняє рівність* (3.40)*; зокрема, для* $F, G \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ $F \Diamond G$ *задовольняє рівність* (3.41). *Зараз* $F^{(k_j)}_j \in \mathcal{H}^{(k_j)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *– ядра з розкладів* (4.5) *для* F_j*;* $F^{(k)} \in \mathcal{H}^{(k)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ *та* $G^{(m-k)} \in \mathcal{H}^{(m-k)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ *– ядра з тих же розкладів для* F *та* G *відповідно. Далі, для* $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ *та голоморфної у* $(SF)(0) = F^{(0)}$ *функції* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $h^{\Diamond}(F)$ *задовольняє рівність* (3.42)*, де* $F^{(k)} \in \mathcal{H}^{(k)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ *– ядра з розкладу* (4.5) *для* F*,* $h_n \in \mathbb{C}$ *– коефіцієнти з розкладу* (3.37) *для* h.

Як і у регулярному випадку, формули (3.41) та (3.42) можна використати як альтернативні визначення віківського добутку та віківської версії голоморфної функції.

Наслідок 4.3.3. *Для довільних*

$$F_{\rm ext}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\rm ext}^{(n)} \subset \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)} \quad \textit{та} \quad G_{\rm ext}^{(m)} \in \mathcal{H}_{\rm ext}^{(m)} \subset \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)},$$

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, добуток $F_{\rm ext}^{(n)} \diamond G_{\rm ext}^{(m)}$, уведений у Підрозділі 3.3, співпадає з добутком (4.17) *(саме тому ми зберегли для добутку* (4.17) *позначення $\diamond$).*

Для доведення достатньо розглянути віківський добуток $:\langle \circ^{\otimes n}, F_{\rm ext}^{(n)}\rangle:$ та $:\langle \circ^{\otimes m}, G_{\rm ext}^{(m)}\rangle:$ і скористатись Твердженнями 3.4.3, 4.3.2 та 4.1.6.

Зауваження 4.3.4. Альтернативне доведення цього наслідку наведене у [26]. Варто відзначити, що найбільш складною частиною згаданого доведення є встановлення рівності (3.39), яка є ключовою у доведенні Твердження 3.4.3, яким ми користуємось для доведення наслідку.

Як і у регулярному випадку, наразі ряди у правих частинах рівностей (3.40), (3.41) та (3.42) розуміються як формальні: кожен доданок є коректно визначеним елементом простору $(\mathcal{H}_{-\tau})$, але про збіжність згаданих рядів в $(\mathcal{H}_{-\tau})$ (чи в будь-якому іншому просторі) у Твердженні 4.3.2 не йдеться. Отже, природним наступним кроком є встановлення збіжності цих рядів у просторах нерегулярних узагальнених функцій. За допомогою оцінки (4.18) можна отримати наступне твердження (пор. з Теоремою 3.4.5).

Теорема 4.3.5. ([24]) *1. Нехай $F_1, \ldots, F_n \in (\mathcal{H}_{-\tau})$. Тоді*

$$F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n \in (\mathcal{H}_{-\tau}).$$

До того, віківське множення є неперервним у тому сенсі, що для $q \in \mathbb{N}$ таких, що $F_1, \ldots, F_n \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}$, $F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n \in (\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ і

$$\|F_1 \Diamond \cdots \Diamond F_n\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}} \leq$$
$$\leq \sqrt{\max_{m \in \mathbb{Z}_+} [2^{-m}(m+1)^{n-1}]} \|F_1\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}} \cdots \|F_n\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}}.$$

2. Нехай $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ та функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ є голоморфною у $(SF)(0)$. Тоді $h^{\Diamond}(F) \in (\mathcal{H}_{-\tau})$.

Нагадаємо, що на просторах квадратично інтегровних та *регулярних* основних і узагальнених функцій можна увести оператори стохастичного диференціювання, які мають важливі застосування в аналізі білого шуму Леві. Зокрема, оператор стохастичного диференціювання першого порядку тісно пов'язаний зі стохастичною похідною Хіди (див. (3.22)) та задовольняє правило Лейбніца відносно віківського множення (див. Теорему 3.4.7). Разом з тим стохастичну похідну Хіди не можна природним чином розширити з (L^2) на простори *нерегулярних* узагальнених функцій (див. Зауваження 4.2.5). Отже, не дивно, що те ж саме можна сказати і про оператори стохастичного диференціювання. Справді, якщо F є елементом простору $(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}$ чи $(\mathcal{H}_{-\tau})$, ядра $F_{\rm ext}^{(m)}$ з розкладу (4.5) для F є елементами просторів $\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}$, а тому визначити часткові добутки (чи навіть часткові спарювання) $(f^{(n)}, F_{\rm ext}^{(m)})_{\rm ext}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $m > n$, необхідні для визначення операторів стохастичного диференціювання (див. (3.20)), неможливо: зараз для $g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m-n}$ $f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}$ є, взагалі кажучи, елементом простору $\mathcal{H}_{\rm ext}^{(m)}$, а тому дуальні спарювання $\langle f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F_{\rm ext}^{(m)} \rangle_{\rm ext}$, необхідні для визначення $(f^{(n)}, F_{\rm ext}^{(m)})_{\rm ext}$ (пор. з (3.17)), є невизначеними. З усім тим, на просторах нерегулярних узагальнених функцій можна уводити та вивчати природні аналоги операторів стохастичного диференціювання. У якості прикладу визначимо аналог оператора стохастичного диференціювання першого порядку на просторах $(\mathcal{H}_{-\tau})$ та сформулюємо аналоги Теореми 3.4.7 та її наслідку.

Нехай $F_{\rm ext}^{(m)} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$. Визначимо узагальнене часткове спарювання $\langle F_{\rm ext}^{(m)}, f^{(1)} \rangle_{\rm ext} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m-1)}$, поклавши для кожного $g^{(m-1)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m-1}$

$$\langle \langle F_{\rm ext}^{(m)}, f^{(1)} \rangle_{\rm ext}, g^{(m-1)} \rangle_{\rm ext} = \langle F_{\rm ext}^{(m)}, f^{(1)} \widehat{\otimes} g^{(m-1)} \rangle_{\rm ext},$$

((3.17)). Оскільки за узагальненою нерівністю Коши-Буняковського

$$\begin{aligned} |\langle F_{\rm ext}^{(m)}, f^{(1)} \widehat{\otimes} g^{(m-1)} \rangle_{\rm ext}| \leq |F_{\rm ext}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}} |f^{(1)} \widehat{\otimes} g^{(m-1)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m}} \leq \\ \leq |F_{\rm ext}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}} |f^{(1)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}} |g^{(m-1)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m-1}}, \end{aligned}$$

це визначення є коректним та справедлива оцінка

$$|\langle F_{\rm ext}^{(m)}, f^{(1)} \rangle_{\rm ext}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m-1)}} \leq |F_{\rm ext}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}} |f^{(1)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}}. \tag{4.19}$$

Означення 4.3.6. Нехай $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$. Визначимо аналог оператора стохастичного диференціювання першого порядку

$$(\widetilde{D}\circ)(f^{(1)}) : (\mathcal{H}_{-\tau}) \to (\mathcal{H}_{-\tau})$$

як лінійний неперервний оператор, що задається формулою

$$(\widetilde{D}F)(f^{(1)}) := \sum_{m=1}^{\infty} m :\langle \circ^{\otimes m-1}, \langle F_{\mathrm{ext}}^{(m)}, f^{(1)}\rangle_{\mathrm{ext}}\rangle:$$

(пор. з (3.20)), де $F_{\mathrm{ext}}^{(m)} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}$ – ядра з розкладу (4.5) для $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$.

Доведення коректності цього визначення базується на оцінці (4.19) та співпадає з точністю до очевидних модифікацій з доведенням відповідного твердження у [25].

Теорема 4.3.7. ([24], пор. з Теоремою 3.4.7) *Аналог оператора стохастичного диференціювання першого порядку $\widetilde{D}$ є диференціюванням (тобто задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення: для довільних $F, G \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ та $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$*

$$\big(\widetilde{D}(F\lozenge G)\big)(f^{(1)}) = (\widetilde{D}F)(f^{(1)})\lozenge G + F\lozenge(\widetilde{D}G)(f^{(1)}) \in (\mathcal{H}_{-\tau}).$$

Наслідок 4.3.8. *Нехай $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, та функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ голоморфна у $(SF)(0)$. Тоді*

$$\big(\widetilde{D}h^{\lozenge}(F)\big)(f^{(1)}) = h'^{\lozenge}(F)\lozenge(\widetilde{D}F)(f^{(1)}) \in (\mathcal{H}_{-\tau}),$$

тут $h'^{\lozenge}$ – віківська версія звичайної похідної функції h.

Більше інформації про аналоги операторів стохастичного диференціювання на просторах нерегулярних узагальнених функцій, зокрема, про їх властивості та зв'язок із розширеним стохастичним інтегралом, його аналогом на просторах нерегулярних основних функцій, та аналогом стохастичної похідної Хіди наведено у [25] (див. також [24]); оператори стохастичного диференціювання на просторах нерегулярних основних функцій вивчаються у [26]; елементи віківського числення на просторах нерегулярних основних функцій будуть розглянуті в одній з наступних робіт автора.

За аналогією із регулярним випадком, розглянемо зв'язок між віківським численням та стохастичним інтегруванням на просторах нерегулярних узагальнених функцій. Почнемо з підготовки.

Нехай $F_{\mathrm{ext}}^{(n)} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}$, $G_{\mathrm{ext},\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Використовуючи прийняті вище позначення, визначимо такий елемент з $\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$:

$$F_{\mathrm{ext}}^{(n)}\overline{\diamond} G_{\mathrm{ext},\cdot}^{(m)} := (U_{n+m}^{-1} \otimes \mathbf{1})\{(Pr \otimes \mathbf{1})[(U_n F_{\mathrm{ext}}^{(n)}) \otimes ((U_m \otimes \mathbf{1})G_{\mathrm{ext},\cdot}^{(m)})]\}. \tag{4.20}$$

За аналогією з (4.18) легко встановити [17], що

$$|F_{\mathrm{ext}}^{(n)}\overline{\diamond} G_{\mathrm{ext},\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq |F_{\mathrm{ext}}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}} |G_{\mathrm{ext},\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{4.21}$$

Зауваження 4.3.9. Нехай $n,m\in\mathbb{Z}_+$, $F^{(n)}_{\rm ext}\in\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $G^{(m)}_{\rm ext}\in\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, та $H^{(1)}\in\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. З (4.20) та (4.17) випливає, що

$$F^{(n)}_{\rm ext}\overline{\diamond}(G^{(m)}_{\rm ext}\otimes H^{(1)})=(F^{(n)}_{\rm ext}\diamond G^{(m)}_{\rm ext})\otimes H^{(1)}\in\mathcal{H}^{(n+m)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{4.22}$$

(пор. з (3.24)).

Використовуючи рівності (3.24) та (4.22), оцінки (3.23) та (4.21), а також Наслідок 4.3.3, неважко встановити такий результат.

Твердження 4.3.10. *Для довільних*

$$F^{(n)}_{\rm ext}\in\mathcal{H}^{(n)}_{\rm ext}\subset\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}\quad \textit{та}\quad G^{(m)}_{{\rm ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(m)}_{\rm ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\subset\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

$n,m\in\mathbb{N}$, *добуток* $F^{(n)}_{\rm ext}\overline{\diamond}G^{(m)}_{{\rm ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(n+m)}_{\rm ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *уведений у Підрозділі 3.3, співпадає з добутком* (4.20) *(саме тому ми зберегли для добутку* (4.20) *позначення* $\overline{\diamond}$*).*

Означення 4.3.11. (пор. з Означенням 3.4.9) Нехай $F\in(\mathcal{H}_{-\tau})$ та $G\in(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Визначимо віківський добуток $F\overline{\Diamond}G\in(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши

$$(F\overline{\Diamond}G)(\cdot):=\sum_{m=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes m},\sum_{k=0}^{m}F^{(k)}_{\rm ext}\overline{\diamond}G^{(m-k)}_{{\rm ext},\cdot}\rangle:, \tag{4.23}$$

де $F^{(k)}_{\rm ext}\in\mathcal{H}^{(k)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ та $G^{(m-k)}_{{\rm ext},\cdot}\in\mathcal{H}^{(m-k)}_{-\tau,\mathbb{C}}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладів (4.5) та (4.7) для F та G відповідно (пор. з (3.41) та (3.43)).

Використовуючи оцінку (4.21), за аналогією з [24] можна довести, що це визначення є коректним, а віківське множення $\overline{\Diamond}$ неперервне у тому сенсі, що для кожного $q\in\mathbb{N}$ такого, що

$$F\in(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}\quad\text{та}\quad G\in(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

маємо $F\overline{\Diamond}G\in(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та

$$\|F\overline{\Diamond}G\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}\le\|F\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}}\|G\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-(q-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$$

(пор. з Теоремою 4.3.5).

Порівнюючи визначення (4.23) і (3.43) та враховуючи Твердження 4.3.10, приходимо до висновку, що для

$$F\in(L^2)^{-\beta}\cap(\mathcal{H}_{-\tau})\quad\text{та}\quad G\in(L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\cap(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

віківські добутки $F\overline{\Diamond}G$, визначені в Означеннях 3.4.9 та 4.3.11, співпадають (саме тому ми зберегли для добутку (4.23) позначення $\overline{\Diamond}$). Відзначимо також, що для $F,G\in(\mathcal{H}_{-\tau})$ та $H^{(1)}\in\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$F\overline{\Diamond}(G\otimes H^{(1)})=(F\Diamond G)\otimes H^{(1)}\in(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{4.24}$$

(пор. з (3.44)), ця рівність випливає з (4.23), (4.22) та (3.41).

Теорема 4.3.12. ([17], пор. з Теоремою 3.4.11) *Нехай* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ *та* $G \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Тоді*

$$\int_\Delta F \overline{\Diamond} G(u) \widehat{d} L_u \equiv \int_\Delta (F \overline{\Diamond} G)(u) \widehat{d} L_u = F \Diamond \int_\Delta G(u) \widehat{d} L_u \in (\mathcal{H}_{-\tau}). \quad (4.25)$$

Зауваження 4.3.13. (пор. з Зауваженням 3.4.12) Інтерпретуючи G як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(\mathcal{H}_{-\tau})$ та зважаючи на конструкцію віківських добутків $\Diamond$ і $\overline{\Diamond}$, можна переписати рівність (4.25) у класичній формі (3.46).

Як і у регулярному випадку, розглянемо аналог властивості (4.25) для інтеграла Петтіса на просторах нерегулярних узагальнених функцій. Нехай $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ є таким, що $\rho(\Delta) < \infty$ (нагадаємо, що через ρ ми позначаємо міру Лебега на $\mathbb{R}_+$). Для кожного $G \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо інтеграл Петтіса $\int_\Delta G(u)du$ як єдиний елемент з простору $(\mathcal{H}_{-\tau})$ такий, що для кожного $f \in (\mathcal{H}_\tau)$ виконується рівність (3.47). Оскільки за узагальненою нерівністю Коши-Буняковського для кожного $q \in \mathbb{N}_{q_0(\tau)}$ (див. Твердження 4.1.2)

$$|\langle\!\langle G(\cdot), f \otimes 1_\Delta(\cdot) \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \le \|G\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \|f\|_{(\mathcal{H}_\tau)_q} \sqrt{\rho(\Delta)},$$

це визначення є коректним, а інтеграл Петтіса

$$\int_\Delta \circ(u)du : (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (\mathcal{H}_{-\tau}) \quad (4.26)$$

є лінійним *неперервним* оператором. Використовуючи цей факт, неперервність віківських множень $\Diamond$ і $\overline{\Diamond}$, а також рівність (4.24), можна довести таке твердження.

Теорема 4.3.14. ([17], пор. з Теоремами 3.4.13, 4.3.12 та 3.4.11) *Нехай* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *є таким, що* $\rho(\Delta) < \infty$, $F \in (\mathcal{H}_{-\tau})$ *та* $G \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Тоді*

$$\int_\Delta F \overline{\Diamond} G(u) du \equiv \int_\Delta (F \overline{\Diamond} G)(u) du = F \Diamond \int_\Delta G(u) du \in (\mathcal{H}_{-\tau}). \quad (4.27)$$

Зауважимо, що як і у випадку розширеного стохастичного інтеграла, можна інтерпретувати G як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(\mathcal{H}_{-\tau})$ та переписати рівність (4.27) у класичній формі (3.50).

Зауваження 4.3.15. (пор. з Зауваженням 3.4.14) Як і у регулярному випадку, для $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ з $\rho(\Delta) = \infty$ інтеграл Петтіса (4.26) можна визначити як лінійний *не неперервний* оператор з областю визначення

$$\Big\{G \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} : \text{для деякого } q \in \mathbb{Z}_+ \ \int_{\Delta} \|G(u)\|_{(\mathcal{H}_{-\tau})_{-q}} du < \infty\Big\}.$$

Можна довести, що для такого інтеграла, як і у випадку $\rho(\Delta) < \infty$, є справедливою рівність (4.27).

Насамкінець сформулюємо твердження (аналог Теореми 3.4.15) про представлення розширеного стохастичного інтеграла на просторах нерегулярних узагальнених функцій через інтеграл Петтіса.

Як відзначалось у Підрозділі 1.1, білий шум Леві $\dot{L}$ можна представити у вигляді $\langle \circ, \delta_u \rangle$, $u \in \mathbb{R}_+$. Як відомо (наприклад, [40]), для кожного u дельта-функція Дірака $\delta_u \in \mathcal{H}_{-\tau}$, отже,

$$\dot{L}_u = \langle \circ, \delta_u \rangle = :\langle \circ, \delta_u \rangle : \in (\mathcal{H}_{-\tau}).$$

Нехай $F \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Зараз нам зручно інтерпретувати F як функцію на $\mathbb{R}_+$ зі значеннями в $(\mathcal{H}_{-\tau})$, отже, для ρ-майже всіх $u \in \mathbb{R}_+$ віківський добуток $F(u) \Diamond \dot{L}_u$ є коректно визначеним елементом $(\mathcal{H}_{-\tau})$. Для довільного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ визначимо інтеграл Петтіса $\int_{\Delta} F(u) \Diamond \dot{L}_u du$ як єдиний елемент з простору $(\mathcal{H}_{-\tau})$ такий, що для кожного $f \in (\mathcal{H}_{\tau})$

$$\langle\!\langle \int_{\Delta} F(u) \Diamond \dot{L}_u du, f \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \int_{\Delta} \langle\!\langle F(u) \Diamond \dot{L}_u, f \rangle\!\rangle_{(L^2)} du \tag{4.28}$$

(пор. з (3.47)), коректність цього визначення доведено у [17].

Теорема 4.3.16. ([17], пор. з Теоремою 3.4.15) *Для довільних*

$$F \in (\mathcal{H}_{-\tau}) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \textit{та} \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

розширений стохастичний інтеграл, а саме $\int_{\Delta} F(u) \widehat{d} L_u$, *можна представити у вигляді*

$$\int_{\Delta} F(u) \widehat{d} L_u = \int_{\Delta} F(u) \Diamond \dot{L}_u du \equiv \int_{\Delta} F(u) \Diamond \langle \circ, \delta_u \rangle du \in (\mathcal{H}_{-\tau}). \tag{4.29}$$

Зауваження 4.3.17. (пор. з Зауваженням 3.4.16) Як і у регулярному випадку, рівність (4.28) (відповідно (4.25), (4.27)) зберігається для узагальненої функції F (відповідно G) та вимірної множини Δ, описаних у Зауваженні 4.2.4.

У якості прикладів застосування сформульованих результатів можна розглянути приклади з Підрозділу 3.4, замінивши скрізь $(L^2)^{-\beta}$ та $(L^2)^{-1}$ на $(\mathcal{H}_{-\tau})$.

Зауваження 4.3.18. Неважко показати, що результати, сформульовані у Розділі 4, залишаються справедливими (з точністю до очевидних модифікацій), якщо розглянути простори $(\mathcal{D}')$ та $(\mathcal{D}')\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ замість просторів $(\mathcal{H}_{-\tau})$ та $(\mathcal{H}_{-\tau})\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно.

Вивченню зв'язку між аналогом розширеного стохастичного інтеграла та віківським численням на просторах нерегулярних основних функцій буде присвячено одну з наступних робіт автора.

Я щиро вдячний професору В. І. Герасименку за пропозицію написати цей огляд та всебічну підтримку.

Література

[1] Benth F. E., Di Nunno G., Lokka A., Oksendal B., and Proske F. “Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes”. *Math. Finance* 13:1 (2003), pp. 55–72.

[2] Berezansky Yu. M. and Samoilenko Yu. S. “Nuclear spaces of functions of infinitely many variables”. *Ukr. Math. J.* 25:6 (1973), pp. 599–609.

[3] Bertoin J. *Lévy processes.* Cambridge University Press, Melbourne, New York, 1996, pp. X+265.

[4] Bożejko M., Lytvynov E. W., and Rodionova I. V. “An extended anyon Fock space and noncommutative Meixner-type orthogonal polynomials in infinite dimensions”. *Russian Math. Surveys* 70:5 (2015), pp. 857–899.

[5] Dermoune A. “Distributions sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastic”. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 26 (1990), pp. 101–119.

[6] Di Nunno G., Oksendal B., and Proske F. *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009, p. 418.

[7] Di Nunno G., Oksendal B., and Proske F. “White noise analysis for Lévy processes”. *J. Funct. Anal.* 206:1 (2004), pp. 109–148.

[8] Dyriv M. M. and Kachanovsky N. A. “On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions of Lévy white noise analysis”. *Carpathian Mathematical Publications* 6:2 (2014), pp. 212–229.

[9] Dyriv M. M. and Kachanovsky N. A. “Operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions in the Lévy white noise analysis”. *Naukovi visti NTUU KPI* 18:4 (2014), pp. 36–40.

[10] Dyriv M. M. and Kachanovsky N. A. “Stochastic integrals with respect to a Lévy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized functions”. *Naukovi visti NTUU KPI* 17:4 (2013), pp. 27–30.

[11] Frei M. M. “Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis”. *Carpathian Mathematical Publications* 10:1 (2018), pp. 82–104.

[12] Frei M. M. and Kachanovsky N. A. “On the relationship between Wick calculus and stochastic integration in the Lévy white noise analysis”. *European Journal of Mathematics* 6:1 (2020), pp. 179–196.

[13] Frei M. M. and Kachanovsky N. A. “Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Lévy white noise analysis”. *Meth. Func. Anal. and Topol.* 23:4 (2017), pp. 320–345.

[14] Hida T. “Analysis of Brownian functionals”. *Carleton mathematical lecture notes, Vol. 13. Carleton University.* 1975.

[15] Holden H., Oksendal B., Uboe J., and Zhang T.-S. *Stochastic partial differential equations - a modeling, white noise functional approach.* Birkhäuser, Boston, 1996, pp. XV+234.

[16] Itô K. "Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments". *Trans. Am. Math. Soc.* 81 (1956), pp. 253–263.

[17] Kachanovska T. O. and Kachanovsky N. A. "Interconnection between Wick multiplication and integration on spaces of nonregular generalized functions in the Lévy white noise analysis". *Carpathian Mathematical Publications* 11:1 (2019), pp. 70–88.

[18] Kachanovsky N. A. "An extended stochastic integral and a Wick calculus on parametrized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 11:4 (2008), pp. 541–564.

[19] Kachanovsky N. A. "Bounded operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular generalized functions in the Lévy white noise analysis". *Naukovi visti NTUU KPI* 20:4 (2016), pp. 48–55.

[20] Kachanovsky N. A. "Extended stochastic integrals with respect to a Lévy process on spaces of generalized functions". *Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society* 10 (2013), pp. 169–188.

[21] Kachanovsky N. A. "Notes on Wick calculus on parametrized spaces of test functions of Meixner white noise". *Meth. Func. Anal. and Topol.* 17:2 (2011), pp. 150–167.

[22] Kachanovsky N. A. "On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces". *Meth. Func. Anal. and Topol.* 13:4 (2007), pp. 338–379.

[23] Kachanovsky N. A. "On extended stochastic integrals with respect to Lévy processes". *Carpathian Mathematical Publications* 5:2 (2013), pp. 256–278.

[24] Kachanovsky N. A. "On Wick calculus on spaces of nonregular generalized functions of Lévy white noise analysis". *Carpathian Mathematical Publications* 10:1 (2018), pp. 114–132.

[25] Kachanovsky N. A. "Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular generalized functions of Lévy white noise analysis". *Carpathian Mathematical Publications* 8:1 (2016), pp. 83–106.

[26] Kachanovsky N. A. "Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular test functions of Lévy white noise analysis". *Meth. Func. Anal. and Topol.* 21:4 (2015), pp. 336–360.

[27] Kachanovsky N. A. "Stochastic integral and stochastic derivative connected with a Lévy process". *Naukovi visti NTUU KPI* 16:4 (2012), pp. 77–81.

[28] Kachanovsky N. A. and Tesko V. A. "Stochastic integral of Hitsuda-Skorokhod type on the extended Fock space". *Ukr. Math. J.* 61:6 (2009), pp. 873–907.

[29] Kondratiev Yu. G. and Lytvynov E. W. "Operators of gamma white noise calculus". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 3:3 (2000), pp. 303–335.

[30] Kondratiev Yu. G. and Samoilenko Yu. S. "The spaces of trial and generalized functions of infinitely many variables". *Rep. Math. Phys.* 14:3 (1978), pp. 323–348.

[31] Koshmanenko V. D. and Samoilenko Yu. S. "Isomorphism of Fock space with a space of functions of infinitely many variables". *Ukr. Math. J.* 27:5 (1975), pp. 552–555.

[32] Lytvynov E. W. "Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 6:1 (2003), pp. 73–102.

[33] Meyer P. A. "Quantum probability for probabilists". 1993, X+312. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1538, Springer–Verlag, Berlin.

[34] Nualart D. and Schoutens W. "Chaotic and predictable representations for Lévy processes". *Stochastic Process. Appl.* 90:1 (2000), pp. 109–122.

[35] Rodionova I. V. "Analysis connected with generating functions of exponential type in one and infinite dimensions". *Meth. Func. Anal. and Topol.* 11:3 (2005), pp. 275–297.

[36] Schoutens W. "Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials". 2000, 179. In: Lect. Notes in Statist., Vol. 146. Springer–Verlag, New York.

[37] Solé J. L., Utzet F., and Vives J. "Chaos expansions and Malliavin calculus for Lévy processes". 2007, 595–612. In: Stoch. Anal. and Appl., Abel Symposium 2. Springer, Berlin.

[38] Surgailis D. "On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration". 1981, 212–226. In: Lect. Notes in Control and Information Sciences, Vol. 36, Springer–Verlag., Berlin–Heidelberg.

[39] Vershik A. M. and Tsilevich N. V. "Fock factorizations and decompositions of the L^2 spaces over general Lévy processes". *Russian Math. Surveys* 58:3 (2003), pp. 427–472.

[40] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., and Шефтель З. Г. *Функциональный анализ. Курс лекций.* Выща школа, Киев, 1990, p. 600.

[41] Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я. *Обобщенные функции, Том IV.* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961, с. 472.

[42] Гихман И. И. и Скороход А. В. *Теория случайных процессов, Том 2.* Наука, Москва, 1973, с. 664.

[43] Кондратьев Ю. Г. *Обобщенные функции в задачах бесконечномерного анализа.* Дис. кандидата физ.-мат. наук, Киев, 1978, с. 173.

[44] Скороход А. В. *Интегрирование в Гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1975, с. 231.

М. О. Качановський

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: `nkachano@gmail.com`

ORCID: `orcid.org/orcid.org/0000-0001-7354-5384`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 508–554

Моногенні функції в комутативних алгебрах і еліптичні рівняння математичної фізики

С. А. Плакса

Abstract. An algebraic-analytic approach to elliptic equations of mathematical physics is developed at the Department of Complex Analysis and Potential Theory of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. This approach means a finding of commutative Banach algebra such that differentiable in the sense of Gâteaux functions with values in this algebra have components satisfying the given equation with partial derivatives. Such algebras are found for the biharmonic equation and the three-dimensional Laplace equation and elliptic equations degenerating on an axis that describe axial-symmetric potential fields. An use of differentiable in the sense of Gâteaux functions given in commutative Banach algebras combines the preservation of basic properties of analytic functions of a complex variable for the mentioned differentiable functions and the convenience and the simplicity of construction of solutions of PDEs.

Анотація. У відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України розвивається алгебраїчно-аналітичний підхід до еліптичних рівнянь математичної фізики. Цей підхід полягає у знаходженні комутативної банахової алгебри такої, що компоненти диференційовних за Гато функцій зі значеннями в цій алгебрі задовольняють задане рівняння з астинними похідними. Такі алгебри знайдені для бігармонічного рівняння, тривимірного рівняння Лапласа і еліптичних рівнянь з виродженням на осі, що описують осесиметричні потенціальні поля. Використання диференційовних за Гато функцій, заданих в комутативних банахових алгебрах, поєднує збереження основних властивостей аналітичних функцій комплексної змінної для вказаних диференційовних функцій зі зручністю і простотою побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними.

2010 Mathematics Subject Classification: 30G35, 35J05, 31A30

УДК 517.54, 519.95

Ключові слова: рівняння Лапласа, бігармонічне рівняння, осесиметричний потенціал, функція течії Стокса, комутативна банахова алгебра, моногенна функція, аналітична функція, умови Коші-Рімана, теорема Коші, інтегральна формула Коші

1. Вступ. Передісторія

Визначаючи стаціонарне потенціальне соленоїдальне поле в однозв'язній області тривимірного дійсного простору $\mathbb{R}^3$, вектор-функція $\mathbf{V}$ задовольняє систему рівнянь $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{V} = 0$, яку запишемо також у розгорнутому вигляді:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

де $\mathbf{V} := (v_1, v_2, v_3)$ і $v_k := v_k(x, y, z)$ при $k = 1, 2, 3$ є дійснозначними скалярними функціями декартових координат x, y, z.

При цьому існує скалярна потенціальна функція $u(x, y, z)$ така, що $\mathbf{V} = \mathrm{grad}u := \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ і u задовольняє тривимірне рівняння Лапласа

$$\Delta_3 u(x, y, z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x, y, z) = 0. \tag{1.2}$$

Очевидно, що у випадку плоского поля, коли $v_3 \equiv 0$ та функції v_1, v_2 не залежать від z, рівняння системи (1.1) перетворюються в класичні умови Коші-Рімана для компонент комплексного потенціалу

$$F(x + iy) = v_1(x, y) + iv_2(x, y),$$

що є аналітичною функцією комплексної змінної $x + iy$. Більш того, кожна аналітична функція $F(x + iy)$ задовольняє двовимірне рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F(x + iy) \equiv F''(x + iy)(1^2 + i^2) = 0$$

через рівність $1^2 + i^2 = 0$ для одиниці 1 та уявної одиниці i алгебри комплексних чисел.

Вагомим надбанням математики є опис плоских потенціальних полів, які описуються двовимірним рівнянням Лапласа, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Ефективність і легкість застосування методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної до дослідження плоских потенціальних полів спонукає математиків до відшукання аналогічних методів для просторових полів.

М.О. Лаврентьєв (див., наприклад, [82, с. 205]) в загальних рисах окреслив проблему розробки методів дослідження просторових потенціальних полів, аналогічних до методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Такі методи, зокрема, можуть базуватися на відображеннях алгебр гіперкомплексних чисел.

Напевно, У. Гамільтон [72] зробив перші спроби побудувати алгебру, асоційовану з тривимірним рівнянням Лапласа (1.2) у тому сенсі, щоб компоненти гіперкомплексних функцій задовольняли рівняння (1.2).

У. Гамільтон [72] побудував некомутативну алгебру кватерніонів з базисом $\{1, i, j, k\}$ і таблицею множення

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Використовуючи оператор $\nabla := i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$, він переписав рівняння (1.1) в еквівалентній формі $\nabla W(x, y, z) = 0$ для функції

$$W(x, y, z) := iv_1(x, y, z) + jv_2(x, y, z) + kv_3(x, y, z).$$

В цьому випадку рівняння (1.1) можна розглядати як аналоги умов Коші-Рімана для функції $W(x, y, z)$, що приймає значення в алгебрі кватерніонів.

Г. Мойсіл і Н. Теодореску [31], Р. Фуетер [7] розглядали узагальнення системи (1.1) для функцій зі значеннями в алгебрі кватерніонів.

Проте, не зважаючи на зручність і компактність запису ряду співвідношень для потенціальних полів у кватерніонній формі, довгий час розвиток застосувань кватерніонних функцій був істотно обмежений нерозвиненістю методів ефективної побудови таких функцій, як і функцій, що приймають значення в інших некомутативних алгебрах.

Після відкриття У. Гамільтоном алгебри кватерніонів розпочався бурхливий період побудови інших алгебр гіперкомплексних чисел. Зокрема, для опису лінійних асоціативних алгебр Б. Пірс [32] ввів поняття нільпотентних та ідемпотентних елементів і побудував таблиці множення 163 алгебр розмірності, не більшої ніж 6, проте при цьому розглянув не всі тривимірні та чотиривимірні алгебри. Е. Штуді [69] описав усі асоціативні алгебри з одиницею до розмірності 4 включно над полем дійсних і над полем комплексних чисел. К. Сегре [61] розглядав комутативні алгебри мультикомплексних чисел. Такі алгебри будуються за індукцією і мають розмірності 2^n як алгебри над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Зокрема, алгебра бікомплексних чисел (їх називають також кватерніонами Сегре) має розмірність 4 над полем $\mathbb{R}$. Е. Картан [3] довів, що у будь-якій скінченновимірній асоціативній алгебрі з одиницею існує базис, що складається лише з нільпотентних та ідемпотентних елементів, і вказав таблицю множення для такого базису.

Перші спроби використати комутативні алгебри для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа дали негативний результат.

Нехай $\mathbb{A}$ – n-вимірна комутативна асоціативна банахова алгебра з одиницею 1 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ або над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $3 \leq n \leq \infty$. Нехай $\{e_1, e_2, e_3\}$ – частина базису алгебри $\mathbb{A}$ та

$E_3 := \{\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ – лінійна оболонка векторів e_1, e_2, e_3 над полем $\mathbb{R}$.

Будемо використовувати однакове позначення Ω для області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ та для області в E_3, яка є конгруентною до області Ω.

Функцію $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ називають *аналітичною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо в деякому околі кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ вона може бути представлена у вигляді суми збіжного степеневого ряду з коефіцієнтами, що належать алгебрі $\mathbb{A}$.

Г.А. фон Бек-Відманстеттер [1] довів наступне твердження:

Не існує тривимірної асоціативної комутативної над полем $\mathbb{R}$ алгебри з одиницею $e_1 = 1$ такої, щоб усі компоненти розкладу за базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ аналітичної функції

$$\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = u_1(x, y, z)e_1 + u_2(x, y, z)e_2 + u_3(x, y, z)e_3,$$

відмінної від лінійної функції, задовольняли рівняння (1.2).

Не зважаючи на це, П.В. Кетчум [21] використав аналітичні функції зі значеннями в комутативних алгебрах для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа (1.2). Він показав, що якщо лінійно незалежні елементи $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}$ задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \tag{1.3}$$

то кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє рівняння (1.2) через співвідношення

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\zeta) \equiv \Phi''(\zeta)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0, \tag{1.4}$$

де $\Phi'' := (\Phi')'$ і Φ' визначена рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$, як і в роботі Г. Шефферса [59, 60].

П.В. Кетчум [21] назвав алгебру $\mathbb{A}$ *гармонічною*, якщо в ній існує трійка лінійно незалежних векторів $\{e_1, e_2, e_3\}$, які задовольняють рівність (1.3). Таку трійку $\{e_1, e_2, e_3\}$ будемо називати також *гармонічною.*

П.В. Кетчум [21] розглядав згадану вище алгебру кватерніонів Сегре як приклад гармонічної алгебри. Дійсно, в цій алгебрі таблиця множення для елементів базису $\{1, i, j, k\}$ має вигляд: $i^2 = j^2 = -1$, $k^2 = 1$, $ij = k$, $ik = -j$, $jk = -i$. Тому в ній існує безліч гармонічних трійок, зокрема: $e_1 = \sqrt{2}$, $e_2 = i$, $e_3 = j$.

Разом з тим, П.В. Кетчум [20] зрозумів, що неможливо отримати усі розв'язки тривимірного рівняння Лапласа (1.2) у формі компонент аналітичних функцій, що приймають значення в скінченновимірній комутативній алгебрі. У роботі [20] він розглянув нескінченновимірний векторний простір, що містить гармонічну трійку векторів. Цей векторний простір не є алгеброю, але П. В. Кетчум довів, що множина компонент аналітичних функцій, що приймають значення у такому просторі, містить усі аналітичні розв'язки рівняння (1.2). М. Н. Рошкулець [57] розглянув інший нескінченновимірний векторний простір з комутативним множенням для частини його елементів і гармонічною трійкою векторів, а також функції, що приймають значення у такому просторі та породжують розв'язки рівняння (1.2).

Л. Собреро [68] розглянув чотиривимірну комутативну асоціативну алгебру над полем $\mathbb{R}$ з базисом $\{1, j, j^2, j^3\}$ і правилом множення

$$j^4 = -1 - 2j^2,$$

з якого випливає рівність $(1+j^2)^2 = 0$. Тому кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = x + yj$ задовольняє бігармонічне рівняння

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\Phi(\zeta) \equiv \Phi^{(4)}(\zeta)(1+j^2)^2 = 0.$$

І все-таки можна зазначити, що протягом перших ста років розвитку гіперкомплексного аналізу після відкриття У. Гамільтоном алгебри кватерніонів застосування комутативних алгебр до побудови розв'язків основних еліптичних рівнянь математичної фізики були доволі епізодичними.

2. Алгебраїчно-аналітичний підхід до основних еліптичних рівнянь математичної фізики

З середини 70-х років минулого століття в Інституті математики НАН України спочатку в лабораторії комплексного аналізу, а потім у створеному в 1989 році відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу систематично і послідовно розробляється алгебраїчно-аналітичний підхід до основних еліптичних рівнянь математичної фізики, який пов'язаний з використанням комутативних алгебр. Керівник лабораторії комплексного аналізу і перший завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу П. М. Тамразов мав тісне відношення до започаткування досліджень у цьому напрямку і до реалізації вказаного підходу, розвиток якого значною мірою здійснювався завдяки його підтримці.

Безпосередньо новий алгебраїчно-аналітичний підхід до еліптичних рівнянь був започаткований І. П. Мельниченком [85].

Ідея такого підходу полягає у знаходженні комутативних асоціативних банахових алгебр таких, щоб диференційовні за Гато функції зі значеннями в цих алгебрах мали компоненти, які є розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними.

Згодом такі алгебри були знайдені І. П. Мельниченком для тривимірного рівняння Лапласа (див. [85, 83, 87]) і еліптичних рівнянь з виродженням на осі, що описують осесиметричні потенціальні поля (див. [86, 87]), В. Ф. Ковальовим і І. П. Мельниченком для двовимірного бігармонічного рівняння (див. [80, 84]) і узагальненого бігармонічного рівняння (див. [79]).

Слід підкреслити, що переважна більшість робіт іноземних авторів, згаданих у попередньому розділі, стали відомі в Україні тільки у цьому століття після появи їх електронних сканів у вільному доступі в інтернеті. Тому ряд результатів цих робіт були перевідкриті та узагальнені вітчизняними розробниками нового алгебраїчно-аналітичного підходу до основних еліптичних рівнянь математичної фізики.

Наступні покоління дослідників відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (див., наприклад, роботи автора та його учнів С. В. Грищука, В. С. Шпаківського, Р. П. Пухтаєвича, Т. С. Кузьменко [34, 36, 33, 38, 12, 16, 39, 65, 108, 26]) продовжили дослідження в гіперкомплексному аналізі, започатковані І. П. Мельниченком та В. Ф. Ковальовим.

2.1. **Диференційовні функції в комутативних банахових алгебрах. Диференційовність за Лорхом і за Гато.** Очевидно, що характеризація функцій, що задовольняють рівності (1.4), пов'язана з питанням: у якому сенсі розуміється похідна в алгебрі $\mathbb{A}$.

Добре відомо, що існують різні означення диференційовних функцій в алгебрах. При виборі того чи іншого поняття диференційовної функції та її похідної цілком природнім є бажання поєднати широту класу функцій, що задовольняють рівності (1.4), зі збереженням для функцій цього класу основних властивостей аналітичних функцій комплексної змінної.

Розглянемо функцію $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$, визначену в області $\Omega \subset E_3$, і різні поняття диференційовності цієї функції.

Для відображень лінійних нормованих просторів використовуються поняття похідної Фреше і похідної Гато. Ці похідні визначаються як лінійні оператори. У випадку, який ми розглядаємо, це лінійні оператори, що діють з E_3 в $\mathbb{A}$.

Раніше, для функцій, заданих в області скінченновимірної алгебри, Г. Шефферс [59, 60] розглядав похідну як функцію, визначену у тій же області, що і задана функція.

Узагальнюючи такий підхід на випадок відображень, заданих в області довільної комутативної асоціативної банахової алгебри, Е. Лорх [27] ввів похідну, яка також розуміється як функція, визначена у тій же області, що і задана функція.

Функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ називається *диференційовною за Лорхом* ([27]) в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_L(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $h \in E_3$, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\left\|\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta) - h\Phi'_L(\zeta)\right\| \leq \|h\|\varepsilon. \tag{2.1}$$

Очевидно, що в нерівності (2.1) *похідна Лорха* $\Phi'_L(\zeta)$ є функцією змінної ζ, тобто $\Phi'_L\colon \Omega \to \mathbb{A}$.

Разом з тим відображення $B_\zeta\colon E_3 \to \mathbb{A}$, що визначається рівністю $B_\zeta h := h\Phi'_L(\zeta)$, є обмеженим лінійним оператором. Тому функція Φ, яка є диференційовною за Лорхом в області Ω, має похідну Фреше B_ζ в кожній точці $\zeta \in \Omega$ (див. [19, с. 115]). Обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним, як показує приклад у монографії [19, с. 116].

Зазначимо, що диференційовними за Лорхом функціями в комутативних асоціативних банахових алгебрах над полем $\mathbb{C}$ є, зокрема, головні продовження (див., наприклад, [19, р. 165]) аналітичних функцій комплексної змінної. Якщо комплексна функція F є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}$, то для усіх $\zeta \in \mathbb{A}$, спектр яких міститься в D, головне продовження функції F виражається рівністю

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)(t-\zeta)^{-1}dt, \tag{2.2}$$

де Γ_ζ – довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D, яка охоплює спектр елемента ζ.

Деякі властивості, подібні до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної, були встановлені для функцій, диференційовних за Лорхом [27] у довільній опуклій області комутативної банахової алгебри. Зокрема, інтегральна теорема Коші та інтегральна формула Коші, розклад Тейдора у степеневий ряд і теорема Морера були доведені Е. Лорхом у роботі [27] у такий спосіб, як і для аналітичних функцій комплексної змінної. Умову опуклості області у цих результатах було знято в роботі Е. Блюма [2].

Використовуючи диференціал Гато, І. П. Мельніченко [85] розглянув похідну Гато також як функцію $\Phi'_G\colon \Omega \to \mathbb{A}_3$.

Ми кажемо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ є *диференційовною за Гато* в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \delta h) - \Phi(\zeta)\right)\delta^{-1} = h\Phi'_G(\zeta), \quad \forall h \in E_3. \tag{2.3}$$

Очевидно, що *похідна Гато* $\Phi'_G(\zeta)$ є функцією змінної ζ та є узагальненням класичної похідної за напрямком.

Ліва частина рівності (2.3) називається *диференціалом Гато* функції Φ. Добре відомо, що в загальному випадку диференціал Гато може не бути лінійним оператором відносно h. Проте, очевидно, якщо існує похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$, то диференціал Гато (2.3) є обмеженим лінійним оператором відносно h. Разом з тим, обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним, як показує той самий, згаданий вище, приклад у монографії [19, с. 116].

Зауважимо, що обидва означення: похідної Лорха (2.1) і похідної Гато (2.3), – враховують існування необоротних елементів h в алгебрі $\mathbb{A}$, оскільки в цих означеннях не використовується ділення на елементи алгебри на відміну від класичного означення похідної функції комплексної змінної.

Очевидно, що функція Φ, диференційовна за Лорхом в області Ω, є також диференційовною за Гато і $\Phi'_L(\zeta) = \Phi'_G(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \Omega$. Обернене твердження, очевидно, не є істинним подібно до того, як існування похідних у точці за усіма напрямками не гарантує сильної диференційовності (і навіть неперервності) функції у цій точці.

Розглянемо трійку лінійно незалежних елементів $\{e_1, e_2, e_3\}$ в алгебрі $\mathbb{A}$, яка містить одиницю цієї алгебри. Нехай для конкретності $e_1 = 1$. Тоді очевидно, що з рівності (2.3) випливає наступне твердження:

Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ є диференційовною за Гато в області $\Omega \subset E_3$, то в усіх точках цієї області існують частинні похідні $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$ і при цьому виконуються рівності:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} e_2, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} e_3. \tag{2.4}$$

Обернене твердження хибне подібно до того, як у класичній теорії функцій комплексної змінної існування частинних похідних функції та виконання умов Коші-Рімана не є достатніми умовами для існування комплексної похідної цієї функції.

У випадку скінченновимірної алгебри наступне твердження доводиться повністю аналогічно до відповідної теореми про диференційовність функцій комплексної змінної:

Якщо розмірність n алгебри $\mathbb{A}$ скінченна та у розкладі

$$\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\ e_k, \tag{2.5}$$

функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ за базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ алгебри $\mathbb{A}$ функції U_k є $\mathbb{R}$-диференційовними в Ω, тобто

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) =$$

$$= \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\Delta z +$$
$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

та умови (2.4) *виконуються в області* Ω*, то функція* Φ *є диференційовною за Лорхом в цій області.*

В [85] І. П. Мельніченко запропонував розглядати в рівностях (1.4) двічі диференційовні за Гато функції. Дійсно, вибираючи послідовно базисні елементи e_1, e_2, e_3 у якості вектора h у рівностях вигляду (2.3), що визначають похідні $\Phi'_G(\zeta)$ та $\Phi''_G(\zeta)$, отримуємо рівності

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = e_1^2\Phi''_G(\zeta), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = e_2^2\Phi''_G(\zeta), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = e_3^2\Phi''_G(\zeta),$$

Тому $\Delta_3\Phi(\zeta) \equiv \Phi''_G(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$, $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Отже, *якщо базисні елементи* e_1, e_2, e_3 *задовольняють умову* (1.3)*, то кожна двічі диференційовна за Гато функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ *задовольняє тривимірне рівняння Лапласа* (1.2) *в області* Ω. Навпаки, *якщо існує двічі диференційовна за Гато функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$*, яка задовольняє рівняння* (1.2) *в* Ω *і елемент* $\Phi''(\zeta)$ *є оборотним, принаймні, в одній точці* $\zeta \in \Omega$*, то виконується рівність* (1.3).

Зазначимо, що диференційовні за Гато функції, що приймають значення в комутативній асоціативній банаховій алгебрі, своєю чергою, утворюють функціональну алгебру, тобто досить широкий клас функцій. Тому вони можуть бути легко побудовані. Таким чином, зв'язок між цими функціями і розв'язками рівнянь з частинними похідними є важливим для побудови вказаних розв'язків.

2.2. **Тривимірні гармонічні алгебри.** К. С. Кунц в [24] розвинув метод формальної побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа (1.2) з використанням степеневих рядів у довільній гармонічній алгебрі над полем $\mathbb{C}$. Разом з тим, він зазначив, що «there does not appear to be a suitable three-dimensional harmonic algebra».

Задача про побудову тривимірної гармонічної алгебри $\mathbb{A}$ з одиницею була повністю розв'язана І. П. Мельніченком [83, 87, 85]. У роботі [85] І. П. Мельніченко встановив що не існує гармонічних базисів $\{e_1, e_2, e_3\}$ з одиницею $e_1 = 1$ у тривимірних комутативних асоціативних алгебрах над полем $\mathbb{R}$, проте він побудував таблицю множення тривимірної гармонічної алгебри над полем $\mathbb{C}$.

Теорема 2.3 (І. П. Мельніченко, [85])**.** *Комутативна асоціативна алгебра* $\mathbb{A}$ *є гармонічною, якщо таблиця множення для базису* $\{e_1, e_2, e_3\}$

має вигляд

$$\begin{aligned}
&e_k e_1 = e_k,\ k=1,2,3;\\
&e_2 e_2 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{i}{2}(\sin\omega)e_2 + \frac{i}{2}(\cos\omega)e_3,\\
&e_2 e_3 = \frac{i}{2}(\cos\omega)e_2 + \frac{i}{2}(\sin\omega)e_3,\\
&e_3 e_3 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{i}{2}(\sin\omega)e_2 - \frac{i}{2}(\cos\omega)e_3,
\end{aligned}$$

де i – уявна комплексна одиниця і $\omega \in \mathbb{C}$.

Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ є диференційовною за Гато в області $\Omega \subset E_3$, то компоненти U_k, $k = 1,2,3$, розкладу (2.5) *при $n = 3$ породжують вектори*

$$\mathbf{V_1} := \big(\mathrm{Re}U_1, -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}U_2, -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}U_3\big), \quad \mathbf{V_2} := \big(\mathrm{Im}U_1, -\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}U_2, -\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}U_3\big)$$

такі, що їх координати задовольняють рівняння (1.1).

Щоб довести теорему 2.3 І. П. Мельніченко, як і Г. А. фон Бек-Відманстеттер [1], записав систему алгебраїчних рівнянь для структурних констант алгебри та показав, що ця система має тільки комплексні розв'язки.

Пізніше І .П. Мельніченко [83] розвинув значно простий метод доведення, який базується на описі усіх комутативних асоціативних алгебр певної розмірності, при цьому задача знаходження гармонічної алгебри конкретизується як задача про знаходження гармонічних базисів у конкретних алгебрах. В результаті І. П. Мельніченко [83, 87] знайшов усі тривимірні гармонічні алгебри та розвинув метод для знаходження усіх гармонічних базисів у цих алгебрах.

З результатів роботи Е. Штуді [69] випливає, що існують тільки 4 тривимірні (позначимо їх $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ і $\mathbb{A}_4$) комутативні асоціативні алгебри з одиницею над полем комплексних чисел.

Нехай $\mathbb{A}_1$ – напівпроста алгебра з ідемпотентними елементами в базисі $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ і таблицею множення:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \qquad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \qquad \mathcal{I}_3^2 = \mathcal{I}_3, \qquad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_2\mathcal{I}_3 = 0.$$

Тут $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$.

Алгебри $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ і $\mathbb{A}_4$ містять радикали.

Нехай $\mathbb{A}_2$ – алгебра з базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ і таблицею множення:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad \mathcal{I}_1\rho = 0, \quad \mathcal{I}_2\rho = \rho.$$

Тут $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$, і ρ породжує одновимірний радикал алгебри.

Алгебри $\mathbb{A}_3$ та $\mathbb{A}_4$ мають базис $\{1, \rho_1, \rho_2\}$, де ρ_1 і ρ_2 належать до радикалів цих алгебр. Таблиця множення в алгебрі $\mathbb{A}_3$ має вигляд:

$$\rho_1^2 = \rho_2, \qquad \rho_2^2 = 0, \qquad \rho_1\rho_2 = 0,$$

а таблиця множення в алгебрі $\mathbb{A}_4$ – такого вигляду:

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_1\rho_2 = 0.$$

Таким чином, алгебри $\mathbb{A}_3$ та $\mathbb{A}_4$ мають двовимірні радикали.

Теорема 2.4 (I. P. Mel'nichenko, [85])**.** *Не існує гармонічних базисів в тривимірній комутативній асоціативній алгебрі з одиницею над полем* $\mathbb{R}$.

Теорема 2.5 (I. P Mel'nichenko [83, 87])**.** *Алгебра* $\mathbb{A}_4$ *не є гармонічною. Алгебри* $\mathbb{A}_1$*,* $\mathbb{A}_2$*,* $\mathbb{A}_3$ *є гармонічними.*

Усі гармонічні базиси в алгебрах $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ описані в монографії [87]. Зазначимо, що в напівпростій алгебрі $\mathbb{A}_1$, зокрема, міститься сім'я гармонічних базисів, побудована в теоремі 2.3.

2.6. **Моногенні функції.** Розглянемо поняття моногенної функції

$$\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}.$$

Ми говоримо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ *моногенна* в області $\Omega \subset E_3$, якщо Φ неперервна і диференційовна за Гато в кожній точці області Ω.

Ми використовуємо поняття моногенної функції у сенсі існування для неї похідних чисел (див. [8, 105]) у поєднанні з неперервністю цієї функції.

У науковій літературі назва моногенна функція використовується також для функцій, які задані у некомутативних алгебрах і задовольняють деякі умови, подібні до класичних умов Коші-Рімана (див., наприклад, [58]). Такі функції називають також регулярними (див., наприклад, [70]) або гіперголоморфними (див., наприклад, [23]).

У роботах [100, 45, 66, 111, 38, 34, 99, 103, 53, 40] ми розглядали моногенні функції в тривимірних гармонічних алгебрах, а в роботах [47, 39] – моногенні функції в конкретних n-вимірних алгебрах, маючи на меті доведення для них аналогів основних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Ми розвинули наступну схему дослідження:

- спочатку потрібно отримати конструктивний опис (тобто представлення) моногенних функцій за допомогою аналітичних функцій комплексних змінних;
- потім потрібно встановити, що моногенні функції мають неперервні похідні Гато усіх порядків і є також диференційовними за Лорхом;

- нарешті, потрібно довести для моногенних функцій інтегральні теореми й отримати розклади в ряди Тейлора і Лорана.

Деякі фрагменти цієї схеми дослідження були розвинені І. П. Мельніченком і автором (див. [90, 87, 34]) для моногенних функцій в нескінченно вимірній комутативній банаховій алгебрі, асоційованій з осесиметричними потенціальними полями, а також І. П. Мельніченком і В. Ф. Ковальовим (див. [80, 78]), С. В. Грищуком і автором (див. [76, 38, 34, 12]) для моногенних функцій у двовимірній алгебрі, асоційованій з бігармонічним рівнянням. В. С. Шпаківський [65, 63, 62] поширив вказану схему дослідження на випадок моногенних функцій, заданих у довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі.

Окреслимо шлях до встановлення конструктивних описів моногенних функцій за допомогою аналітичних функцій комплексних змінних.

В теорії комутативних банахових алгебр доведено наступне фундаментальне твердження (див., наприклад, [19, p. 145]):

Для будь-якої комутативної банахової алгебри $\mathbb{A}$ *з одиницею над полем комплексних чисел* $\mathbb{C}$ *і для будь-якого максимального ідеалу* $\mathfrak{I}$ *алгебри* $\mathbb{A}$ *фактор-алгебра* $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ *ізоморфна полю* $\mathbb{C}$.

Нехай $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ – лінійний мультиплікативний функціонал такий, що $\mathfrak{I}$ є його ядром і $f(1) = 1$ (див., наприклад, [19, p. 146]).

Початковим пунктом згаданого вище шляху до встановлення конструктивних описів моногенних функцій є наступне твердження: якщо для моногенної функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ область Ω є опуклою «у напрямку» максимального ідеалу $\mathfrak{I}$ і $\zeta_1 - \zeta_2 \in \mathfrak{I}$, то різниця $\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)$ належить до того ж самого ідеалу $\mathfrak{I}$.

Внаслідок цього, можна визначити лінійний оператор A, який кожній моногенній функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ ставить у відповідність функцію $F : D \to \mathbb{C}$ за формулою $F(f(\zeta)) := f(\Phi(\zeta))$ для всіх $\zeta \in \Omega$. Функція F визначена в області $D := f(\Omega)$, де $f(\Omega)$ – образ області Ω при відображенні f. Більш того, F – аналітична функція в D, що встановлюється, спираючись на теорему 21 Ю. Ю. Трохимчука з монографії [105].

Розглядаючи *узагальнено обернений* оператор $A^{(-1)}$, який задовольняє рівність $AA^{(-1)}A = A$, легко переконатися, що значення моногенної функції $\Phi - A^{(-1)}A\Phi$ належать ідеалу $\mathfrak{I}$ для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$.

Нарешті, у випадку довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}$ виявилось можливим проінтегрувати умови (2.4) для моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathfrak{I}$ та з використанням результату Г. Толстова з роботи [71] описати усі моногенні функції, що приймають значення в ідеалі $\mathfrak{I}$, за допомогою аналітичних функцій комплексних змінних.

2.7. **Конструктивні описи моногенних функцій в тривимірних гармонічних алгебрах.** Спочатку окреслена вище схема дослідження була реалізована в роботах [100, 45, 66, 111, 38, 34] для моногенних функцій в тривимірній гармонічній алгебрі $\mathbb{A}_3$ з двовимірним радикалом.

Нехай $\mathbb{A} = \mathbb{A}_3$ і для простоти викладу розглянемо конкретний гармонічний базис в $\mathbb{A}_3$, а саме: $e_1 = 1$, $e_2 = i + \rho_2$, $e_3 = (1-i)\rho_1$. У цьому випадку усі необоротні елементи в E_3 розміщені на осі Oz та належать до радикала, який є єдиним максимальним ідеалом алгебри $\mathbb{A}_3$.

Скажемо, що область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є *опуклою в напрямку прямої* L, якщо Ω містить кожен відрізок, що сполучає точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ та є паралельним до L.

Конструктивний опис моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної отримано в роботі [100]:

Теорема 2.8. *Якщо область Ω – опукла в напрямку осі Oz, то для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ існує єдина трійка комплексних аналітичних в області $D = \{x + iy : xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega\}$ функцій F, F_1, F_2 така, що Φ представляється у вигляді:*

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) = F(\xi) + \Big((1-i)zF'(\xi) + F_1(\xi)\Big)\rho_1 + \\ + \Big(yF'(\xi) - iz^2F''(\xi) + (1-i)zF_1'(\xi) + F_2(\xi)\Big)\rho_2, \\ \xi = x + iy, \ \forall\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega.\end{aligned} \tag{2.6}$$

При доведенні теореми 2.8 використовується визначений в попередньому підрозділі оператор A, при цьому $F = A\Phi$ та узагальнено обернений оператор $A^{(-1)}$ задається в явному вигляді рівністю (2.2) як головне продовження комплексної аналітичної функції F в область $\Omega \subset E_3$.

Зазначимо, що умова опуклості області Ω в напрямку осі Oz є істотною для справедливості теореми 2.8, що підтверджується побудовою прикладу (див. [100, 38, 34]).

Наведемо конструктивні описи моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_1$ або в алгебрі $\mathbb{A}_2$.

Для простоти викладу розглянемо конкретний гармонічний базис в алгебрі $\mathbb{A}_2$, а саме: $e_1 = 1$, $e_2 = i\mathcal{I}_1 + \rho$, $e_3 = i\mathcal{I}_2$. В цьому випадку усі необоротні елементи в E_3 розміщені на осях Oy і Oz.

Розглянемо також конкретний гармонічний базис в алгебрі $\mathbb{A}_1$, а саме:

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i\mathcal{I}_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\mathcal{I}_3, \qquad e_3 = i\mathcal{I}_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\mathcal{I}_3.$$

В цьому випадку усі необоротні елементи в E_3 розміщені на осях Oy, Oz і на прямій $L := \{t(e_2 + e_3) : t \in \mathbb{R}\}$.

Позначимо

$$D_1 := \{x + iy : xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega\},$$
$$D_2 := \{x + iz : xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega\},$$
$$D_3 := \{x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i(y - z) : xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega\}.$$

Тепер ми можемо сформулювати наступні теореми, аналогічні за змістом до теореми 2.8:

Теорема 2.9 ([53]). *Нехай $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ і область $\Omega \subset E_3$ – опукла в напрямку осей Oy, Oz і прямої L. Тоді для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_1$ існує єдина трійка комплексних функцій F_1, F_2, F_3 така, що Φ представляється у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)\mathcal{I}_1 + F_2(\xi_2)\mathcal{I}_2 + F_3(\xi_3)\mathcal{I}_3,$$
$$\forall \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega,$$

при цьому F_k – аналітична функція в області D_k при $k = 1, 2, 3$ і $\xi_1 = x + iy$, $\xi_2 = x + iz$, $\xi_3 = x + \frac{\sqrt{2}}{2}i(y - z)$.

Теорема 2.10 ([99]). *Нехай $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2$ і область $\Omega \subset E_3$ – опукла в напрямку осей Oy і Oz. Тоді для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_2$ існує єдина трійка комплексних функцій F_0, F_1, F_2 така, що Φ представляється у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)\mathcal{I}_1 + F_2(\xi_2)\mathcal{I}_2 + \Big(yF_2'(\xi_2) + F_0(\xi_2)\Big)\rho,$$
$$\forall \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega,$$

при цьому F_1 – аналітична функція в області D_1, F_2, F_0 – аналітичні функції в області D_2 та $\xi_1 = x + iy$, $\xi_2 = x + iz$.

При доведенні теорем 2.9 і 2.10 було подолано окреслений в попередньому підрозділі шлях до встановлення конструктивних описів моногенних функцій за допомогою аналітичних функцій комплексних змінних. Зауважимо, що при цьому було неможливо використати головні продовження аналітичних функцій комплексної змінної (які, взагалі кажучи, не визначені в області Ω, де задана моногенна функція Φ) подібно до того, як це було зроблено раніше у роботах [100, 76, 38, 34] для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрах з єдиним максимальним ідеалом. Але вдалося побудувати в явному вигляді інші оператори, які комплексним аналітичним функціям ставлять у відповідність моногенні функції, визначені у заданій області Ω (див. [99, 53, 40]).

2.11. **Моногенні функції в тривимірній гармонічній алгебрі з двовимірним радикалом.** Розглянемо властивості моногенних функцій в тривимірній гармонічній алгебрі $\mathbb{A}_3$ з двовимірним радикалом. Алгебру $\mathbb{A}_3$ при цьому розглядаємо як модельний випадок, обмежуючись лише деякими зауваженнями стосовно результатів в інших тривимірних гармонічних алгебрах.

Рівність (2.6) можна переписати у наступному вигляді (див. [34])

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \Big(F(t) + \rho_1 F_1(t) + \rho_2 F_2(t) \Big) (t-\zeta)^{-1} dt \qquad (2.7)$$

при всіх $\zeta \in \Omega$, де Γ_ζ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в D, яка гомотопна у точці $\xi = f(\zeta)$ та охоплює цю точку, тобто Φ виражається через головні продовження аналітичних функцій F, F_1, F_2 в область Ω.

З рівності (2.7) випливає, що функція Φ є диференційовною за Лорхом в області Ω. Використовуючи рівність (2.7), ми отримуємо наступний вираз для похідної Лорха n-го порядку, яка тотожна з похідною Гато n-го порядку при всіх $\zeta \in \Omega$:

$$\Phi^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \Big(F(t) + \rho_1 F_1(t) + \rho_2 F_2(t) \Big) \Big((t-\zeta)^{-1} \Big)^{n+1} dt. \qquad (2.8)$$

Зауважимо, що для моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, визначеної у довільній області $\Omega \subset E_3$, рівності (2.6)-(2.8) виконуються, принаймні, локально в деякому околі кожної точки $\zeta \in \Omega$.

Отже, кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє рівності (1.4) в області Ω. Більш того, з рівності (2.6) випливає, що її компоненти U_k, $k = 1, 2, 3$, розкладу (2.5) при $n = 3$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω.

У роботах [45, 66, 111, 34] для моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, заданих у довільній області $\Omega \subset E_3$, ми встановили основні властивості, які є аналогічними до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної, тобто доведено аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші, теореми Морера, теореми єдиності, розкладу Тейлора у степеневий ряд.

На відміну від подібних результатів Е. Лорха [27] і Е. Блюма [2], моногенні функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задані тільки в області Ω з лінійної оболонки E_3, а не в області з усієї алгебри.

Доведення наступної теореми, що містить інтегральну формулу Коші для моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, можна знайти в роботах [45, 66, 34]:

Теорема 2.12. *Нехай Ω – опукла в напрямку осі Oz область і нехай $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ – моногенна функція в області Ω. Тоді для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ виконується наступна рівність:*

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta - \zeta_0)^{-1}\,d\zeta,$$

де γ_ζ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в області Ω, яка охоплює один раз пряму $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ і є гомотопною точці ζ_0.

Підкреслимо, що інтегральна формула Коші, яка встановлена у роботах [27, 2], не застосовна до моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, оскільки в ній інтегрування здійснюється вздовж кривої, на якій функція Φ, взагалі кажучи, не визначена.

Зазначимо, що теорема 2.12 та інші інтегральні теореми доведені в роботах [45, 66, 34] для функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$, але, як випливає з їх доведення, залишаються істинними для моногенних функцій у будь-якій тривимірній гармонічній алгебрі.

В наступній теоремі даються різні еквівалентні означення моногенної функції (див. [66, 34]):

Теорема 2.13. *Функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ є моногенною в довільній області $\Omega \subset E_3$ тоді й тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *компоненти U_k, $k = 1, 2, 3$, розкладу* (2.5) *при $n = 3$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω та умови* (2.4) *виконуються в цій області;*

(II) *в кожній кулі $\mho \subset \Omega$ існує єдина трійка аналітичних в області $f(\mho)$ функцій F, F_1, F_2 така, що функція Φ представляється у вигляді* (2.6)*;*

(III) *функція Φ неперервна в області Ω та виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle} \Phi(\zeta) d\zeta = 0$$

для кожного трикутника $\triangle \subset \Omega$, який розуміється як плоска фігура, обмежена трьома відрізками, що з'єднують його вершини, при цьому $\partial\triangle$ – межа трикутника $\triangle$ у топології його площини;

(IV) *функція Φ є аналітичною в області Ω, тобто для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ існує окіл, в якому функція Φ представляється у вигляді* *суми збіжного степеневого ряду*

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ (\zeta-\zeta_0)^k, \qquad c_k\in\mathbb{A}_3.$$

У роботі [37] послаблено одну з умов моногенності для функції $\Phi:\Omega\to\mathbb{A}_3$, а саме показано, що диференційовна за Гато і локально обмежена в області Ω функція є моногенною в цій області.

В. С. Шпаківський [111] отримав розклади Лорана для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$, і дав класифікацію особливостей цих функцій. Зокрема, він показав, що ізольована особлива точка у такої моногенної функції може бути лише усувною. У випадку, коли функція має неусувну особливість в точці ζ_0, усі точки прямої $\{\zeta_0+ze_3 : z\in\mathbb{R}\}$ є також особливими.

Розклади Тейлора і Лорана для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_2$, отримані Р. П. Пухтаєвичем у роботі [103].

У роботі [101] ми обчислили логарифмічний лишок для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$. Для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_2$, логарифмічний лишок обчислено в роботі [54]. При цьому в роботах [101, 54] показано, що логарифмічний лишок залежить не тільки від нулів та особливих точок функції, але також і від точок, у яких функція приймає значення з ідеалів алгебри. Дещо раніше подібний результат було отримано в роботі [77] для моногенних функцій, що приймають значення у двовимірній алгебрі, асоційованій з бігармонічним рівнянням.

Зауважимо, що кожна з формул (2.6), (2.7) задає моногенне продовження функції Φ в циліндричну область $\{\zeta=x+ye_2+ze_3 : x+iy\in D\}$.

Визначимо логарифмічний лишок моногенної функції. Нехай

$$\zeta_0:=x_0+y_0e_2+z_0e_3\in E_3$$

і функція $\Phi:\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)\to\mathbb{A}_3$ моногенна в кільцевій циліндричній області

$$\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R):=\{\zeta=x+ye_2+ze_3 : 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2, z\in\mathbb{R}\}.$$

Якщо при цьому логарифмічна похідна $\Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}$ також є моногенною функцією в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$, то *логарифмічним лишком* функції Φ в точці ζ_0 назвемо інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}\Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta, \tag{2.9}$$

де $\Gamma_{\zeta_0}(r):=\{\zeta=x+ye_2+z_0e_3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$ і $r<R$.

З теореми 2.13 випливає, що величина логарифмічного лишку не залежить від r при $0 < r < R$ й, крім того, справедлива рівність

$$\int\limits_{\Gamma_{\zeta_1}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta, \qquad \forall \zeta_1 = \zeta_0 + z_1 e_3,$$

іншими словами, логарифмічні лишки функції Φ в усіх точках прямої $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ однакові.

Введемо допоміжні означення. Нехай $\zeta_0 := x_0 + y_0 e_2 + z_0 e_3$ і в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ моногенна функція Φ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{n_0}\varphi_0(\zeta) + \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2, \tag{2.10}$$

де n_0 – деяке ціле число, φ_0 – моногенна в циліндричній області

$$\mathcal{K}_{\zeta_0}(R) := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2, z \in \mathbb{R}\}$$

функція, яка не приймає в цій області значень в радикалі

$$\mathcal{I} := \{\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 : \lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}\},$$

а ψ і ϕ – моногенні в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ функції. У випадку, коли функція Φ моногенна в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ та не приймає в цій області значень в радикалі $\mathcal{I}$, назвемо пряму $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ *сингулярністю логарифмічної похідної* функції Φ, якщо точка ζ_0 є неусувною особливою точкою функції Φ або ж $\Phi(\zeta_0) \in \mathcal{I}$. Якщо при цьому функція Φ подається у вигляді (2.10), то показник степеня n_0 в розкладі (2.10) назвемо *показником сингулярності* логарифмічної похідної функції Φ в точці ζ_0.

В наступній теоремі обчислено логарифмічний лишок для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$.

Теорема 2.14 ([101]). *Нехай D – область в комплексній площині та функція Φ моногенна скрізь в області*

$$D_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in D\}$$

за винятком, можливо, деякої множини особливих точок. Нехай область G, яка компактно належить області D, обмежена замкненою жордановою спрямлюваною кривою γ і така, що в області

$$G_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in G\}$$

міститься лише скінченна множина $\{L_k\}_{k=1}^m$ сингулярностей

$$L_k := \{\zeta_k + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$$

логарифмічної похідної функції Φ, при цьому показник сингулярності n_k логарифмічної похідної функції Φ в точці ζ_k скінченний при всіх

$k = 1, 2, \ldots, m$, а межа ∂G_ζ області G_ζ не містить вказаних сингулярностей. Тоді справедлива рівність

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = N_F - P_F, \tag{2.11}$$

де γ_ζ – замкнута жорданова спрямлювана крива, яка лежить на поверхні ∂G_ζ та гомотопна кривій $\{x + ye_2 : x + iy \in \gamma\}$, а N_F і P_F – відповідно число нулів і полюсів функції F (з розкладу (2.6) *функції Φ) в області G з урахуванням їх кратності.*

У роботах [46, 48] ми встановили достатні умови для існування граничних значень аналога інтеграла типу Коші, що приймає значення в алгебрі $\mathbb{A}_3$, і довели аналоги формул Сохоцького-Племеля. У роботі [55] встановлено також достатні умови існування граничних значень інтегралу типу Коші, що приймає значення в алгебрі $\mathbb{A}_2$. Слід зазначити, що структура дільників нуля у цій алгебрі призводить до збільшення числа областей визначення для такого інтеграла та до ускладнення їх геометрії.

2.15. **Моногенні функції в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах.** У роботах [47, 39] ми розглянули моногенні функції у двох конкретних n-вимірних алгебрах і за описаною в підрозділі 2.6 схеми довели для них ряд аналогів основних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Використовуючи таблицю множення для базису Е. Картана [3] у довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі з одиницею, В. С. Шпаківський [65, 63, 62] розвинув описану в підрозділі 2.6 схему дослідження на випадок моногенних функцій, що приймають значення в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах.

Нехай $\mathbb{A}$ – довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел. Е. Картан у роботі [3] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $C_{r,k}^s$ такі, що виконуються наступні правила множення:

1) $\forall r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$

2) $\forall r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \sum\limits_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} C_{r,k}^s I_k\ ;$

3) $\forall s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} \exists!\ u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall r \in [1, m] \cap \mathbb{N} :$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq u_s, \\ I_s & \text{при} \quad r = u_s, \end{cases}$$

де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами та породжують напівпросту підалгебру S алгебри $\mathbb{A}$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. Надалі алгебру $\mathbb{A}$ з базисом Картана позначатимемо $\mathbb{A}_n^m$. Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1 = \sum\limits_{u=1}^m I_u$.

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1, k\neq u}^n \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \ u = 1, 2, \ldots, m.$$

Визначимо m лінійних неперервних мультиплікативних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Нехай

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = \sum_{r=1}^n a_r I_r, \qquad e_3 = \sum_{r=1}^n b_r I_r$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ – трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Для кожного $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$, розглянемо $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$. Для області $\Omega \subset E_3$ через D_u позначимо область комплексної площини, на яку Ω відображується функціоналом f_u.

У роботі [65] доведено наступне представлення резольвенти:

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^m \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^n \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \tag{2.12}$$

$$\forall t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені такими рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s, \quad Q_{k,s} := \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r} B_{r,s}, \quad k = 3, 4, \ldots, s - m + 1.$$

при

$$T_s := ya_s + zb_s, \qquad B_{r,s} := \sum_{k=m+1}^{s-1} T_k C_{r,s}^k, \ s = m + 2, \ldots, n,$$

а натуральні числа u_s визначені у правилі 3) таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Зі співвідношень (2.12) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u : \begin{cases} x + y\mathrm{Re}a_u + z\mathrm{Re}b_u = 0, \\ y\mathrm{Im}a_u + z\mathrm{Im}b_u = 0. \end{cases}$$

Наступна теорема містить представлення моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, через аналітичні функції комплексних змінних.

Теорема 2.16 (В. С. Шпаківський [65]). *Нехай область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1} dt + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1} dt, \quad (2.13)$$

де F_u – деяка голоморфна функція в області D_u та G_s – деяка голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q – замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\ell \neq q$.

У роботах [65, 63] В. С. Шпаківський отримав конструктивний опис моногенних функцій, що приймають значення у довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, за допомогою аналітичних функцій комплексних змінних. Ці результати узагальнюють теореми 2.8-2.10, а також відповідні результати робіт [39, 47] та ряд інших результатів про конструктивні описи аналітичних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних алгебрах, що беруть свій початок від роботи Ф. Рінглеба [56], який отримав такий опис для аналітичних функцій бікомплексної змінної.

В. С. Шпаківський у роботі [62] довів аналог інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла та аналоги теореми Морера та інтегральної формули Коші для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі. Аналоги теореми Морера та розкладу Тейлора у степеневий ряд для вказаних моногенних функцій доводяться за звичною з теорії функцій комплексної змінної схемою. Отже, для моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів E_3 (див. теорему 2.16) довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри з одиницею над полем комплексних чисел, зі значеннями в цій алгебрі справедлива теорема, подібна до теореми 2.13.

В. С. Шпаківський і Т. С. Кузьменко [109, 64, 112, 25, 26] використали описану вище схему дослідження в некомутативній алгебрі кватерніонів. Вони визначили класи кватерніонних відображень, що мають властивості, подібні до властивостей моногенних функцій у комутативних алгебрах.

У роботі [43] ми довели аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла від гіперголоморфних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, заданих в тривимірних областях, межі яких не є кусково-гладкими.

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину

$$\Sigma^\varepsilon := \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\le\varepsilon, \\ (x_1,y_1,z_1)\in\Sigma\Big\}.$$

Відстанню Фреше $d(\Sigma,\Lambda)$ між поверхнями Σ та Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma\subset\Lambda^\varepsilon$, $\Lambda\subset\Sigma^\varepsilon$. Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n,\Sigma)\to 0$ при $n\to\infty$.

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf\liminf_{n\to\infty}\mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ, а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ – площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега. Тоді за теоремою Л. Чезарі [5, с. 7] існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \big\{f(u,v) := \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) : (u,v)\in G\big\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

існують майже всюди на квадраті $G := [0;1]\times[0;1]$ і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int\limits_G \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \tag{2.14}$$

У випадку, коли $\mathfrak{L}(\Sigma)<\infty$ та рівність (2.14) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ будемо називати *квадровною. Замкнену поверхню* $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ розуміємо як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрялювану криву*.

Будемо казати, що функція $\Psi:\Omega\to\mathbb{A}_n^m$ є *гіперголоморфною* в області $\Omega\subset E_3$, якщо її комплекснозначні компоненти розкладу вигляду (2.5) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в Ω і виконується наступна умова в кожній точці області Ω:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}e_1+\frac{\partial\Psi}{\partial y}e_2+\frac{\partial\Psi}{\partial z}e_3=0.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega):=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм $\partial\Omega^\varepsilon$.

Теорема 2.17 ([43]). *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega\subset E_3$ є замкнена квадровна поверхня, для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega)<\infty$, і Ω має квадровні перетини з площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi:\overline{\Omega}\to\mathbb{A}_n^m$ є гіперголоморфною в області Ω та неперервною в замиканні $\overline{\Omega}$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega}\Psi(\zeta)\sigma=0.$$

Зазначимо, що моногенні функції в гармонічних алгебрах утворюють підмножину гіперголоморфних функцій. Подібний аналог інтегральної теореми Коші доведений О. Ф. Герусом [18] для гіперголоморфних функцій в некомутативній алгебрі кватерніонів.

Вивчення характеристичних властивостей моногенних функцій сприяє розвитку гіперкомплексних методів для розв'язання проблем математичної фізики. Використовуючи конструктивні описи моногенних функцій, отримані в роботі [65], В. С. Шпаківський у роботах [110, 107, 106, 108] показав, що для побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та постійними коефіцієнтами у формі компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо використовувати моногенні функції в алгебрах спеціального виду, де усі ідемпотенти замінені одиницею. Він запропонував процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків таких рівнянь з використанням моногенних функцій, заданих у послідовності алгебр конкретного виду. Запропонований метод використано для побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики.

Інтерес до дослідження функцій в комутативних алгебрах гіперкомплексних чисел останнім часом зростає у зв'язку з поєднанням зручностей властивості комутативності з широкими можливостями застосувань (див., наприклад, роботи [52, 4, 22, 51, 28], в яких вивчаються різноманітні алгебраїчні, геометричні та аналітичні аспекти теорії гіперкомплексних чисел).

2.18. **Моногенні функції в бігармонічній алгебрі та крайові задачі для бігармонічних функцій.** Комутативна асоціативна двовимірна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел називається *бігармонічною* (див. В. Ф. Ковальов і І. П. Мельниченко [80]), якщо в цій алгебрі існує *бігармонічний базис* $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0. \tag{2.15}$$

З результатів роботи Е. Штуді [69] випливає, що існують тільки 2 двовимірні (позначимо їх $\mathbb{B}_0$ і $\mathbb{B}$) комутативні асоціативні алгебри з одиницею над полем комплексних чисел. Випишемо таблиці множення цих алгебр, розглядаючи в них базиси, шо складаються з нільпотентних та ідемпотентних елементів. Нехай $\mathbb{B}_0$ – напівпроста алгебра з ідемпотентними елементами в базисі $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$ та таблицею множення: $\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0$, при цьому $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$. Алгебра $\mathbb{B}$ з базисом $\{1, \rho\}$, де $\rho^2 = 0$, містить одновимірний радикал, що породжується елементом ρ.

У роботі [84] І.П. Мельниченко показав, що існує єдина бігармонічна алгебра – це вказана алгебра $\mathbb{B}$, і знайшов усі бігармонічні базиси в алгебрі $\mathbb{B}$. Відзначимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна чотиривимірним над полем дійсних чисел алгебрам, які розглядалися Л. Собреро [68] і А. Дуглісом [6].

Будемо розглядати бігармонічний базис $\{e_1, e_2\}$, запропонований в роботі В. Ф. Ковальова та І. П. Мельниченка [80], у якому $e_1 = 1$ і виконується правило множення $e_2^2 = e_1 + 2ie_2$.

Розглянемо *бігармонічну площину* $\mu_{e_1,e_2} := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$. Нехай G – область в площині μ_{e_1,e_2}. Оскільки дільники нуля відсутні в площині μ_{e_1,e_2}, похідна Гато функції $\Phi : G \to \mathbb{B}$ збігається зі звичайною похідною

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0, h \in \mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)h^{-1}.$$

Тому функція $\Phi : G \to \mathbb{B}$ моногенна в області G, якщо похідна $\Phi'(\zeta)$ існує в кожній точці $\zeta \in G$.

Будемо використовувати те ж саме позначення G для області $G \subset \mathbb{R}^2$ та для областей в площині μ_{e_1,e_2} і комплексній площині $\mathbb{C}$, що є конгруентними області G.

Довільна функція $\Phi\colon G \to \mathbb{B}$ має розклад

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)e_1 + U_2(x, y)ie_1 + U_3(x, y)e_2 + U_4(x, y)ie_2, \tag{2.16}$$

де U_1, U_2, U_3, U_4 є дійснозначними функціями.

В. Ф. Ковальов і І. П. Мельниченко в роботі [80] встановили, що функція $\Phi : G \to \mathbb{B}$ є моногенною в області G тоді й тільки тоді, коли компоненти $U_l \colon G \to \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3, 4$, розкладу (2.16) є $\mathbb{R}$-диференційовними в G і наступні умови Коші-Рімана виконуються:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} e_2. \tag{2.17}$$

Крім того, в роботі [80] отримано розклад відносно бігармонічного базису $\{e_1, e_2\}$ головного продовження (2.2) аналітичної функції $F : G \to \mathbb{C}$ в конгруентну область бігармонічної площини.

Більш того, кожна моногенна функція $\Phi \colon G \to \mathbb{B}$ виражається через дві відповідні аналітичні функції $F \colon G \to \mathbb{C}$, $F_0 \colon G \to \mathbb{C}$ комплексної змінної $z = x + iy$ у вигляді (див. [76, 38, 34]):

$$\Phi(\zeta) = F(z) e_1 - \left(\frac{iy}{2} F'(z) - F_0(z) \right) \rho, \quad \forall \zeta = x e_1 + y e_2 \in G. \tag{2.18}$$

Раніше у роботі [78] В. Ф. Ковальов встановив рівність (2.18) при додаткових припущеннях про геометрію області G. Рівність (2.18) встановлює взаємно однозначну відповідність між моногенними функціями Φ та парами комплексних аналітичних функцій F, F_0.

Тому кожна моногенна функція $\Phi \colon G \to \mathbb{B}$ має похідні усіх порядків в області G (див. [76, 38, 34]) і задовольняє рівності

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(\zeta) = \Phi^{(4)}(\zeta) (e_1^2 + e_2^2)^2 = 0$$

для всіх $\zeta = x e_1 + y e_2 \in G$ через умови (2.15).

Тепер можна стверджувати, що всі компоненти U_1, U_2, U_3, U_4 розкладу (2.16) будь-якої моногенної функції $\Phi \colon G \to \mathbb{B}$ є бігармонічними функціями (див. [76, 38, 34]), тобто задовольняють бігармонічне рівняння в області G:

$$\frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial y^4} = 0.$$

В той самий час, кожна бігармонічна в однозв'язній області G функція $U(x, y)$ є першою компонентою $U_1 \equiv U$ розкладу (2.16) деякої функції $\Phi \colon G \to \mathbb{B}$, моногенної в G, і, більш того, всі такі функції Φ знайдені в явному вигляді (див. [76, 38, 34]).

С.В. Грищук [73] встановив подібний зв'язок між розв'язками узагальненого бігармонічного рівняння і моногенними функціями, що приймають значення в напівпростій алгебрі $\mathbb{B}_0$.

У роботах [12, 34] для моногенних функцій, що приймають значення в бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$, встановлено основні властивості, які є аналогічними до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної, тобто доведено аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші, теореми Морера, теореми єдиності, розкладів у ряди Тейлора і Лорана. Таким чином, справедлива теорема (див. [12, 34]), аналогічна до теореми 2.13, в якій даються різні еквівалентні означення моногенних функцій.

Добре відомо, що техніка використання аналітичних функцій комплексної змінної до розв'язання бігармонічних крайових задач базується на представленні бігармонічних функцій формулою Гурса (див., наприклад, [104, 93]). Таке представлення дозволяє редукувати бігармонічні задачі до крайових задач для відповідних аналітичних функцій. Далі, виражаючи аналітичні функції інтегралами типу Коші, в загальному випадку можна отримати систему інтегро-диференціальних рівнянь. У випадку, коли межа області є кривою Ляпунова, вказана система редукується до системи рівнянь Фредгольма. Така схема розвинена для розв'язання крайових задач плоскої теорії пружності з використанням бігармонічної функції, що має назву функції напружень Ері (див., наприклад, [92, 93]).

Щоб розвинути нові методи ефективного розв'язання крайових задач плоскої теорії пружності, можна використати зв'язок бігармонічних функцій з моногенними функціями в алгебрі $\mathbb{B}$.

Розглянемо крайову задачу, що полягає у знаходженні моногенної функції $\Phi\colon G \to \mathbb{B}$, коли граничні значення двох компонент її розкладу (2.16) задано на межі ∂G, тобто мають виконуватися граничні умови:

$$U_k(x,y) = u_k(x,y), \qquad U_m(x,y) = u_m(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \partial G$$

для $1 \le k < m \le 4$, де u_k і u_m задані дійснозначні неперервні функції.

Ця задача поставлена В.Ф. Ковальовим у роботі [78]. Він назвав таку задачу *бігармонічною задачею Шварца* за її аналогію з класичною задачею Шварца про знаходження аналітичної функції комплексної змінної, якщо значення її дійсної частини задані на межі області.

Ми називаємо таку задачу (k-m)-задачею. В.Ф. Ковальов у роботі [78] встановив, що всі (k-m)-задачі редукуються до трьох основних задач: (1-2)-задачі, (1-3)-задачі або (1-4)-задачі.

У роботі [78] також показано, що бігармонічна задача (див., наприклад, [104, с. 194] і [92, с. 13]) про знаходження бігармонічної функції $V : G \to \mathbb{R}$ за заданими граничними значеннями її частинних похідних $\partial V/\partial x$ і $\partial V/\partial y$ на межі ∂G може бути редукована до (1-3)-задачі (див. також [15, 16]).

Нехай G – обмежена однозв'язна область в площині xOy.

Основна бігармонічна задача (див., наприклад, [92, с. 13]) полягає в знаходженні функції $W\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$, неперервної разом з частинними похідними першого порядку в замиканні $\overline{G}$ області G та бігармонічної в G, коли її значення і значення її нормальної похідної задані на межі ∂G:

$$W(x,y)=\omega_1(s), \qquad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}}(x,y)=\omega_2(s), \quad \forall (x,y)\in\partial G, \tag{2.19}$$

де s – це дугова координата точки $(x,y)\in\partial G$.

У випадку, коли ω_1 є неперервно диференційовною функцією, основна бігармонічна задача еквівалентна наступній *бігармонічній задачі* (див., наприклад, [104, с.194] та [92, с.13]) про знаходження бігармонічної функції $V : G\to\mathbb{R}$, яка задовольняє крайові умови:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\xi,\eta)\to(x,y),(\xi,\eta)\in G}\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial x}=\omega_3(s),\\
&\lim_{(\xi,\eta)\to(x,y),(\xi,\eta)\in G}\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial y}=\omega_4(s), \qquad \forall (x,y)\in\partial G,\\
&\int\limits_{\partial G}\Big(\omega_3(s)\cos\angle(\mathbf{s},x)+\omega_4(s)\cos\angle(\mathbf{s},y)\Big)ds=0,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

де функції ω_3, ω_4 зв'язані з функціями ω_1, ω_2 задачі (2.19) співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
\omega_3(s)&=\omega_1'(s)\cos\angle(\mathbf{s},x)+\omega_2(s)\cos\angle(\mathbf{n},x),\\
\omega_4(s)&=\omega_1'(s)\cos\angle(\mathbf{s},y)+\omega_2(s)\cos\angle(\mathbf{n},y),
\end{aligned}$$

в яких $\mathbf{s}$ і $\mathbf{n}$ – відповідно одиничні вектори дотичної та зовнішньої нормалі до межі ∂G, а через $\angle(\cdot,\cdot)$ позначено кут між відповідним вектором ($\mathbf{s}$ або $\mathbf{n}$) і додатним напрямком координатної осі (x або y), зазначеними у дужках. Розв'язки задач (2.19) і (2.20) зв'язані рівністю

$$V(x,y)=W(x,y)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Нехай Φ_1 – моногенна в області G функція, яка має шукану функцію V задачі (2.20) своєю першою компонентою в розкладі вигляду (2.16), тобто

$$\Phi_1(\zeta)=V(x,y)e_1+V_2(x,y)ie_1+V_3(x,y)e_2+V_4(x,y)ie_2.$$

З умови моногенності (2.17) при $\Phi=\Phi_1$ випливає, що $\frac{\partial V_3(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$. Тоді

$$\Phi_1'(\zeta)=\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}e_1+\frac{\partial V_2(x,y)}{\partial x}ie_1+\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}e_2+\frac{\partial V_4(x,y)}{\partial x}ie_2$$

та приходимо до висновку, що бігармонічна задача з крайовими умовами (2.20) зводиться до (1-3)-задачі в області G для функції $\Phi\equiv\Phi_1'$ з тими ж заданими функціями на межі області.

С.В. Грищук у роботі [9] показав, що задача про знаходження пружної рівноваги ізотропного тіла, яке займає область G, за заданими граничними значеннями частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial v}{\partial y}$ для зміщень $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ на межі ∂G редукується до (1-4)-задачі (див. також [13, 14]).

В.Ф. Ковальов у роботі [78] розв'язав (1-4)-задачу для півплощини в явному вигляді при деяких природних припущеннях про задані функції. Далі, використовуючи рівність (2.18) і конформне відображення області G на півплощину, а також допоміжну (1-4)-задачу, він редукував (1-2)-задачу і (1-3)-задачу до інтегро-диференціальних рівнянь. Підкреслимо, що В.Ф. Ковальов у роботі [78] запропонував лише схему розв'язання бігармонічних задач Шварца і не досліджував умови розв'язності цих задач.

У роботах [15, 16, 74, 11, 13, 9, 14, 10], для розв'язання бігармонічних задач Шварца, ми розвинули інший метод, який базуються на представленні розв'язків гіперкомплексними інтегралами, аналогічними до класичних інтегралів Шварца та інтегралів типу Коші.

У роботі [15] ми досліджували (1-3)-задачу у випадку, коли G – півплощина або одиничний круг бігармонічної площини та знайшли розв'язки у вигляді інтегралів, аналогічних до класичних інтегралів Шварца. У роботах [16, 74, 10], використовуючи гіперкомплексний аналог інтеграла типу Коші, ми редукували (1-3)-задачу до системи інтегральних рівнянь і встановили достатні умови фредгольмовості цієї системи. Це зроблено для областей, межі яких належать більш широким класам, ніж клас кривих Ляпунова, що, як правило, розглядалось раніше в плоскій теорії пружності (див., наприклад, [92, 93]).

Розв'язок (1-3)-задачі шукаємо у вигляді гіперкомплексного аналога інтеграла типу Коші:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\zeta} \Big(\varphi_1(\tau) e_1 + \varphi_3(\tau) e_2\Big)(\tau - \zeta)^{-1} d\tau \qquad \forall \zeta \in G,$$

де функції $\varphi_1 \colon \partial G \to \mathbb{R}$ та $\varphi_3 \colon \partial G \to \mathbb{R}$ неперервні на ∂G.

Розглянемо конформне відображення $z = \tau(t)$ верхньої півплощини $\{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} t > 0\}$ на область G комплексної площини. Позначимо

$$\tau_1(t) := \mathrm{Re}\tau(t), \qquad \tau_2(t) := \mathrm{Im}\tau(t), \qquad \widetilde{\tau}(s) := \tau_1(s)e_1 + \tau_2(s)e_2$$

при всіх $s \in \mathbb{R}$.

Умови на межу області G формулюються в термінах конформного відображення $\sigma(T)$ одиничного круга $\{T \in \mathbb{C} : |T| < 1\}$ на область G

такого, що

$$\tau(t) = \sigma\left(\frac{t-i}{t+i}\right), \qquad t \in \{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}t > 0\}.$$

За умов, що конформне відображення $\sigma(T)$ має відмінну від нуля контурну похідну $\sigma'(T)$ на одиничному колі $\Gamma := \{T \in \mathbb{C} : |T| = 1\}$ і її модуль неперервності

$$\omega_\Gamma(\sigma', \varepsilon) := \sup_{T_1, T_2 \in \Gamma, |T_1 - T_2| \le \varepsilon} |\sigma'(T_1) - \sigma'(T_2)|$$

задовольняє умову Діні

$$\int_0^2 \frac{\omega_\Gamma(\sigma', \eta)}{\eta} d\eta < \infty, \tag{2.21}$$

ми показали, що (1-3)-задача редукується до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} g_1(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s)\Big(\mathrm{Im}k_1(t,s) + 2\mathrm{Re}k_2(t,s)\Big)ds - \\
&\qquad - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(s)\mathrm{Im}k_2(t,s)ds = \widetilde{u}_1(t), \\
&\frac{1}{2} g_3(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(s)\Big(\mathrm{Im}k_1(t,s) - 2\mathrm{Re}k_2(t,s)\Big)ds - \\
&\qquad - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s)\mathrm{Im}k_2(t,s)ds = \widetilde{u}_3(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{2.22}$$

де $g_j(t) := \varphi_j\left(\widetilde{\tau}(t)\right)$ і $\widetilde{u}_j(t) := u_j\big(\widetilde{\tau}(t)\big)$ при $j \in \{1, 3\}$,

$$k_1(t,s) := \frac{\tau'(s)}{\tau(s) - \tau(t)} - \frac{1 + st}{(s-t)(s^2+1)},$$

$$k_2(t,s) := \frac{\tau'(s)\big(\tau_2(s) - \tau_2(t)\big)}{2\big(\tau(s) - \tau(t)\big)^2} - \frac{\tau_2'(s)}{2\big(\tau(s) - \tau(t)\big)}.$$

Доведено, що умова

$$\int_{\partial G} u_1(xe_1 + ye_2)dx + u_3(xe_1 + ye_2)dy = 0 \tag{2.23}$$

є необхідною для розв'язності системи інтегральних рівнянь (2.22).

В наступній теоремі, яка є частинним випадком теореми 1 роботи [10], сформульовано природні припущення, за яких умова (2.23) є також достатньою для розв'язності системи інтегральних рівнянь (2.22) в декартовому добутку $C(\overline{\mathbb{R}}) \times C(\overline{\mathbb{R}})$, де $C(\overline{\mathbb{R}})$ – банахів простір неперервних на розширеній дійсній осі функцій.

Теорема 2.19. *Нехай функції $u_1 \colon \partial G \to \mathbb{R}$ та $u_3 \colon \partial G \to \mathbb{R}$ неперервні на ∂G. Нехай конформне відображення $\sigma(T)$ має відмінну від нуля контурну похідну $\sigma'(T)$ на колі Γ і її модуль неперервності задовольняє умову* (2.21)*. Припустимо додатково, що*

(1) *усі розв'язки $(g_1, g_3) \in C(\overline{\mathbb{R}}) \times C(\overline{\mathbb{R}})$ однорідної системи рівнянь* (2.22) *(при $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}_3 \equiv 0$) є диференційовними на $\mathbb{R}$;*

(2) *для кожного такого розв'язку (g_1, g_3) однорідної системи рівнянь* (2.22) *контурна похідна φ' функції*

$$\varphi(\tau) := g_1(s)e_1 + g_3(s)e_2, \quad \tau = \widetilde{\tau}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

є інтегровною на ∂G і інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \varphi'(\tau)(\tau - \zeta)^{-1} d\tau$$

є обмеженим в областях G і $\mu \setminus \overline{G}$.

Тоді справедливі наступні твердження:

(i) *число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь* (2.22) *дорівнює* 1*;*

(ii) *неоднорідна система рівнянь* (2.22) *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова* (2.23)*.*

Зауважимо, що в теоремі 1 роботи [10] додаткове припущення 2 теореми 2.19 замінено більш слабким припущенням.

Подібні результати отримано і для (1-4)-задачі в роботах [11, 13, 10], але на відміну від (1-3)-задачі, яка є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується природна умова (2.23), (1-4)-задача є розв'язною безумовно.

3. Моногенні функції в нескінченновимірних векторних просторах з комутативним множенням

3.1. **Нескінченновимірні векторні простори, асоційовані з тривимірним рівнянням Лапласа.** Відомо, що неможливо отримати усі розв'язки тривимірного рівняння Лапласа (1.2) у формі компонент моногенних функцій, що приймають значення в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі (див., наприклад, [20, 87, 34]). Зокрема, для кожної такої алгебри існують сферичні функції, які не є компонентами вказаних гіперкомплексних моногенних функцій.

Розглянемо нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру $\mathbb{F} := \{g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty\}$ над полем $\mathbb{R}$ з нормою $\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$ і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення для елементів базису має наступний вигляд (див. [87, 34]):

$$
\begin{aligned}
&e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \tfrac{1}{2} e_{4n}, && \forall n \geq 1,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \tfrac{1}{2}\big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m}\big), && \forall n > m \geq 1,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \tfrac{1}{2}\big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n}\big), && \forall m > n \geq 1,\\
&e_{2n+1} e_{2m+1} = \tfrac{1}{2}\big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\big), && \forall n \geq m \geq 1,\\
&e_{2n} e_{2m} = \tfrac{1}{2}\big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\big), && \forall n \geq m \geq 1.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що e_1, e_2, e_3 – гармонічна трійка векторів.

Наступну теорему доведено в роботі [34]:

Теорема 3.2. *Нехай функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{F}$ є неперервною в області $\Omega \subset E_3$ та функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ з розкладу*

$$
\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y, z) e_k \tag{3.1}
$$

є $\mathbb{R}$-диференційовними в Ω. Для того щоб функція Φ була моногенною в області Ω необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови (2.4) *і наступні співвідношення:*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial x} \right| < \infty, \tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0+0} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \, & U_k(x + \varepsilon h_1, y + \varepsilon h_2, z + \varepsilon h_3) - U_k(x, y, z) - \\
& - \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial x} \varepsilon h_1 - \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial y} \varepsilon h_2 - \\
& - \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial z} \varepsilon h_3 \Bigg| \varepsilon^{-1} = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

для всіх $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що співвідношення (3.2), (3.3) обумовлені нормою абсолютної збіжності в нескінченновимірній алгебрі $\mathbb{F}$.

В роботах [87, 34] встановлено, що будь-яка сферична функція степеня n є компонентою моногенної функції $\Phi(\zeta) = a\zeta^n$, де

$$\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

при цьому коефіцієнт $a \in \mathbb{F}$ для кожної сферичної функції знайдено у явному вигляді.

У роботі [41] ми помістили алгебру $\mathbb{F}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{F}} := \Big\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

з топологією покоординатної збіжності.

Для функцій, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, формулювання твердження, подібного до теореми 3.3, може бути спрощене (див. [41]):

Теорема 3.3. *Нехай в розкладі* (3.1) *функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *компоненти* $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω*. Для того, щоб функція* Φ *була моногенною в області* Ω *необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови* (2.4).

Зв'язок між моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, і розв'язками системи (1.1) встановлено у наступному твердженні (див. [41], а також теорему 4.4 в [34]):

Теорема 3.4. *Компоненти* U_1, U_2, U_3 *розкладу* (3.1) *кожної моногенної функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *породжують вектор* $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}U_2, -\frac{1}{2}U_3)$*, координати якого задовольняють рівняння* (1.1) *в області* Ω.

Зв'язок між моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, і розв'язками тривимірного рівняння Лапласа встановлюється наступним твердженням (див. [41], а також теорему 4.5 в [34]):

Теорема 3.5. *Для кожної двічі неперервно диференційовної функції* $u : \Omega \to \mathbb{R}$*, яка задовольняє рівняння* (1.2) *в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *така, що функція* $U_1 \equiv u$ *є першою компонентою розкладу* (3.1).

У роботі [41] ми встановили результати, подібні до теорем 3.3-3.5, в топологічному векторному просторі, який містить деяку іншу нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру, асоційовану з тривимірним рівнянням Лапласа, а саме – в топологічному векторному просторі

$$\widetilde{\mathbb{G}} := \left\{ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності та базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для якого таблиця множення має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_{2n+1} e_m = e_{2n+m}, \quad e_{2n} e_{2m} = -e_{2n+2m-3} - e_{2n+2m+1}$$

для всіх цілих n і m. Очевидно, що e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів.

Наступні теореми 3.6-3.8 аналогічні до теорем 3.3-3.5 за своїм змістом.

Теорема 3.6 ([41]). *Нехай в розкладі* (3.1) *функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *компоненти* $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω*. Для того, щоб функція* Φ *була моногенною в області* Ω *необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови* (2.4).

Теорема 3.7 ([41]). *Компоненти розкладу* (3.1) *кожної моногенної функції* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *породжують вектори* $\mathbf{V} := (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$*, координати яких при всіх цілих значеннях* m *задовольняють рівняння* (1.1) *в області* Ω.

Теорема 3.8 ([41]). *Для довільної двічі неперервно диференційовної функції* $u : \Omega \to \mathbb{R}$*, яка задовольняє рівняння (1.2) в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *така, що функція* $U_1 \equiv u$ *є компонентою розкладу* (3.1).

Фактично, П. В. Кетчум у роботі [20] розглядав простір $\widetilde{\mathbb{F}}$, а М. Н. Рошкулець у роботі [57] розглядав простір $\widetilde{\mathbb{G}}$, хоча вони не використовували поняття топологічного векторного простору і, крім того, не використовували диференційовність функцій за Гато.

У роботі [42] ми побудували в явному вигляді головні продовження (2.2) аналітичних функцій комплексної змінної в комплексифікацію $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} := \mathbb{F} \oplus i\mathbb{F}$ алгебри $\mathbb{F}$.

У роботі [42] розглядаються також моногенні функції зі значеннями у комплексифікації $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}} := \widetilde{\mathbb{F}} \oplus i\widetilde{\mathbb{F}}$ топологічного векторного простору $\widetilde{\mathbb{F}}$. Причому досліджуються моногенні функції, визначені в областях чотиривимірного дійсного підпростору

$$E_4 := \left\{ \xi = xe_1 + sie_1 + ye_2 + ze_3 : \; x, s, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Під *моногенними* розуміються неперервні функції

$$\Phi : Q \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}},$$

де $Q \subset E_4$, які задовольняють рівність (2.3) при $\Phi'_G(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ та всіх $h \in E_4$.

Встановлюючи зв'язок між моногенними функціями, визначеними в областях просторів E_3 та E_4, ми довели, що кожна моногенна функція $\Phi_0 : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ з області $\Omega \subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q \subset E_4$.

Для простоти розглянемо випадок, коли Ω є кулею з центром в початку координат. З використанням теореми Ю. Січяка [67] про голоморфне продовження просторових гармонічних функцій, теореми єдиності для голоморфних функцій і аналогів умов Коші-Рімана для моногенних функцій, що приймають значення у просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, доведено наступне твердження.

Теорема 3.9 ([42]). *Нехай*

$$\Omega := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

– куля радіуса R в E_3 і $\Phi_0 : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ моногенна функція в Ω. Тоді існує єдина моногенна функція $\Phi : Q \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ в області

$$Q = \Big\{\xi = xe_1 + sie_1 + ye_2 + ze_3 \in E_4 : \\ x^2 + s^2 + y^2 + z^2 + 2|s|\sqrt{y^2 + z^2} < R^2\Big\}$$

така, що $\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta)$ для усіх $\zeta \in \Omega$.

У роботі [44] ми довели інтегральні теореми (теорема і формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ або топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$. В результаті, для функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, справедлива теорема (див. теорему 5 в [44]), аналогічна до теореми 2.13, в якій даються різні еквівалентні означення моногенних функцій.

Слід відзначити, що питання про поширення більшості тверджень, доведених для моногенних функцій, шо приймають значення в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ чи в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, на моногенні функції, що приймають значення в комплексифікації розглянутого вище топологічного векторного простору $\widetilde{\mathbb{G}}$, залишається відкритою проблемою.

3.10. **Нескінченновимірний векторний простір, асоційований з осесиметричними потенціальними полями.** У випадку, коли просторове потенціальне поле симетричне відносно осі Ox, потенціальна функція $u(x, y, z)$, яка задовольняє рівняння (1.2), є також симетричною відносно осі Ox, тобто

$$u(x, y, z) = \varphi(x, r) = \varphi(x, -r),$$

де $r := \sqrt{y^2 + z^2}$, і φ називається *осесиметричним потенціалом*. Тоді в меридіанній площині xOr існує функція $\psi(x, r)$, відома як *функція течії Стокса*, така, що функції φ та ψ задовольняють наступну систему рівнянь з виродженням на осі Ox:

$$r\ \frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x,r)}{\partial r}, \qquad r\ \frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial\psi(x,r)}{\partial x}, \tag{3.4}$$

з якої випливають рівняння

$$r\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi(x,r) + \frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial r} = 0, \tag{3.5}$$

$$r\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\psi(x,r) - \frac{\partial\psi(x,r)}{\partial r} = 0. \tag{3.6}$$

Нехай $\mathbb{H}_\mathbb{C} := \{a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k \mid a_k \in \mathbb{C}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\}$ – комутативна асоціативна банахова алгебра над полем комплексних чисел з нормою $\|a\|_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ і наступною таблицею множення для елементів базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_m e_n = \tfrac{1}{2}\left(e_{m+n-1} + (-1)^{n-1} e_{m-n+1}\right), \quad \forall m \geq n \geq 1,$$

яка запропонована І. П. Мельниченком (див., наприклад, [86, 90, 87]). Множина

$$\mathfrak{I} := \Big\{g \in \mathbb{H}_\mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\mathrm{Re}c_{2k-1} - \mathrm{Im}c_{2k}) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\mathrm{Re}c_{2k} + \mathrm{Im}c_{2k-1}) = 0\Big\}$$

є максимальним ідеалом алгебри $\mathbb{H}_\mathbb{C}$.

Розглянемо площину $\mu_{e_1,e_2} := \{\zeta = xe_1 + re_2 \mid x, r \in \mathbb{R}\}$. Будемо використовувати однакові позначення G для конгруентних областей в $\mathbb{R}^2$, μ_{e_1,e_2} і $\mathbb{C}$.

Неперервна функція $\Phi : G \to \mathbb{H}_\mathbb{C}$ є *моногенною* в області G, якщо для кожної точки $\zeta \in G$ існує елемент $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ такий, що рівність (2.3) виконується для всіх $h \in \mu_{e_1,e_2}$. Для функцій $\Phi : G \to \mathbb{H}_\mathbb{C}$ справедлива теорема (див. [34]), подібна до теореми 3.2.

Надалі, область G меридіанної площини xOr є симетричною відносно осі Ox.

Теорема 3.11 ([87, 90]). *Якщо область G меридіанної площини xOr є симетричною відносно осі Ox та опуклою в напрямку осі Or, то кожна моногенна функція $\Phi : G \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ представляється у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}(A\Phi)(t)(te_1-\zeta)^{-1}dt + \Phi_0(\zeta) \qquad \forall \zeta = xe_1 + re_2 \in G,$$

де Γ_ζ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в G, що охоплює відрізок, який сполучає точки $z = x + ir$ та $\bar{z}$ та є спектром елемента ζ, $\Phi_0 : G \to \mathfrak{I}$ – деяка моногенна функція, що приймає значення в ідеалі $\mathfrak{I}$.

В роботах [87, 90] для кожної функції $F : G \to \mathbb{C}$, аналітичної в такій області комплексної площини, яка розглядається в теоремі 3.11, ми отримали в явному вигляді розклад головного продовження (2.2) за базисом алгебри:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}(te_1-\zeta)^{-1}F(t)dt = U_1(x,r)\ e_1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} U_k(x,r)\ e_k, \tag{3.7}$$

де

$$U_k(x,r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\Big(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-(t-x)}{r}\Big)^{k-1}dt$$

при $k = 1, 2, \ldots$, $\zeta = xe_1 + re_2$, $z = x + ir$, Γ_ζ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в G, що охоплює спектр елементу ζ – відрізок, який сполучає точки z та $\bar{z}$, $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ – неперервна вітка аналітичної за змінною t функції поза вказаним відрізком у випадку $\mathrm{Im} z \neq 0$, яка довизначена рівністю $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} := t - z$ для кожної точки $z \in G$ при $\mathrm{Im} z = 0$.

В наступній теоремі описано зв'язок між головними продовженнями (3.7) аналітичних функцій комплексної змінної в площину μ_{e_1,e_2} і розв'язками системи (3.4).

Теорема 3.12 ([87, 90]). *Якщо $F : G \to \mathbb{C}$ – аналітична функція в такій області комплексної площини, яка розглядається в теоремі 3.11, то перша та друга компоненти розкладу головного продовження* (3.7) *породжують пару розв'язків φ і ψ системи* (3.4) *в області G за формулами*

$$\varphi(x,r) = U_1(x,r), \quad \psi(x,r) = rU_2(x,r). \tag{3.8}$$

Із рівностей (3.7) і (3.8) випливає, що функції

$$\varphi(x,r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt, \tag{3.9}$$

$$\psi(x,r) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{F(t)\ (t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt, \quad z = x+ir, \tag{3.10}$$

є розв'язками системи (3.4) в області G (див. [87, 88, 89]).

У роботах [87, 97, 98] інтегральні зображення (3.9) і (3.10) для осесиметричного потенціалу φ і функції течії Стокса ψ узагальнено на випадок довільної однозв'язної області, симетричної відносно осі Ox. У цьому випадку Γ_ζ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в G, що охоплює лінію розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, якою є жорданова спрямлювана крива, що лежить в області G та з'єднує точки z, $\bar{z}$.

У роботі [33] показано, що у цьому випадку функції φ та ψ виражаються формулами (3.8) через компоненти головного продовження (3.7) комплексної аналітичної функції F, яке приймає значення в нескінченновимірному топологічному векторному просторі

$$\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності (див. також [35]). В роботі [35] доведено інтегральні теореми для моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ або векторному просторі $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$.

У роботах [97, 87] встановлено достатні умови неперервного продовження функцій (3.9), (3.10) на межу ∂G області G та отримано оцінки модулів неперервності граничних значень цих функцій.

У роботах [87, 94, 96, 95, 49] доведено, що всі осесиметричні потенціали й функції течії Стокса (тобто розв'язки системи (3.4) які мають фізичну інтерпретацію) в однозв'язній області G, симетричній відносно осі Ox, представляються відповідно інтегральними зображеннями (3.9) і (3.10). Сформулюємо такі теореми у випадку обмеженої області G.

Теорема 3.13 ([87, 94, 49]). *Для кожної парної за змінною r функції $\varphi(x,r)$, що є розв'язком рівняння* (3.5) *в обмеженій області G, існує єдина голоморфна в області G функція $F : G \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову симетрії*

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall z \in G \tag{3.11}$$

та така, що рівність (3.9) *виконується при всіх $(x,r) \in G$.*

Теорема 3.14 ([87, 95, 49])**.** *Для кожної парної за змінною r функції $\psi(x,r)$, що є розв'язком рівняння* (3.6) *в обмеженій області G та задовольняє умову*

$$\psi(x,0) \equiv 0 \tag{3.12}$$

в G, існує голоморфна в області G функція F_0 така, що рівність (3.10) *при $F = F_0$ виконується при всіх $(x,r) \in G$. Крім того, будь-яка голоморфна в G функція F, яка задовольняє рівність* (3.10) *і умову* (3.11)*, виражається у вигляді $F(z) = F_0(z) + C$, де C – деяка дійсна стала.*

Зауважимо, що умова (3.12) відповідає фізичному змісту функції течії Стокса: в моделі течії ідеальної рідини ця умова відображає той факт, що вісь Ox є лінією течії.

У роботі [75] ми встановили інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу, які узагальнюють інтегральні зображення, отримані в роботах А. Маккі [29], П. Хенрічі [17], Ю.П. Крівенкова [81] і Г.М. Положого [102].

Використовуючи інтегральні зображення (3.9) і (3.10), ми розвинули методи розв'язання крайових задач в меридіанній площині просторового осесиметричного потенціального поля (див. [87, 94, 96, 95, 49]). Зокрема, використовуючи інтегральне зображення (3.10) функції течії Стокса, в роботах [30, 87, 91, 33, 50] ми отримали ряд результатів, що мають природну фізичну інтерпретацію. Так, для важливої у застосуваннях задачі обтікання осесиметричного тіла потоком ідеальної нестисливої рідини ми встановили критерії розв'язності задачі шляхом розподілу джерел та диполів на осі симетрії і побудували конкретні приклади невідомих раніше розв'язків, одержаних із залученням мультиполів разом з розподіленими на осі диполями.

Задача обтікання, яка формулюється в термінах функції течії Стокса для необмеженої області G з обмеженою спрямлюваною межею ∂G, полягає у відшуканні розв'язку $\psi_1(x,r)$ рівняння (3.6), який задовольняє умову

$$\psi_1(x,r) = 0, \qquad \forall (x,r) \in \partial G \cup \{(x,r) \in G \ : \ r = 0\} \tag{3.13}$$

і має таку асимптотику:

$$\psi_1(x,r) = \frac{1}{2} v_\infty r^2 + o(1), \quad x^2 + r^2 \to \infty, v_\infty > 0. \tag{3.14}$$

Умова (3.13) виражає той факт, що границя ∂G і вісь Ox є лініями течії, а в асимптотичному співвідношенні (3.14) v_∞ є швидкістю необмеженого потоку на нескінченності.

Позначимо через b_1 і b_2 точки перетину межі ∂G з дійсною віссю, при цьому умовимося, що $b_1 < b_2$.

Функція течії Стокса $\psi(x,r) = \psi_1(x,r) - v_\infty r^2/2$ в області G виражається рівністю (3.10). Тому розв'язання задачі обтікання можна отримати, розв'язавши інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt = v_\infty r^2, \quad (x,r)\in \partial G, z = x+ir, \tag{3.15}$$

в якому лінією розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ є дуга $\Gamma_{z\bar{z}} \subset \partial G$, що з'єднує точки z, $\bar{z}$ і містить точку b_1, а при $t \in \Gamma_{z\bar{z}}$ значення функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ беруться на правому березі лінії розгалуження $\Gamma_{z\bar{z}}$. Шукана функція F у рівнянні (3.15) належить класу Смірнова E_1 в області G, задовольняє умову симетрії (3.11) і має нуль не нижче другого порядку у нескінченно віддаленій точці, як це показано в [87, 95]. Функцію F з такими властивостями називаємо *креативною* для функції течії Стокса $\psi(x,r)$.

Доведено наступну теорему, в якій для функції $F(z)$, що належить класу Смірнова E_p, $p > 1$, поза відрізком дійсної осі $[a_1, a_2]$, через $F^+(t), F^-(t)$ позначено її кутові граничні значення при прямуванні $z \to t$ відповідно до верхньої та нижньої відносно дійсної осі півплощини, які існують майже всюди на (a_1, a_2).

Теорема 3.15 ([87, 91, 30]). *Нехай креативна функція F, яка є розв'язком рівняння* (3.15), *продовжується до функції класу Смірнова E_p, $p > 1$, поза відрізком $[a_1, a_2]$. Тоді розв'язок задачі обтікання задається формулою*

$$\psi_1(x,r) = \frac{v_\infty r^2}{2} + \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{q(t)(t-x)}{\sqrt{(t-x)^2+r^2}} dt, \quad \forall (x,r)\in D, \tag{3.16}$$

де $q(t) := -\frac{1}{2\pi}(F^+(t) - F^-(t)) \equiv -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im} F^+(t)$ *– густина розподілу інтенсивності джерел на відрізку $[a_1, a_2]$. При цьому сумарна інтенсивність джерел*

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} q(t)dt = 0.$$

Представлення розв'язку задачі обтікання через густину розподілу інтенсивності джерел $q(t)$ формулою (3.16) – відомий класичний результат (див. [82, с. с.201]), але при цьому в теоремі 3.15 густина розподілу джерел виражається через граничні значення функції F на множині розподілу джерел.

Теорема 3.16 ([87, 91, 30]). *Нехай креативна функція F, яка є розв'язком рівняння* (3.15)*, має в області G первісну $\mathcal{F}$, що продовжується до функції класу Смірнова E_p, $p > 1$, поза відрізком $[a_1, a_2]$. Тоді розв'язок задачі обтікання задається формулою*

$$\psi_1(x,r) = \frac{v_\infty r^2}{2} - r^2 \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{p(t)}{((t-x)^2 + r^2)^{3/2}} dt \quad \forall (x,r) \in D, \tag{3.17}$$

де

$$p(t) := -\frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}^+(t) - \mathcal{F}^-(t)\right) \equiv -\frac{1}{\pi} \, \mathrm{Im}\mathcal{F}^+(t)$$

– густина розподілу інтенсивності диполів на відрізку $[a_1, a_2]$.

У роботах [87, 91, 30] доведено теореми, обернені до теорем 3.15 та 3.16, і встановлено в явному вигляді вирази густини розподілу інтенсивності джерел $q(t)$ і густини розподілу інтенсивності диполів $p(t)$ відповідно через значення функцій F і $\mathcal{F}$ на множині

$$(-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty).$$

У роботах [87, 91, 30] також показано, що кожний розв'язок задачі обтікання вигляду (3.16) подається також формулою (3.17), де

$$p(t) = \int\limits_{a_1}^{t} q(\tau) d\tau.$$

Проте серед областей D, для яких розв'язок задачі обтікання задається формулою (3.17), існують області, для яких функція ψ_1 не може бути подана у вигляді (3.16). Останнє справедливо, наприклад, у випадку, коли функція $p(t)$, що входить у формулу (3.17), задовольняє нерівність $p(a_1) \neq p(a_2)$. Отже, формула (3.17) задає розв'язок задачі обтікання для більш широкого класу областей D, ніж формула (3.16). Встановлено також, що існують області, для яких при розв'язанні задачі обтікання необхідно використовувати мультиполі поряд з розподіленими джерелами та диполями, при цьому побудовано приклади невідомих раніше розв'язків, одержаних із залученням квадруполів поряд з розподіленими на осі диполями.

Наведені тут результати стосовно задачі обтікання узагальнено у роботі [50] на випадок більш загальних розподілів і конфігурацій особливостей креативної функції F.

Література

[1] Beckh-Widmanstetter H. A. v. "Läßt sich die Eigenschaft der analytischen Funktionen einer gemeinen komplexen Veränderlichen, Potentiale als Bestandteile zu liefern, auf Zahlsysteme mit drei Einheiten verallgemeinern?" *Monatsh. Math. Phys.* 23:1 (1912), pp. 257–260.

[2] Blum E.K. "A theory of analytic functions in Banach algebras". *Trans. Amer. Math. Soc.* 78 (1955), pp. 343–370.

[3] Cartan Élie. "Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes". *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques* 1e série, 12:2 (1898), B65–B99.

[4] Catoni Francesco, Boccaletti Dino, Cannata Roberto, Catoni Vincenzo, Nichelatti Enrico, and Zampetti Paolo. *The mathematics of Minkowski space-time.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008, pp. xx+255.

[5] Cesari Lamberto. *Surface area.* Annals of Mathematics Studies, No. 35. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, pp. x+595.

[6] Douglis Avron. "A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables". *Comm. Pure Appl. Math.* 6 (1953), pp. 259–289.

[7] Fueter Run. "Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Theta u = 0$ und $\Theta\Theta u = 0$ mit vier reellen Variablen". *Comment. Math. Helv.* 7:1 (1934), pp. 307–330.

[8] Goursat Édouard. *Cours d'analyse mathématique. Tome II.* fourth. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, pp. iv+686.

[9] Gryshchuk S. V. "$\mathbb{B}$-valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D elasticity". *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations.* Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2016, pp. 37–47.

[10] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "A hypercomplex method for solving boundary value problems for biharmonic functions". *Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics.* Springer International Publishing, 2021, pp. 231–255.

[11] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "A Schwartz-type boundary value problem in a biharmonic plane". *Lobachevski J. Math.* 38:3 (2017), pp. 435–442.

[12] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "Basic properties of monogenic functions in a biharmonic plane". *Complex analysis and dynamical systems V.* Vol. 591. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 127–134.

[13] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "Reduction of a Schwartz-type boundary value problem for biharmonic monogenic functions to Fredholm integral equations". *Open Math.* 15:1 (2017), pp. 374–381.

[14] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "Schwartz-type boundary value problems for monogenic functions in a biharmonic algebra". *Analysis as a life.* Trends Math. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019, pp. 193–211.

[15] Gryshchuk S. V. and Plaksa S. A. "Schwartz-type integrals in a biharmonic plane". *International Journal of Pure and Apllied Mathematics* 83:1 (2013), pp. 193–211.

[16] Gryshchuk Serhii V. and Plaksa Sergiy A. "Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem". *Math. Methods Appl. Sci.* 39:11 (2016), pp. 2939–2952.

[17] Henrici Peter. "On the domain of regularity of generalized axially symmetric potentials". *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957), pp. 29–31.

[18] Herus O.F. "On the Cauchy theorem for hyperholomorphic functions of spatial variable". *Journal of Math. Sci.* 229:1 (2018), pp. 1–6.

[19] Hille Einar and Phillips Ralph S. *Functional analysis and semi-groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957, pp. xii+808.

[20] Ketchum P. W. "A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable". *Amer. J. Math.* 51:2 (1929), pp. 179–188.

[21] Ketchum P. W. "Analytic functions of hypercomplex variables". *Trans. Amer. Math. Soc.* 30:4 (1928), pp. 641–667.

[22] Kisil Vladimir V. "Erlangen program at large: an overview". Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012, pp. 1–94.

[23] Kravchenko V. V. and Shapiro M. V. *Integral representations for spatial models of mathematical physics.* Vol. 351. Longman, Harlow, 1996, pp. vi+247.

[24] Kunz K. S. "Application of an algebraic technique to the solution of Laplace's equation in three dimensions". *SIAM J. Appl. Math.* 21 (1971), pp. 425–441.

[25] Kuzmenko T. S. and Shpakivskyi V. S. "Generalized integral theorems for quaternionic G-monogenic mappings". *Journal of Math. Sci.* 224:4 (2017), pp. 530–540.

[26] Kuzmenko T.S. and Shpakivskyi V. S. "A theory of quaternionic G-monogenic mappings in E_3". *Models and Theories in Social Systems.* Springer International Publishing, 2018, pp. 451–508.

[27] Lorch Edgar R. "The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings". *Trans. Amer. Math. Soc.* 54 (1943), pp. 414–425.

[28] Luna-Elizarrarás M. Elena, Shapiro Michael, Struppa Daniele C., and Vajiac Adrian. *Bicomplex holomorphic functions.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, pp. viii+231.

[29] Mackie A. G. "Contour integral solutions of a class of differential equations". *J. Rational Mech. Anal.* 4 (1955), pp. 733–750.

[30] Mel'nichenko I. P. and Plaksa S. A. "Outer boundary problems for the Stokes flow function and steady streamline along axial-symmetric bodies". *Комплексний аналіз і теорія потенціалу: Праці Українського математичного конгресу - 2001.* Київ: Ін-т математики НАН України, 2003, pp. 82–91.

[31] Moisil G. C. and Theodoresco N. "Functions holomorphes dans l'espace". *Mathematica (Cluj)* 5 (1931), pp. 142–159.

[32] Peirce Benjamin. "Linear Associative Algebra". *Amer. J. Math.* 4:1-4 (1881), pp. 97–229.

[33] Plaksa S. A. "Axial-symmetric potential flows". *Models and Theories in Social Systems.* Springer International Publishing, 2018, pp. 165–195.

[34] Plaksa S. A. "Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics". *Advances in applied analysis.* Trends Math. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012, pp. 177–223.

[35] Plaksa S. A. "Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication". *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 10:4-5 (2013), pp. 306–319.

[36] Plaksa S. A. "Monogenic Functions in Commutative Algebras Associated with Classical Equations of Mathematical Physics". *Journal of Mathematical Sciences* 242:3 (2019), pp. 432–456.

[37] Plaksa S. A. "On differentiable and monogenic functions in a harmonic algebra". *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 14:1 (2017), pp. 210–221.

[38] Plaksa S. A., Gryshchuk S. V., and Shpakivskyi V. S. "Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physics". *Complex analysis and dynamical systems IV. Part 1.* Vol. 553. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 245–258.

[39] Plaksa S. A. and Pukhtaievych R. P. "Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra". *An.Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* 22:1 (2014), pp. 221–235.

[40] Plaksa S. A. and Pukhtaievych R. P. "Monogenic functions in three-dimensional harmonic commutative algebras". *Complex analysis and potential theory with applications.* Cambridge Sci. Publ., 2014, pp. 147–155.

[41] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication". *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.* 62:2 (2012), pp. 55–65.

[42] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "An extension of monogenic functions and spatial potentials". *Lobachevskii J. Math.* 38:2 (2017), pp. 330–337.

[43] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras". *Complex Variables and Elliptic Equations* 59:1 (2013), pp. 110–119.

[44] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication". *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.* 68:2 (2018), pp. 25–36.

[45] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "Integral theorems in a commutative three-dimensional harmonic algebra". *Progress in analysis and its applications.* World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, pp. 232–239.

[46] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "Limiting values of the Cauchy type integral in a three-dimensional harmonic algebra". *Eurasian Math. J.* 3:2 (2012), pp. 120–128.

[47] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality". *Journal of Algerian Math. Society* 1:1 (2014), pp. 1–13.

[48] Plaksa S. A. and Shpakivskyi V. S. "On limiting values of Cauchy type integral in a harmonic algebra with two-dimensional radical". *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A* 67:1 (2013), pp. 57–64.

[49] Plaksa Sergiy. "Singular and Fredholm integral equations for Dirichlet boundary problems for axial-symmetric potential fields". *Factorization, singular operators and related problems (Funchal, 2002).* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, pp. 219–235.

[50] Plaksa Sergiy A. "A functionally-analytic method for modelling axial-symmetric flows of ideal fluid". *Demonstr. Math.* 52:1 (2019), pp. 213–224.

[51] Pogorui Anatoliy, Rodríguez-Dagnino Ramón M., and Shapiro Michael. "Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras". *Math. Methods Appl. Sci.* 37:17 (2014), pp. 2799–2810.

[52] Price G. Baley. *An introduction to multicomplex spaces and functions.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1991, pp. xiv+402.

[53] Pukhtaievych R. P. "Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra". *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 10:4-5 (2013), pp. 352–361.

[54] Pukhtaievych R. P. and Plaksa S. A. "On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional commutative algebra with one-dimensional radical".

Analele Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematica 25:3 (2017), pp. 167–182.

[55] Pukhtaievych Roman and Plaksa Sergiy. "Some properties of a Cauchy type integral in a three-dimensional commutative algebra with one-dimensional radical". *Monatsh. Math.* 189:3 (2019), pp. 523–548.

[56] Ringleb F. "Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen". *Rend. Circ. Mat. Palermo* 57 (1933), pp. 311–340.

[57] Roşculeţ M. N. "Algèbres infinies associées à des équations aux dérivées partielles, homogènes, aux ceofficients constants d'ordre quelconque". *Acad. R. P. Romîne. Stud. Cerc. Mat.* 6 (1955), pp. 567–643.

[58] Ryan John. "Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis". *J. Lie Theory* 8:1 (1998), pp. 67–82.

[59] Scheffers G. "Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen, I". *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Mat.-Phys. Kl.* 45 (1893), pp. 828–848.

[60] Scheffers G. "Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen, II". *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Mat.-Phys. Kl.* 46 (1894), pp. 120–134.

[61] Segre Corrado. "Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici (The real representations of complex elements and extentions to bicomlex systems)". *Math. Ann.* 40:3 (1892), pp. 413–467.

[62] Shpakivskyi V. S. "Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras". *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 26:1 (2016), pp. 417–434.

[63] Shpakivskyi V. S. "Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras". *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 12:3 (2015), pp. 251–268.

[64] Shpakivskyi V. S. and Kuzmenko T. S. "Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings". *An.Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* 24:2 (2016), pp. 271–281.

[65] Shpakivskyi Vitalii. "Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra". *Adv. Pure Appl. Math.* 7:1 (2016), pp. 63–75.

[66] Shpakivskyi Vitaly S. and Plaksa Sergeĭ A. "Integral theorems and a Cauchy formula in a commutative three-dimensional harmonic algebra". *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.* 60:2 (2010), pp. 47–54.

[67] Siciak Józef. "Holomorphic continuation of harmonic functions". *Ann. Polon. Math.* 29 (1974), pp. 67–73.

[68] Sobrero L. "Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata". *Ricerche di Ingegneria* 13:2 (1934), pp. 255–264.

[69] Study E. "Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen". *Monatsh. Math. Phys.* 1:1 (1890), pp. 283–354.

[70] Sudbery A. "Quaternionic analysis". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 85:2 (1979), pp. 199–224.

[71] Tolstoff G. "Sur les fonctions bornées vérifiant les conditions de Cauchy- Riemann". *Мат. сборник* 10:1-2 (1942), pp. 79–85.

[72] Гамильтон У. Р. *Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы.* М.: Наука, 1994.

[73] Грищук С. В. «Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I, II». *Укр. мат. журн.* 70:8, 10 (2018), с. 1058—1071, 1382—1389.

[74] Грищук С. В. «Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі». *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 14:1 (2017), с. 128—139.

[75] Грищук С. В. и Плакса С. А. «Интегральные представления обобщенных осесимметричных потенциалов в односвязной области». *Укр. мат. журн.* 61:2 (2009), с. 160—177.

[76] Грищук С. В. и Плакса С. А. «Моногенные функции в бигармонической алгебре». *Укр. мат. журн.* 61:12 (2009), с. 1587—1596.

[77] Грищук С. В. и Плакса С. А. «О логарифмическом вычете моногенных функций бигармонической переменной». *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 7:2 (2010), с. 227—234.

[78] Ковалев В. Ф. *Бигармоническая задача Шварца. Препринт 86.16.* Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.

[79] Ковалев В. Ф. и Мельниченко И. П. *Алгебры функционально-инвариантных решений p-бигармонического уравнения. Препринт 91.10.* К.: Ин-т математики АН УССР, 1991.

[80] Ковалев В. Ф. и Мельниченко И. П. «Бигармонические функции на бигармонической плоскости». *Докл. АН УССР. Сер. А* 8 (1981), с. 25—27.

[81] Кривенков Ю. П. «Представление решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу через аналитические функции». *Докл. АН СССР* 116:4 (1957), с. 545—548.

[82] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* Москва: Наука, 1977.

[83] Мельниченко И. П. «Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа». *Укр. мат. журн.* 55:9 (2003), с. 1284—1290.

[84] Мельниченко И. П. «Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга». *Укр. мат. журн.* 38:2 (1986), с. 252—254.

[85] Мельниченко И. П. «О представлении моногенными функциями гармонических отображений». *Укр. мат. журн.* 27:5 (1975), с. 606—613.

[86] Мельниченко И. П. «Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией». *Современные вопросы вещественного и комплексного анализа (Ин-т математики АН УССР, Киев).* 1984, с. 98—102.

[87] Мельниченко И. П. и Плакса С. А. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля.* Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2008, с. 230.

[88] Мельниченко И. П. and Плакса С. А. “Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функции векторного аргумента. I”. *Укр. мат. журн.* 48:11 (1996), pp. 1518–1529.

[89] Мельниченко И. П. and Плакса С. А. “Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функции векторного аргумента. II”. *Укр. мат. журн.* 48:12 (1996), pp. 1695–1703.

[90] Мельниченко И. П. and Плакса С. А. “Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функции векторного аргумента. III”. *Укр. мат. журн.* 49:2 (1997), pp. 228–243.

[91] Мельниченко И. П. и Плакса С. А. «Приложение аналитических функций к задачам обтекания осесимметричных тел идеальной жидкостью». *Доп. НАН України* 10 (2003), с. 22—29.

[92] Михлин С. Г. *Плоская задача теории упругости.* Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, 65, Москва-Ленинград, 1935.

[93] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966.

[94] Плакса С. А. «Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости». *Укр. мат. журн.* 53:12 (2001), с. 1623—1640.

[95] Плакса С. А. «Задача Дирихле для функции тока Стокса в односвязной области меридианной плоскости». *Укр. мат. журн.* 55:2 (2003), с. 197—231.

[96] Плакса С. А. «К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала». *Укр. мат. журн.* 54:12 (2002), с. 1634—1641.

[97] Плакса С. А. «Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I». *Укр. мат. журн.* 53:5 (2001), с. 631—646.

[98] Плакса С. А. «Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. II». *Укр. мат. журн.* 53:6 (2001), с. 800—809.

[99] Плакса С. А. и Пухтаевич Р. П. «Конструктивное описание моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом». *Укр. мат. журн.* 65:5 (2013), с. 670—680.

[100] Плакса С. А. и Шпаковский В. С. «Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга». *Укр. мат. журн.* 62:8 (2010), с. 1078—1091.

[101] Плакса С. А. и Шпаковский В. С. «О логарифмическом вычете моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с двумерным радикалом». *Укр. мат. журн.* 65:7 (2013), с. 968—974.

[102] Положий Г. Н. *Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций.* Киев: Наукова думка, 1973.

[103] Пухтаевич Р. П. «Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом». *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 9:2 (2012), с. 311—326.

[104] Смирнов В.И. *Курс высшей математики, т.3, ч.2.* Москва: Наука, 1974.

[105] Трохимчук Ю. Ю. *Непрерывные отображения и условия моногенности.* М.: Физматиз, 1963.

[106] Шпаківский В. С. «Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри». *Праці міжнар. геом. центру* 11:3 (2018), с. 1—18.

[107] Шпаківский В. С. «Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах». *Укр. мат. вісник* 15:2 (2018), с. 272—294.

[108] Шпаківський В. С. «Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними». *Труды ИПММ НАН Украины* 32 (2018), с. 147—168.

[109] Шпаківський В. С. та Кузьменко Т. С. «Про один клас кватерніонних відображень». *Укр. мат. журн.* 68:1 (2016), с. 117—130.

[110] Шпаковский В. С. «Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики». *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 14:1 (2017), с. 262—274.

[111] Шпаковский В. С. "Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре". *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України* 7:2 (2010), pp. 314–321.

[112] Шпаковский В. С. и Кузьменко Т. С. «О моногенных отображениях кватернионной переменной». *Укр. мат. вісник* 13:2 (2016), с. 123—142.

С. А. Плакса
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: `plaksa@imath.kiev.ua, plaksa62@gmail.com`
ORCID: `orcid.org/0000-0002-2828-0329`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 555–593

Одновимірні шарування на поверхнях та їх простори листів

Євген Полулях

Abstract. The work is of an overview nature. A class of striped surfaces is considered: two-dimensional surfaces that can be glued from horizontal strips and on which one-dimensional canonical foliation is defined in a certain way. A number of combinatorial and homotopy invariants for surfaces of this class are considered. Necessary and sufficient conditions are given under which a two-dimensional manifold M^2 on which a one-dimensional foliation Δ is given, each leaf of which is homeomorphic to $\mathbb{R}^1$ and is a closed subset of M^2, is homeomorphic to some striped surface.

Анотація. Робота носить оглядовий характер. Розглянуто клас смугастих поверхонь: двовимірних поверхонь, які можуть бути склеєні з горизонтальних смуг і на яких певним чином задається одновимірне канонічне шарування. Розглянуто низку комбінаторних і гомотопічних інваріантів для поверхонь з цього класу. Наведено необхідні й достатні умови при виконанні яких двовимірний многовид M^2, на якому задано одновимірне шарування Δ, кожен лист якого гомеоморфний $\mathbb{R}^1$ і є замкненою підмножиною M^2, листово гомеоморфний деякій смугастій поверхні.

1. Вступ

Шарування з особливостями відіграють значну роль принаймні у двох різних розділах математики: в *диференціальній топології* та в *теорії динамічних систем.*

Гладкі функції на многовидах породжують шарування ковимірності 1. Дійсно, розглянемо гладку функцію f на многовиді M^n, яка ні в якій точці не є локально постійною. Нехай Σ – множина критичних точок f на M^n.

З Теореми про ранг (див. [51]) слідує, що для кожної регулярної точки f існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в $\mathbb{R}^n$, який відображає компоненти перетинів множин рівня f з U_x у множини рівня координатної проекції $\mathrm{pr}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

2010 Mathematics Subject Classification: 57R30, 55P15

Ключові слова: шарування, смугаста поверхня

$\mathrm{pr}_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$. Отже розбиття Δ_0 множини $M^2 \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності множин рівня f є $(n-1)$-вимірним шаруванням на $M^2 \setminus \Sigma$. Тому розбиття простору M^2 на компоненти зв'язності множин рівня f є шаруванням з особливостями на M^n з множиною особливостей Σ.

Маючи таке шарування, можна побудувати простір $\Gamma_{K-R}(f)$ його листів (інша назва – *простір Кронрода–Ріба*), тобто фактор-простір M^n/Δ з індукованою топологією.

Іншим природним джерелом шарувань з особливостями є гладкі *потоки* (динамічні системи з неперервним часом). Гладким потоком на многовиді M^n називається гладке відображення $\Phi : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$, яке відповідає наступним умовам:

(1) $\Phi(x, 0) = x$ для кожного $x \in M^n$;

(2) $\Phi(\Phi(x,t), \tau) = \Phi(x, t+\tau)$ для всіх $x \in M^n$ і $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Орбітою точки $x \in M^n$ називається множина

$$\mathrm{Orb}(x) = \{\Phi(x,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, всі орбіти потоку є лінійно зв'язними множинами. *Нерухомою точкою* Φ називається точка, що збігається зі своєю орбітою. Позначимо множину всіх нерухомих точок через Σ.

Нехай Δ – розбиття M^n на орбіти потоку Φ. Згідно з Теоремою про трубку току (див. [35]) для кожної точки $x \in M^n$, яка не є нерухомою, існують її відкритий окіл U_x, відкрита підмножина $V_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ і гомеоморфізм $\phi_x : U_x \to (-1,1) \times V_x$, такі що $\Phi(y,t) \in U_x$ для кожного $y \in \phi_x^{-1}(\{0\} \times V_x)$ і $t \in (-1,1)$, а також виконується співвідношення

$$\phi_x \circ \Phi(y,t) = (t, \phi_x(y)).$$

Внаслідок цього розбиття простору M^n на орбіти потоку Φ утворює одновимірне шарування з особливостями на M^n, множиною особливостей якого є Σ.

Шарування, що породжені функціями і шарування, породжені потоками, тісно зв'язані між собою.

Дуже цікавою є розмірність $n = 2$, коли і функції і потоки породжують одновимірні шарування з особливостями. У цій ситуації можна уявити собі пару функцій, таку що потік градієнта однієї функції породжує всюди крім множини нерухомих точок шарування, яке збігається з шаруванням на компоненти зв'язності множин рівня іншої функції на множині її регулярних точок. Приклади таких функцій відомі. Зокрема цю властивість мають пари спряжених гармонічних функцій.

Топологічним аналогом гармонічних функцій на двовимірних многовидах є *псевдогармонічні функції* (функції, що в кожній точці локально топологічно еквівалентні гармонічним функціям). Дві псевдогармонічні функції називаються *спряженими*, якщо в кожній точці ця пара функцій локально топологічно еквівалентна парі спряжених гармонічних функцій.

Важливість псевдогармонічних функцій підкреслюють наступні міркування.

– Згідно з *теоремою про ранг* в околі кожної регулярної точки функція класу гладкості C^p, $p \geq 1$, гладко еквівалентна до $\operatorname{Re} z$ (теж саме, що й координатна проєкція).
– Відомо (див. [11]), що *для кожної ізольованої критичної точки* x_0 *(окрім локальних екстремумів) функції* $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ *існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до* $\operatorname{Re} z^k$ *для деякого* $k \in \mathbb{N}$.

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною у кожній точці крім локальних екстремумів. Внаслідок цього, вивчаючи властивості псевдогармонічних функцій, ми фактично вивчаємо топологічні властивості гладких функцій з ізольованими особливостями на двовимірних многовидах.

Топологічна класифікація аналітичних функцій, а також їх дійсних складових – гармонічних функцій і псевдогармонічних функцій, які є топологічним узагальненням гармонічних функцій, тісно пов'язана з дослідженням шарувань на множини рівня таких функцій.

Проблеми з цього класу розглядали С. Стоїлов [54] та Г. Т. Уайберн [47], які означили поняття внутрішнього і, відповідно, легкого відкритого відображення. Означені ними класи відображень мають певні суттєві топологічні властивості аналітичних функцій.

Одночасно В. Каплан [20] досліджував одновимірні шарування на площині.

Скажемо, що неперервна функція $f : M^2 \to \mathbb{R}$ *узгоджена* з одновимірним шаруванням Δ на поверхні M^2, якщо

– кожен лист шарування Δ є зв'язною компонентою деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$;
– для кожної точки $z \in Z$ існують локальні координати (u, v) такі що $z = (0, 0)$ і $f(u, v) = u + \mathrm{const}$.

Нехай Δ є одновимірним шаруванням на просторі $\mathbb{R}^2$, всі листи якого некомпактні. Узагальнюючи старий результат Е. Камке [19], В. Каплан [20, 21] довів, що існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, узгоджена з Δ. Більш того, існує не більш ніж зліченне покриття $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ площини $\mathbb{R}^2$, таке що

(1) кожна множина S_α складається з листів шарування Δ;
(2) шарування на S_α еквівалентне шаруванню площини $\mathbb{R}^2$, або півплощини, на паралельні прямі.

Іншими словами, $\mathbb{R}^2$ склеєна зі зліченної кількості (горизонтальних) смуг вздовж відкритих інтервалів на їх межах, див Рис. 1.1.

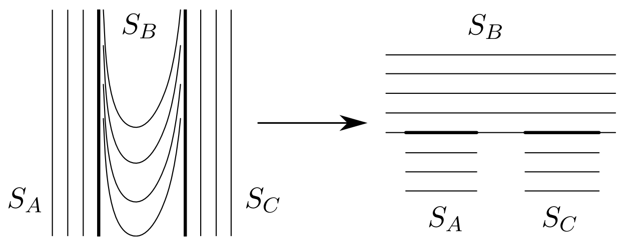

Рис. 1.1.

Однак, конструкція В. Каплана залежить від вибору інтервалів, уздовж яких проводиться склейка, і не є однозначно визначеною.

В даному огляді запропоновано канонічний спосіб розрізання на відкриті смуги довільних відкритих поверхонь наділених шаруваннями Δ з некомпактними листами, та отримано характеризацію топологічних типів замикань смуг при додаткових обмеженнях на Δ. Ми також вивчатимемо шарування на довільних відкритих двовимірних поверхнях M^2, отримані з сім'ї смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, склеєних уздовж деяких інтервалів, розташованих на межі цих смуг. Такі поверхні названо *смугастими* і ми досліджуватимемо їх комбінаторні та гомотопічні властивості.

У роботі [22] В. Каплан також довів, що існує такий гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що функція $f \circ h$ є гармонічною. Цей результат був узагальнений на шарування з особливостями у роботах В. Бутбі [5, 6], М. Морса і Дж. Дженкінса [17], М. Морса [32]. Див. також [17, 16, 18, 15, 31, 43].

У зв'язку з прогресом у теорії Гамільтонових динамічних систем з малою кількістю ступенів свободи за останні двадцять років виник інтерес до топологічної класифікації функцій на поверхнях, див. А. Фоменко та А. Болсінов [50], А. Ошемков [33], В. Шарко [42], [55], Є. Полулях і І. Юрчук [41], Є. Полулях [52].

Топологічна структура шарувань з особливостями на поверхнях, зокрема шарувань на орбіти потоків, також досліджувалась у наступних роботах: А. Андронов та Л. Понтрягін [2], М. Пейксото [36, 37], С. Арансон і В. Грінес [48, 49], І. Бронштейн та І. Ніколаєв [7], С. Арансон, Є. Жужома і В. Медвєдєв [4], Л. Плахта [38, 39, 40], А. Ошемков і В. Шарко [34], С. Арансон, В. Грінес і В. Кайманович [3], М. Фарбер [13], Н. Будницька та О. Пришляк [9], Н. Будницька і Т. Рибалкіна [10] і багатьох інших.

Отримані результати можна застосувати до шарувань з особливостями, які не мають компактних регулярних шарів, що задані на поверхнях, вилучаючи сингулярності.

2. Попередні відомості

2.1. **Спеціальні точки просторів, що не є хаусдорфовими.** В цьому підрозділі Y – це топологічний простір.

Означення 2.1.1. Нехай β_y – сім'я, яка складається зі всіх околів точки $y \in Y$. Множину

$$\mathrm{hcl}(y) := \bigcap_{V \in \beta_y} \overline{V}$$

називатимемо *хаусдорфовим замиканням* точки y. Скажемо, що y є *спеціальною* точкою простору Y, якщо $y \neq \mathrm{hcl}(y)$. Множина всіх спеціальних точок Y буде позначатись через $\mathcal{V}$.

Зауважимо, що Y є хаусдорфовим тоді й лише тоді, коли $\mathcal{V} = \varnothing$.

Лема 2.1.2 (див. [27, Lemma 2.2]). 1) *Нехай $y, z \in Y$. Тоді включення $y \in \mathrm{hcl}(z)$ і $z \in \mathrm{hcl}(y)$ еквівалентні, проте, взагалі кажучи, $\mathrm{hcl}(y) \neq \mathrm{hcl}(z)$.*

2) *Нехай відображення $f : Y \to Z$ неперервне, а простір Z хаусдорфів. Тоді $f(\mathrm{hcl}(y)) = f(y)$ для кожного $y \in Y$.*

3) *Підпростір $Y \setminus \mathcal{V}$, що складається з неспеціальних точок, є хаусдорфовим.*

2.2. **Нехаусдорфові одновимірні многовиди.** Нехай топологічний простір Y відповідає аксіомі T_1 та кожна точка цього простору має відкритий окіл, гомеоморфний відкритій підмножині простору $[0, 1)$. Зауважимо, що Y може бути не хаусдорфовим. Тоді, як звичайно, множину точок, що мають відкритий окіл, гомеоморфний до $(0, 1)$ позначимо $\mathrm{Int}\, Y$ і назвемо *внутрішністю* Y, а доповнення до цієї множини $\partial Y := Y \setminus \mathrm{Int}\, Y$ буде називатися *межею* Y.

Лема 2.2.1 (див. [27, Lemma 2.3]). *Припустимо, що множина $\mathcal{V}$ спеціальних точок Y є локально скінченною і кожна компонента зв'язності доповнення $Y \setminus \mathcal{V}$ має зліченну базу топології. Тоді кожна компонента зв'язності W множини $Y \setminus \mathcal{V}$ є відкритою в Y і гомеоморфна одній з наступних множин: $[0, 1)$, $(0, 1)$, $[0, 1]$, S^1. Якщо має місце один з двох останніх випадків, тобто W є компактом, то W є компонентою зв'язності простору Y.*

2.3. **Розбиття і фактор-простори.** Розглянемо розбиття Δ топологічного простору X. Нехай $Y = X/\Delta$ є фактор-простором, а $p : X \to Y$

є відображенням проєкції. Наділимо Y *фактор-топологією*, так що підмножина $V \subset Y$ відкрита тоді й тільки тоді, коли її повний прообраз $p^{-1}(V)$ є відкритим у X.

Насиченням $S(U)$ підмножини $U \subset X$ відносно Δ є об'єднання всіх $\omega \in \Delta$, таких що $\omega \cap U \neq \varnothing$. Іншими словами, $S(U) = p^{-1}(p(U))$. Підмножина U називається *насиченою*, якщо $U = S(U)$.

Означення 2.3.1. Елемент $\omega \in \Delta$ назвемо *спеціальним*, якщо його образ $y = p(\omega) \in Y$ є спеціальною точкою простору Y, тобто

$$\{y\} \neq \mathrm{hcl}(y) := \bigcap_{V \in \beta_y} \overline{V},$$

де β_y – база околів точки y, див. Означення 2.1.1.

Позначимо

$$\mathrm{hcl}(\omega) = \bigcap_{N(\omega)} \overline{S\left(N(\omega)\right)}, \qquad \mathrm{hcl}_S(\omega) = \bigcap_{N_S(\omega)} \overline{N_S(\omega)},$$

де $N(\omega)$ пробігає *всі відкриті* околи множини ω і $N_S(\omega)$ пробігає *всі насичені відкриті* околи множини ω.

Лема 2.3.2 (див. [27, Lemma 3.5])**.** *Нехай $\omega \in \Delta$ і $y = p(\omega)$. Тоді*

$$\mathrm{hcl}(\omega) \ \subset\ \mathrm{hcl}_S(\omega) \ \subset\ p^{-1}(\mathrm{hcl}(y)).$$

Якщо відображення p відкрите, то

$$\mathrm{hcl}(\omega) = \mathrm{hcl}_S(\omega) = p^{-1}(\mathrm{hcl}(y)), \qquad p(\mathrm{hcl}_S(\omega)) = \mathrm{hcl}(y).$$

2.4. **Шарування.** Нехай M^n, $n \geq 1$, – n-вимірний топологічний многовид. Позначимо $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$.

Означення 2.4.1. Нехай $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. *Листовою картою* на M^n вимірності k (ковимірності $n-k$) називається пара (U, φ), де підмножина $U \subset M^n$ відкрита і $\varphi : U \to (0,1)^k \times B^{n-k}$ є гомеоморфізмом. Тут B^{n-k} – деяка відкрита підмножина $\mathbb{R}^{n-k}_+$. Множини

$$P_y = \varphi^{-1}\big((0,1)^k \times \{y\}\big),\ y \in B^{n-k},$$

називаються *пластинками* цієї листової карти.

Означення 2.4.2. Нехай $\Delta = \{\omega_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ – розбиття простору M^n на лінійно зв'язні підмножини ω_α. Припустимо, що M^n допускає атлас $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$, який складається з листових карт вимірності k, такий що для кожної пари індексів $\alpha \in A$ та $i \in \Lambda$, кожна компонента лінійної зв'язності перетину $\omega_\alpha \cap U_i$ є пластинкою. Тоді Δ називається *k-вимірним шаруванням на M^n* (*шаруванням ковимірності $n-k$*) а $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ називається *листовим атласом, асоційованим з* Δ. Кожна множина ω_α називається *листом* шарування, а пара (M^n, Δ) називається *листовим многовидом.*

Означення 2.4.3. Гомеоморфізм $h : M_1^n \to M_2^n$ листових многовидів (M_1^n, Δ_1) і (M_2^n, Δ_2) будемо називати *листовим гомеоморфізмом*, якщо він відображає листи шарування Δ_1 на листи Δ_2.

2.5. **Вінцеві добутки.** Нехай N, H – групи, $\phi : H \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Grp}}(N)$ – гомоморфізм. Покладемо $\phi_h = \phi(h) \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Grp}}(N)$, $h \in H$.

Розглянемо декартів добуток множин $N \times H$ і задамо на ньому бінарну операцію, яку означимо за допомогою рівності

$$(n_1, h_1) \cdot_\phi (n_2, h_2) = (\phi_{h_2}(n_1) \cdot n_2,\ h_1 \cdot h_2) \tag{2.1}$$

для всіх (n_1, h_1), $(n_2, h_2) \in N \times H$. Відомо, що $(N \times H, \cdot_\phi)$ є групою з нейтральним елементом (e_N, e_H).

Означення 2.5.1. Група $(N \times H, \cdot_\phi)$ називається *напівпрямим добутком* груп N та H і позначається $N \rtimes_\phi H$.

Зауважимо, що існує природний сюр'єктивний гомоморфізм

$$p : N \rtimes_\phi H \to H, \quad p(n, h) = h,$$

з ядром $N \cong N \times e_H$. Отже, N є нормальною підгрупою $N \rtimes_\phi H$. Більш того, відомо (див. [1, Твердження 5.10]) що коротка точна послідовність

$$0 \to N \to N \rtimes_\phi H \xrightarrow{p} H \to 0 \tag{2.2}$$

має розтин, тобто існує гомоморфізм $s : H \to N \rtimes_\phi H$, $s(h) = (e_N, h)$, такий що $p \circ s = \mathrm{id}_H$.

Розглянемо тепер групи K, H, множину Ω, а також дію групи H на множині Ω, тобто гомоморфізм $\phi : H \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(\Omega)$. Тут $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(\Omega)$ – група бієктивних відображень множини Ω на себе з операцією композиції відображень (її ще називають групою перестановок множини Ω). Покладемо $\phi_h = \phi(h) \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(\Omega)$, $h \in H$.

Розглянемо групу $N = \prod_{\omega \in \Omega} K_\omega$, $K_\omega = K$ для всіх $\omega \in \Omega$, елементами якої є набори $(k_\omega)_{\omega \in \Omega}$. Операція множення на N визначено покоординатно, $(k_\omega) \cdot (l_\omega) = (k_\omega \cdot l_\omega)$. Безпосередня перевірка показує, що дія ϕ породжує гомоморфізм $\bar{\phi} : H \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Grp}}(N)$, $\bar{\phi} : h \mapsto \bar{\phi}_h$, $h \in H$, за допомогою співвідношення

$$\bar{\phi}_h((k_\omega)) = (k_{\phi_h(\omega)}), \quad h \in H, \quad (k_\omega) \in N,$$

тобто $\bar{\phi}_h$ ставить у відповідність елементу $h \in H$ гомоморфізм N, який переставляє координати $(k_\omega) \in N$ за допомогою перестановки індексів ϕ_h.

Означення 2.5.2. Група $N \rtimes_{\bar{\phi}} H$ називається *(необмеженим) вінцевим добутком* груп K та H і позначається $K \wr_{\phi} H$. Нормальна підгрупа N вінцевого добутку називається його *базою.*

Зі сказаного вище слідує, що коротка точна послідовність

$$0 \to N \to K \wr_{\phi} H \xrightarrow{p} H \to 0 \tag{2.3}$$

має розтин.

Розглянемо один окремий випадок. Візьмемо в якості множини Ω групу H і означимо дію $\phi : H \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(H)$ за допомогою співвідношення

$$\phi_h(t) = h \cdot t\,, \quad h, t \in H\,. \tag{2.4}$$

Означення 2.5.3. Група $K \wr_{\phi} H$, побудована за дією (2.4), називається *регулярним (необмеженим) вінцевим добутком* груп K та H і позначається $K \wr H$.

2.6. **Класи груп $\mathcal{W}$ і $\mathcal{W}'$.** Зараз за допомогою прямих добутків і регулярних необмежених вінцевих добутків ми означимо два класи груп, тісно пов'язані з групами орієнтованих гомеотопій смугастих поверхонь, див. Теорему 6.6.8.

Означення 2.6.1. Клас груп $\mathcal{W}$, це мінімальний клас груп, що відповідає наступним умовам:

(1) $\{1\} \in \mathcal{W}$;
(2) якщо $A_i \in \mathcal{W}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то й $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{W}$;
(3) якщо $A \in \mathcal{W}$, то $A \wr \mathbb{Z} \in \mathcal{W}$.

Виявляється, що клас $\mathcal{W}$ можна побудувати за допомогою операцій прямого добутку груп і вінцевого добутку з групою $\mathbb{Z}$, стартуючи з одиничної групи $\{1\}$.

Для цієї мети розглянемо дві відповідності на класах груп.

Нехай $\mathcal{A}$ – якийсь набір груп. Скажемо, що група B отримана з груп набору $\mathcal{A}$ за допомогою *елементарної операції*, якщо виконується одна з двох умов:

(а) $B = A \wr \mathbb{Z}$ для групи $A \in \mathcal{A}$;
(б) $B = \prod_{i=1}^{m} A_i$ для деякого $m \in \mathbb{N}$ і $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$.

Позначимо через θ правило, яке ставить у відповідність набору груп $\mathcal{A}$ набір груп

$$\theta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\text{групи, отримані з } \mathcal{A} \text{ за допомогою елементарної операції}\}.$$

Тоді для кожного набору груп $\mathcal{A}$ маємо неспадний ланцюжок

$$\mathcal{A} \subset \theta(\mathcal{A}) \subset \theta^2(\mathcal{A}) = \theta(\theta(\mathcal{A})) \subset \cdots \subset \theta^n(\mathcal{A}) = \theta(\theta^{n-1}(\mathcal{A})) \subset \cdots$$

Позначимо через Θ правило, яке ставить набору $\mathcal{A}$ у відповідність набір груп

$$\Theta(\mathcal{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \theta^n(\mathcal{A}).$$

Неформально можна сказати, що кожна група $B \in \Theta(\mathcal{A})$ отримана з груп набору $\mathcal{A}$ за допомогою композиції скінченного (невід'ємного) числа елементарних операцій. Запис групи B у вигляді такої композиції будемо позначати $\xi_{\mathcal{A}}(B)$ та назвемо *представленням групи B над $\mathcal{A}$ за допомогою елементарних операцій.* Зрозуміло, що таке представлення може бути не єдине. Наприклад, якщо $\mathcal{A} = \{\{1\}\}$, маємо

$$\mathbb{Z} \;\cong\; \{1\}\wr\mathbb{Z} \;\cong\; \{1\}\times(\{1\}\wr\mathbb{Z}) \;\cong\; (\{1\}\times\{1\}\times\{1\})\wr\mathbb{Z}.$$

Позначимо через Φ правило, яке ставить у відповідність набору груп $\mathcal{A}$ набір

$$\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\cup\left\{\prod\nolimits_{i\in\mathbb{N}} A_i \;\middle|\; A_i\in\mathcal{A},\ i\in\mathbb{N}\right\}.$$

Нехай ще $\mathcal{I} = \Phi\circ\Theta$. Тоді

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \Theta(\mathcal{A})\cup\left\{\prod\nolimits_{i\in\mathbb{N}} B_i \;\middle|\; B_i\in\Theta(\mathcal{A}),\ i\in\mathbb{N}\right\}.$$

Отримаємо неспадний ланцюжок

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{I}(\mathcal{A})\subset\mathcal{I}^2(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(\mathcal{A}))\subset\cdots\subset\mathcal{I}^n(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{I}^{n-1}(\mathcal{A}))\subset\cdots$$

Позначимо

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n(\mathcal{A}).$$

Лема 2.6.2 (виправлений варіант твердження [45, Лема 4.2])**.** *Нехай $E = \{1\}$ – одинична група. Тоді $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\{E\})$.*

Нехай $\mathcal{A}$ – деяка сім'я груп. Для кожної групи $G\in\mathcal{W}(\mathcal{A})$ означимо за індукцією *висоту $h_{\mathcal{A}}(G)$ групи G відносно $\mathcal{A}$* як невід'ємне ціле число, або ∞.

(i) Нам зручно буде вважати, що $\mathcal{I}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Означимо $h_{\mathcal{A}}(A) = 0$, якщо $A\in\mathcal{A}$.

(ii) Нехай для деякого цілого $n\geq 0$ вже означено висоту $h_{\mathcal{A}}(A)$ для всіх $A\in\mathcal{I}^m(\mathcal{A})$, $0\leq m\leq n$. Означимо $h_{\mathcal{A}}(B)$ для всіх

$$B\in\mathcal{I}^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{I}^n(\mathcal{A})).$$

Нехай $B\in\Theta(\mathcal{I}^n(\mathcal{A}))$. Для кожного представлення $\xi_{\mathcal{I}^n(\mathcal{A})}(B)$ означимо *висоту* $\widetilde{h}$ цього *представлення над* $\mathcal{A}$ індуктивно за допомогою правил:

(1) $\widetilde{h}(A) = h_{\mathcal{A}}(A)$, якщо $A\in\mathcal{I}^n(\mathcal{A})$;

(2) $\widetilde{h}(A\wr\mathbb{Z}) = 1+\widetilde{h}(A)$, якщо $A\wr\mathbb{Z}\notin\mathcal{I}^n(\mathcal{A})$;

(3) $\widetilde{h}\left(\prod_{i=1}^k A_i\right) = 1 + \max_i \widetilde{h}(A_i)$, якщо $\prod_{i=1}^k A_i \notin \mathcal{I}^n(\mathcal{A})$.

Означимо *висоту* B як

$$h_{\mathcal{A}}(B) = \min \widetilde{h}\left(\xi_{\mathcal{I}^n(\mathcal{A})}(B)\right),$$

де мінімум береться по всім представленням групи B над $\mathcal{I}^n(\mathcal{A})$ за допомогою елементарних операцій.

Нехай тепер $B \in \mathcal{I}^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{I}^n(\mathcal{A}))$. Якщо $B \in \Theta(\mathcal{I}^n(\mathcal{A}))$, висота B вже означена. В протилежному випадку існує представлення групи B у вигляді

$$\zeta_{\mathcal{I}^n(\mathcal{A})}(B) = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i\,, \quad \text{де } A_i \in \Theta(\mathcal{I}^n(\mathcal{A})) \text{ для всіх } i \in \mathbb{N}.$$

Означимо висоту цього представлення як

$$\widetilde{h}\left(\zeta_{\mathcal{I}^n(\mathcal{A})}(B)\right) = 1 + \sup_i h_{\mathcal{A}}(A_i).$$

Зауважимо, що величини $h_{\mathcal{A}}(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$, можуть бути необмежені. В такому випадку висота представлення дорівнює ∞.

Покладемо

$$h_{\mathcal{A}}(B) := \min \widetilde{h}\left(\zeta_{\mathcal{I}^n(\mathcal{A})}(B)\right),$$

де мінімум береться по всім представленням групи B такого виду.

Означення 2.6.3. Визначимо такі два класи груп:

$$\mathcal{W}'(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{W}(\mathcal{A}) \mid h_{\mathcal{A}}(B) < \infty\}, \qquad \mathcal{W}' = \mathcal{W}'(\{E\}),$$

де $E = \{1\}$ – одинична група.

2.7. **Фундаментальний групоїд.** У цьому підрозділі ми будемо користуватися базовими поняттями теорії категорій (див., наприклад [24] або [23]).

Нагадаємо, що категорія $\mathcal{A}$ називається *малою*, якщо клас її морфізмів $\operatorname{Mor}\mathcal{A}$ є множиною. Зрозуміло, що тоді її клас об'єктів $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ також буде множиною.

Означення 2.7.1. *Групоїд* – це мала категорія $\mathcal{A}$, всі морфізми якої є ізоморфізмами. Іншими словами, для довільних об'єктів $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ і морфізму $f \in \operatorname{Mor}(A, B)$ існує морфізм $g \in \operatorname{Mor}(B, A)$, такий що $g \circ f = \mathrm{id}_A$ і $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Групоїд $\mathcal{G}$, який має рівно один об'єкт $*$, має природну структуру групи. Елементами цієї групи є морфізми $\mathcal{G}$, операція – це композиція морфізмів, нейтральним елементом є одиничний морфізм id_*.

З іншого боку, кожну групу можна вважати групоїдом, що має один об'єкт. Морфізмами цього групоїда є елементи групи, а композиція морфізмів є добутком відповідних елементів групи.

Таким чином, на групоїди можна дивитись як на узагальнення груп.

Нехай X – топологічний простір, а X' – його підмножина. Нехай також $I = [0, 1]$. Розглянемо сім'ю $\mathcal{C} = C((I, \partial I), (X, X'))$ неперервних кривих, кінці яких належать до X'.

Скажемо, що криві α, $\beta \in \mathcal{C}$ еквівалентні ($\alpha \sim \beta$), якщо

(1) $\alpha(0) = \beta(0)$ і $\alpha(1) = \beta(1)$;

(2) криві α і β гомотопні відносно кінців відрізка $\partial I = \{0, 1\}$.

Клас еквівалентності кривих, представником якого є $\alpha \in \mathcal{C}$ будемо позначати $[\alpha]$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{P} = \mathcal{C}/\sim$, елементами якої є класи еквівалентності кривих з сім'ї $\mathcal{C}$.

Відомо, що відповідні елементи сім'ї $\mathcal{P}$ можно компонувати між собою так що компонування буде асоціативним.

Опишемо цю конструкцію докладніше. Нехай α, $\beta \in \mathcal{C}$ і $\alpha(1) = \beta(0)$. Тоді означимо елемент $\gamma \in \mathcal{C}$ за допомогою співвідношення

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t < 1/2, \\ \beta(2t-1), & t \geq 1/2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Класи еквівалентності $[\alpha]$, $[\beta] \in \mathcal{P}$, для яких $\alpha(1) = \beta(0)$, назвемо *компоновними*. Якщо $[\alpha]$ і $[\beta]$ компоновні, назвемо їх *добутком* елемент $[\alpha] \cdot [\beta] := [\gamma] \in \mathcal{P}$, де крива $\gamma \in \mathcal{C}$ означена за допомогою формули (2.5).

Виявляється (див. [8]), що так означене компонування має наступні властивості.

- Асоціативність: якщо для деяких $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma] \in \mathcal{P}$ виконуються рівності $\alpha(1) = \beta(0)$ і $\beta(1) = \gamma(0)$, то $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$.
- Для кожної точки $x \in X'$ існує $i_x \in \mathcal{C}$, для якого $i_x(0) = i_x(1) = x$ а також $[\alpha] \cdot [i_x] = [\alpha]$ і $[i_x] \cdot [\beta] = [\beta]$ для всіх α, $\beta \in \mathcal{C}$, для яких $\alpha(1) = \beta(0) = x$.
- Для кожного $\alpha \in \mathcal{C}$ існує $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$, таке що $[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = i_{\alpha(0)}$ і $[\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = i_{\alpha(1)}$.

Перелічені властивості дозволяють стверджувати, що наступна конструкція коректна і її результатом є групоїд.

Розглянемо малу категорію $\Pi(X, X')$ з наступними множинами об'єктів $\mathrm{Ob}\,\Pi(X, X') = X'$ і морфізмів $\mathrm{Mor}\,\Pi(X, X') = \mathcal{P}$. Для кожної пари об'єктів $x, y \in X'$ множина морфізмів з x в y має вид

$$\mathrm{Mor}\,(x, y) = \{[\alpha] \in \mathcal{P} \mid \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}.$$

Компонування (компоновних) морфізмів $[\alpha]$ і $[\beta]$ означене як їх добуток $[\alpha] \cdot [\beta]$.

Для кожного об'єкта $x \in X'$ означений одиничний морфізм $[i_x]$.

Означення 2.7.2. Групоїд $\Pi(X, X')$ називається *фундаментальним групоїдом.*

З цієї конструкції (з урахуванням зауваження про погляд на групи як на групоїди) зрозуміло, що у випадку, коли множина X' одноточкова, маємо рівність

$$\Pi(X, \{x\}) = \pi_1(X, x).$$

Отже фундаментальний групоїд є узагальненням фундаментальної групи топологічного простору X.

3. Одновимірні шарування на поверхнях

Листова поверхня – це пара (M^2, Δ), яка складається з двовимірного многовиду M^2 і одновимірного шарування Δ на M^2, такого що кожна компонента зв'язності множини ∂M^2 є листом Δ.

Якщо множина U відкрита, то через Δ_U позначатимемо індуковане шарування U, листами якого є компоненти зв'язності перетинів $\omega \cap U$ по всіх $\omega \in \Delta$.

Розглянемо множину $Y = M^2/\Delta$ всіх листів Δ і природну проекцію $\mathrm{pr} : M^2 \to M^2/\Delta$, яка ставить у відповідність кожному $z \in M^2$ лист шарування Δ, що містить z. Наділимо Y топологією фактор-простору, тобто підмножина $U \subset Y$ буде відкритою тоді й лише тоді, коли $\mathrm{pr}^{-1}(U)$ є відкритою в M^2.

Означення 3.1. *Топологічний простір Y називається* ***простором листів*** *шарування Δ.*

Відомо, що відображення проекції pr є відкритим, див. [14, Твердження 1.5] або [46, Теорема 4.10].

Лема 2.3.2 дозволяє переписати Означення 2.3.1 для листових поверхонь у такому вигляді: лист $\omega \in \Delta$ називається *спеціальним*, якщо виконується одна з наступних еквівалентних умов:

- $\omega \neq \mathrm{hcl}(\omega)$;
- $\omega \neq \mathrm{hcl}_S(\omega)$;
- $y = \mathrm{pr}(\omega)$ є спеціальною точкою Y, тобто $y \neq \mathrm{hcl}(y)$.

Означення 3.2. *Нехай $a < b \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $J = [a, b)$ або $J = (a, b)$. Нехай також $\gamma : J \to M^2$ – неперервне відображення, для якого $\gamma(J \cap \{a\}) \in \partial M^2$.*

Тоді γ називається ***розтином*** *шарування Δ, якщо відображення $\mathrm{pr}\circ\gamma : J \to M^2/\Delta$ є ін'єктивним, тобто для відмінних $u, v \in J$ їх образи $\gamma(u)$ і $\gamma(v)$ належать до відмінних листів Δ. Назвемо γ* ***локальним розтином*** *Δ, якщо відображення $\mathrm{pr}\circ\gamma : J \to M^2/\Delta$ локально ін'єктивне.*

У роботі [29] для n-вимірних многовидів, $n \geq 2$, з одновимірними шаруваннями на них була доведена одна загальна теорема, частинний випадок якої для листових поверхонь формулюється наступним чином.

Теорема 3.3 (див. [29, Теорема 2.8]). *Нехай (M^2, Δ) – зв'язна листова поверхня, яка має злічену базу і така що кожен лист шарування Δ некомпактний і є замкненою підмножиною M^2. Припустимо також, що сім'я всіх* ***спеціальних*** *листів є локально скінченною. Тоді наступні умови еквівалентні одна одній:*

(А) *відображення проекції $\mathrm{pr} : M^2 \to M^2/\Delta$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром $\mathbb{R}$ і простір M^2/Δ локально гомеоморфний $[0,1)$ (хоча він не обов'язково хаусдорфів);*

(Б) *для кожного листа ω існує відкритий насичений окіл, листово гомеоморфний $\mathbb{R}\times V$, де V – відкрита підмножина простору $[0,1)$;*

(В) *через кожен лист шарування Δ проходить деякий розтин.*

Означення 3.4. *Назвемо лист $\omega \subset \mathrm{Int}\, M^2$* ***регулярним***, *якщо існує його насичений окіл U, такий що пара $(\overline{U}, U)$ листово гомеоморфна парі $\big(\mathbb{R}\times[-1,1], \mathbb{R}\times(-1,1)\big)$, причому листовий гомеоморфізм відображає ω на $\mathbb{R}\times 0$.*

Аналогічно, лист $\omega \subset \partial M^2$ називається ***регулярним*** *якщо існує його насичений окіл U такий що пара $(\overline{U}, U)$ листово гомеоморфна парі $\big(\mathbb{R}\times[0,1], \mathbb{R}\times[0,1)\big)$ і листовий гомеоморфізм відображає ω на $\mathbb{R}\times 0$.*

Листи, що не є регулярними, будемо називати ***сингулярними***.

Позначимо через $\mathrm{Spec}(\Delta)$ і $\mathrm{Sing}(\Delta)$ сукупності всіх спеціальних і, відповідно, сингулярних листів шарування Δ.

Лема 3.5 (див. [26, Лема 2.6]). *Регулярний лист не є спеціальним. Іншими словами, кожен спеціальний лист є сингулярним, тобто*

$$\mathrm{Spec}(\Delta) \subset \mathrm{Sing}(\Delta).$$

Важливу роль при характеризації смугастих поверхонь відіграє наступна теорема про розрізання листової поверхні уздовж ізольованих листів.

Означення 3.6. *Нехай* (M^2, Δ) *– листова поверхня. Лист* ω *називається* ***ізольованим****, якщо для кожного* $z \in \omega$ *існує листова карта (див. Означення 2.4.1), яка містить цю точку і перетинає* ω *по дузі. Іншими словами, існують відкритий окіл* W *точки* z *і вкладення* $\phi : (-1,1) \times (-1,1) \to M^2$*, такі що*

- $\phi\big((-1,1) \times (-1,1)\big) = W$,
- $\phi^{-1}(\omega) = (-1,1) \times 0$,
- $\phi(-1,1) \times t$ *міститься в деякому листі шарування* Δ *при кожному* $t \in (-1,1)$.

Теорема 3.7 (див. [26, Теорема 3.2])**.** *Нехай* (M^2, Δ) *– листова поверхня, а* $\Sigma \subset \operatorname{Int} M^2$ *– локально скінченна сім'я, яка складається з ізольованих листів. Тоді існують листова поверхня* $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta})$ *і неперервне відображення* $p : \widetilde{M} \to M^2$*, які відповідають наступним властивостям.*

(1) p *є відображенням проекції, тобто підмножина* $A \subset M^2$ *відкрита тоді й лише тоді, коли* $p^{-1}(A)$ *відкрита в* $\widetilde{M}$*;*
(2) *обмеження* $p : \widetilde{M} \setminus p^{-1}(\Sigma) \to M^2 \setminus \Sigma$ *є листовим гомеоморфізмом;*
(3) *для кожного листа* $\omega \in \Sigma$ *його прообраз* $p^{-1}(\omega)$ *складається з двох листів* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \subset \partial\widetilde{M}$ *шарування* $\widetilde{\Delta}$*, причому відображення* $p|_{\widetilde{\omega}_i} : \widetilde{\omega}_i \to \omega$*,* $i = 1, 2$*, є гомеоморфізмами.*

4. Смугасті поверхні

Означення 4.1. *Підмножину* $S \subset \mathbb{R}^2$ *назвемо* ***модельною смугою*** *якщо існують такі* $u < v \in \mathbb{R}$*, що*

(1) $\mathbb{R} \times (u,v) \ \subset \ S \ \subset \ \mathbb{R} \times [u,v]$*;*
(2) S *є відкритою підмножиною простору* $\mathbb{R} \times [u,v]$*.*

Для такої смуги будемо використовувати наступні позначення:

$$\partial_- S := S \ \cap \ \mathbb{R} \times \{u\}, \qquad \partial_+ S := S \ \cap \ \mathbb{R} \times \{v\},$$
$$\partial S := \partial_- S \ \cup \ \partial_+ S, \qquad \operatorname{Int} S := \mathbb{R} \times (u,v).$$

Відмітимо, що межа ∂S відкрита в просторі $\mathbb{R} \times \{u, v\}$, отже вона є незв'язним об'єднанням не більш ніж зліченної сім'ї відкритих (можливо, необмежених) інтервалів.

Назвемо множини $\partial_- S$ та $\partial_+ S$ *берегами* модельної смуги S. Компоненти зв'язності множини $\partial_- S$ (відповідно, $\partial_+ S$) назвемо *нижніми* (відповідно, *верхніми*) *межовими інтервалами.*

4.2. **Смугастий атлас.** Нехай зафіксовано деяку не більш ніж зліченну множину індексів $\mathbf{A}$ та набір модельних смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$. Припустимо також, що для деякої множини індексів $\mathbf{B}$

– задано дві неперетинні сім'ї $\{X_\beta\}_{\beta\in\mathbf{B}}$ та $\{Y_\beta\}_{\beta\in\mathbf{B}}$, які складаються з попарно різних межових інтервалів смуг з сім'ї $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, і індексовані однією і тією ж множиною $\mathbf{B}$;
– для кожного $\beta\in\mathbf{B}$ зафіксовано гомеоморфізм $\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta$.

Розглянемо фактор-простір

$$M^2 = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha \Big/ \{Y_\beta \overset{\phi_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta\in\mathbf{B}}\ , \tag{4.1}$$

де $Z = \bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha$ є незв'язним об'єднанням модельних смуг. Таким чином, M^2 отримано з сім'ї модельних смуг шляхом ототожнення деяких пар межових інтервалів за допомогою гомеоморфізмів.

При цьому дозволяється, щоб дві смуги склеювались уздовж більш ніж однієї пари межових компонент. Можливо також склеювати пару інтервалів, що належать до межі однієї смуги S, навіть за умови, що вони одночасно лежать на нижній або на верхній частині межі ∂S.

Розглянемо також відображення проекції

$$q : Z = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha \longrightarrow M^2\,. \tag{4.2}$$

Елементарна перевірка показує, що M^2 є некомпактним двовимірним многовидом, який може бути незв'язним, неорієнтовним і мати нетривіальну межу. Кожна зв'язна компонента межі ∂M^2 є інтервалом. Зауважимо також, що за означенням проекції підмножина $U\subset M^2$ є відкритою тоді і лише тоді, коли $q^{-1}(U)$ відкрита в $\bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha$.

Для кожного $\alpha\in\mathbf{A}$ нехай

$$\xi_\alpha : S_\alpha \hookrightarrow Z = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha \xrightarrow{q} M^2$$

є композицією включення S_α у $\bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha$ і проекції q. Назвемо ξ_α *картою*, яка відповідає S_α.

Відмітимо, що кожна модельна смуга S допускає одновимірне шарування Δ_S, листами якого є зв'язні компоненти ∂S і горизонтальні прямі $\mathbb{R}\times\{t\}$, $t\in(-1,1)$.

У більш широкому загалі, нехай поверхню M^2 отримано з сім'ї модельних смуг за допомогою співвідношення (4.1). Оскільки її смуги склеєні за допомогою гомеоморфізмів листів, шарування на смугах M^2 породжують шарування Δ_q на M^2, яке ми назвемо *канонічним*.

Означення 4.2.1. Нехай X_β і Y_β – межові інтервали і $\phi_\beta : X_\beta \to Y_\beta$ – гомеоморфізм, за допомогою якого відбувається їх склеювання. Назвемо *швом* лист $\omega = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ канонічного шарування, отриманий в результаті цієї операції.

Означення 4.2.2. Будемо говорити, що співвідношення (4.2) задає *смугастий атлас* на листовій поверхні (M^2, Δ_q).

Означення 4.2.3. Будемо також казати, що листова поверхня (M^2, Δ) є *смугастою поверхнею*, якщо шарування Δ є канонічним шаруванням для деякого смугастого атласу на M^2.

Іншими словами, листова поверхня (M^2, Δ) є смугастою поверхнею, якщо існують набір модельних смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$ а також набір гомеоморфізмів $\{\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta\}_{\beta\in\mathbf{B}}$, такі що M^2 відповідає співвідношенню (4.1), а шарування Δ є канонічним для цього листового атласу.

Означення 4.2.4. *Ізоморфізмом смугастих атласів* $q_1 : Z_1 \to M_1^2$ і $q_2 : Z_2 \to M_2^2$, назвемо пару листових гомеоморфізмів $h : Z_1 \to Z_2$ і $k : M_1^2 \to M_2^2$, для якої комутативна наступна діаграма.

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{h} & Z_2 \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ M_1^2 & \xrightarrow[k]{} & M_2^2 \end{array} \tag{4.3}$$

Два смугастих атласи назвемо *ізоморфними*, якщо існує їх ізоморфізм.

Дві смугасті поверхні M_1^2 і M_2^2 назвемо *еквівалентними*, якщо існують їх смугасті атласи, які є ізоморфними між собою.

Означення 4.2.5. *Автоморфізмом* смугастого атласу $q : Z \to M^2$ назвемо пару листових гомеоморфізмів $h : Z \to Z$ та $k : M^2 \to M^2$, які задають ізоморфізм смугастого атласу q з собою.

Лема 4.2.6 (див. [28, Лема 3.1]). *Нехай $Y = M^2/\Delta$ – простір листів смугастої поверхні (M^2, Δ) наділений відповідною фактор-топологією. Тоді Y є T_1-простором.*

4.3. **Стандартні шарування на циліндрі та стрічці Мебіуса.** Нехай $S = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $s = \pm 1$ і $\phi_s : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R} \times \{1\}$ – гомеоморфізм визначений за такою формулою: $\phi_s(x, 0) = (sx, 1)$. Відображення проекції $q : S \to S/\phi_s$ визначає смугастий атлас, який складається з однієї смуги. Будемо називати відповідну смугасту поверхню S/ϕ_s *стандартним відкритим циліндром*, якщо $s = +1$, і *стандартною стрічкою Мебіуса* у випадку $s = -1$.

4.4. **Типи листів канонічного шарування.** Розглянемо смугастий атлас (4.2). Тоді легко бачити, що кожен лист ω асоційованого канонічного шарування Δ відповідає рівно одному з наступних типів:

(a) $\omega \subset q(\operatorname{Int} S_\alpha)$ для деякого $\alpha \in \mathbf{A}$.

(b) $\omega \subset q(\partial_\sigma S_\alpha) \subset \partial M^2$ для деякого $\alpha \in \mathbf{A}$ та $\sigma \in \{-,+\}$. У цьому випадку ω називається *межовим* листом. Цей тип в свою чергу ділиться на такі підтипи:

- (b1) $\omega = q(\partial_\sigma S_\alpha)$, отже $\partial_\sigma S_\alpha$ складається з єдиного листа;
- (b2) $\omega \subsetneq q(\partial_\sigma S_\alpha)$, тому $\partial_\sigma S_\alpha$ містить більше одного листа.

(c) $\omega = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$, де $X_\beta \subset \partial_\sigma S_\alpha$, $Y_\beta \subset \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$ для певних $\alpha, \alpha' \in \mathbf{A}$, а також $\sigma, \sigma' \in \{-,+\}$. Листи даного типу є в точності *швами* і він також розпадається на такі підтипи:

- (c1) $\alpha = \alpha'$, $X_\beta = \partial_\sigma S_\alpha$ і $Y_\beta = \partial_{\sigma'} S_\alpha$, отже $\sigma' = -\sigma$ і ми склеюємо різні сторони однієї смуги S_α і кожна зі сторін складається з єдиного межового інтервалу;
- (c2) $\alpha \neq \alpha'$, $X_\beta = \partial_\sigma S_\alpha$, і $Y_\beta = \partial_{\sigma'} S_\alpha$;
- (c3) $X_\beta \neq \partial_\sigma S_\alpha$ або $Y_\beta \neq \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$. У цьому випадку ω називається *особливим* листом. Цей тип ділиться на такі підтипи:
  - (c31) $\alpha = \alpha'$, $\sigma' = \sigma$, і $X_\beta \cup Y_\beta = \partial_\sigma S_\alpha$;
  - (c32) $\alpha = \alpha'$, $\sigma' = \sigma$, і $X_\beta \cup Y_\beta \neq \partial_\sigma S_\alpha$;
  - (c33) всі інші можливості.

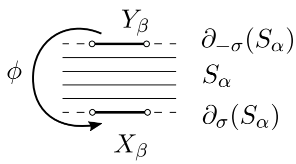

Рис. 4.1. Тип (c1) ($\alpha' = \alpha$, $\sigma' = -\sigma$)

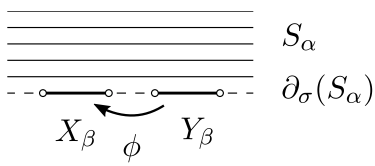

Рис. 4.2. Типи (c31) та (c32) ($\alpha' = \alpha$, $\sigma' = \sigma$)

Отже, типи (c31) і (c32) відповідають склеюванню межових інтервалів, які належать одній стороні спільної смуги.

Наступна лема характеризує спеціальні, регулярні й сингулярні листи канонічних шарувань смугастих поверхонь за допомогою типів (a)–(c). Зокрема, вона показує, що різниця між сингулярними і спеціальними листами канонічного шарування – це листи типу (c31). Доведення леми зводиться до простої безпосередньої перевірки.

Лема 4.4.1 (див. [26, Лема 2.7]). *Нехай* $q : \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha \to M^2$ *– смугастий атлас, і* Δ *– канонічне шарування на* M^2*. Тоді виконуються наступні твердження.*

(1) *Лист* $\omega \in \Delta$ *є* ***спеціальним****, тобто* $\omega \neq \mathrm{hcl}(\omega)$*, тоді й тільки тоді, коли він належить одному з типів* (b2), (c32)*, або* (c33).

(2) *Для довільного листа* $\omega \in \Delta$ *наступні властивості еквівалентні:*
   - (i) $\omega \in \Delta$ ***допускає розтин****;*
   - (ii) $\omega \in \Delta$ *має відкритий насичений окіл, листово гомеоморфний* $\mathbb{R} \times V$*, де* V *– відкрита підмножина* $[0, 1)$*;*
   - (iii) ω *не належить до типів* (c31) *і* (c32).

(3) *Лист* $\omega \in \Delta$ *є* ***регулярним****, див. Означення 3.4, тоді й лише тоді, коли він має один з типів* (a), (b1), (c1)*, або* (c2).

(4) *Відповідно, лист* $\omega \in \Delta$ *є* ***сингулярним*** *тоді й тільки тоді, коли він належить до типів* (b2), (c31), (c32) *або* (c33).

Лема 4.4.2 (див. [28, Лема 3.5]). *Якщо* M^2 *зв'язна і має лист типу* (c1)*, то вона листово гомеоморфна одній з поверхонь* C *або* M*.*

Означення 4.4.3. Смугастий атлас q, що не містить листів типів (c1) і (c2), назвемо *зведеним.*

Теорема 4.4.4 (див. [28, Теорема 3.7]). *Кожна зв'язна смугаста поверхня* M^2 *зі зліченною базою листово гомеоморфна циліндру* C*, стрічці Мебіуса* M*, або зведеній поверхні.*

Позначимо

$$D = q\Big(\bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} \partial S_\alpha\Big)\,. \tag{4.4}$$

Лема 4.4.5 (див. також [30, Лема 7.2]). *Сім'ї* $\mathrm{Spec}(\Delta)$*,* $\mathrm{Sing}(\Delta)$*,* ∂M^2 *і* D *є локально скінченними, причому*

$$\mathrm{Spec}(\Delta) \subset \mathrm{Sing}(\Delta), \qquad\qquad \partial M^2 \cup \mathrm{Sing}(\Delta) \subset D.$$

Більш того, смугастий атлас q *є зведеним тоді й лише тоді, коли*

$$\partial M^2 \cup \mathrm{Sing}(\Delta) = D.$$

Зауваження 4.4.6. Кожен смугастий атлас (4.2) породжує розбиття поверхні M^2 на смуги $\{\xi_\alpha(S_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$. Рівність $\partial M^2 \cup \mathrm{Sing}(\Delta) = D$ з попередньої леми дозволяє довести наступне: *довільні два зведені атласи породжують одне й те саме розбиття смугастої поверхні на смуги, отже таке розбиття не залежить від вибору зведеного атласу і є властивістю шарування.*

Лема 4.4.7 (див. [26, Лема 2.11])**.** *Припустимо, що кожен лист шарування Δ допускає розтин, а отже відповідає кожній з еквівалентних умов* (A)-(B) *теореми 3.3. Якщо атлас q є зведеним, то для листа $\omega \subset \mathrm{Int}\, M^2$ наступні умови є еквівалентними:*

(i) *ω має тип* (c33)*;*
(ii) *ω є спеціальним, тобто $\omega \neq \mathrm{hcl}(\omega)$;*
(iii) *ω є сингулярним;*
(iv) *ω має тип* (c)*, отже $\omega = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$.*

Якщо додатково кожен сингулярний лист міститься в ∂M^2, то відсутні листи типу (c)*, отже q є гомеоморфізмом і M^2 є незв'язним об'єднанням смуг.*

5. Характеризація смугастих поверхонь

В цьому розділі ми будемо вважати, що (M^2, Δ) – *листова поверхня із зліченою базою, а кожен лист шарування Δ гомеоморфний $\mathbb{R}$ і є замкненою підмножиною в M^2*. Нехай також $\mathrm{Spec}(\Delta)$ і $\mathrm{Sing}(\Delta)$ – сім'ї всіх спеціальних і, відповідно, сингулярних листів шарування Δ.

Наступне твердження характеризує смугасті поверхні, що не мають листів типів (c31) та (c32).

Теорема 5.1 (див. [30, Теорема 7.4])**.** *Наступні умови еквівалентні:*

(1) *(M^2, Δ) допускає смугастий атлас, який не має листів типів* (c31) *та* (c32)*;*
(2) *Сім'я $\mathrm{Spec}(\Delta)$ є локально скінченною, а шарування Δ задовольняє кожну з еквівалентних умов* (A)-(B) *теореми 3.3.*

Наступне розширення Теореми 5.1 дозволяє обмежитись перевіркою існування розтинів тільки для листів шарування, які лежать у внутрішності M^2.

Теорема 5.2 (див. [26, Теорема 4.2])**.** *Нехай сім'я $\mathrm{Sing}(\Delta)$ є локально скінченною, а також кожен лист шарування Δ, який міститься в $\mathrm{Int}\, M^2$ допускає розтин. Тоді кожен лист, що лежить в ∂M^2, також допускає розтин. Тому, згідно з теоремою 5.1, (M^2, Δ) є смугастою поверхнею.*

Теорема 5.3 (див. [26, Теорема 4.3])**.** *Припустимо, що M^2 є зв'язною, сім'я* $\mathrm{Sing}(\Delta)$ *є локально скінченною і* $\mathrm{Sing}(\Delta) \subset \partial M^2$. *Тоді M^2 листово гомеоморфна або стандартному циліндру, або стандартній стрічці Мебіуса, або смузі з канонічним шаруванням на ній.*

Наступна теорема характеризує всі смугасті поверхні і виводиться з двох попередніх тверджень за допомогою теореми 3.7.

Теорема 5.4 (див. [26, Теорема 4.4])**.** *Наступні умови еквівалентні:*
(1) (M^2, Δ) *допускає смугастий атлас;*
(2) *сім'я* $\mathrm{Sing}(\Delta)$, *що складається зі всіх* ***сингулярних*** *листів, є локально скінченною.*

6. Інваріанти смугастих поверхонь

6.1. **Група гомеоморфізмів, які зберігають шарування Δ_q.** Нехай (M^2, Δ_q) – смугаста поверхня. Позначимо через $\mathcal{H}(\Delta_q)$ групу листових гомеоморфізмів поверхні M^2, тобто таких гомеоморфізмів, що для кожного $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$ і кожного листа $\omega \in \Delta_q$ образ $h(\omega)$ також є листом Δ_q.

Наділимо $\mathcal{H}(\Delta_q)$ відповідною компактно-відкритою топологією. Нехай $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ позначає компоненту лінійної зв'язності одиниці групи $\mathcal{H}(\Delta_q)$, тобто $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ складається з гомеоморфізмів $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$, які ізотопні в $\mathcal{H}(\Delta_q)$ до id_{M^2}.

Тоді $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ є нормальною підгрупою групи $\mathcal{H}(\Delta_q)$ і можна ототожнити фактор-групу $\mathcal{H}(\Delta_q)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ з множиною $\pi_0\mathcal{H}(\Delta_q)$ всіх компонент лінійної зв'язності $\mathcal{H}(\Delta_q)$, тобто

$$\pi_0\mathcal{H}(\Delta_q) = \mathcal{H}(\Delta_q)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q).$$

Назвемо цю групу *групою гомеотопій* шарування Δ_q.

Нехай також $\mathcal{H}'_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ – підгрупа групи $\mathcal{H}(\Delta_q)$, яка складається з гомеоморфізмів h, таких що $h(\omega) = \omega$ для кожного листа шарування Δ_q, а індуковане відображення $h|_\omega : \omega \to \omega$ зберігає орієнтацію.

Нехай $\Sigma(\Delta_q)$ – об'єднання листів типів (b) і (c3). Тоді очевидно, що $h(\Sigma(\Delta_q)) = \Sigma(\Delta_q)$ для кожного $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли M^2 є модельною смугою.

Лема 6.1.1 (див. [28, Лема 4.1])**.** *Нехай $S \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$ – модельна смуга і $g \in \mathcal{H}(\Delta_S)$. Тоді*

$$g(x, y) = \big(\lambda(x, y),\ \mu(y)\big), \tag{6.1}$$

де $\mu : [-1,1] \to [-1,1]$ *– гомеоморфізм, а* $\lambda : S \to \mathbb{R}$ *– неперервна функція, така що для кожного* $y \in (-1,1)$ *відповідність* $x \mapsto \lambda(x,y)$ *є гомеоморфізмом* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

Лема 6.1.2 (див. [28, Лема 4.2]). *Нехай* $\widehat{S} \subset M^2$ *– смуга, яка містить листи з* $\Sigma(\Delta_q)$*, а відображення* $\xi : S \to \widehat{S}$ *задає відповідну карту, де* S *– модельна смуга з атласу* M^2*. Нехай також* $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$*. Якщо* $h(\widehat{S}) = \widehat{S}$*, то* h *підіймається до гомеоморфізму* $g : S \to S$ *модельної смуги* S*, такого, що* $\xi \circ g = h \circ \xi$*.*

Лема 6.1.3 (див. [28, Лема 4.3]). *Група* $\mathcal{H}'_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ *є стягуваною.*

Теорема 6.1.4 (див. [28, Теорема 4.4]). *Нехай* M^2 *– зв'язнв зведенв смугаств поверхня і* $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$*. При цих умовах* $h \in \mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються три наступні умови:*

(a) $h(\widehat{S}_\alpha) = \widehat{S}_\alpha$ *для всіх* $\widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(S_\alpha)$*,* $\alpha \in \mathbf{A}$*;*

(b) *якщо* $g_\alpha : S_\alpha \to S_\alpha$*,* $g(x,y) = \big(\lambda(x,y),\ \mu(y)\big)$*,* $\alpha \in \mathbf{A}$*, є единим підняттям* $h|_{\widehat{S}_\alpha}$ *виду* (6.1)*, то* μ *зростає і* $\lambda(x,y)$ *також зростає для кожного фіксованого* $y \in (-1,1)$*.*

(c) h *лишає інваріантним кожен лист* $\omega \subset \Sigma(\Delta_q)$ *і зберігає його орієнтацію.*

Більш того, $\mathcal{H}'_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ *є строгим деформаційним ретрактом* $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ *і, зокрема,* $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ *також стягувана.*

6.2. **Спрощений граф смугастої поверхні.** Нехай (M^2, Δ_q) – смугаста поверхня, на якій зафіксовано смугастий атлас (4.2). Поставимо у відповідність цьому атласу абстрактний граф G визначений так, як описано нижче.

Вершинами G вважатимемо елементи множини $\mathbf{A}$, яка індексує модельні смуги в атласі (4.2). *Ребрами* G назвемо елементи множини $\mathbf{B}$, яка індексує шви цього атласу. Кожному шву $\omega_\beta = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$, $\beta \in \mathbf{B}$, поставимо у відповідність ребро графа G наступним чином: якщо $X_\beta \subset S_{\alpha'}$, $Y_\beta \subset S_{\alpha''}$, то відповідне ребро β буде з'єднувати вершини α' і α'' (інакше кажучи, воно буде *інцидентне* цим вершинам).

Зауваження 4.4.6 дозволяє стверджувати, що для довільних двох зведених атласів смугастої поверхні їх графи ізоморфні. Отже, граф G зведеного атласу смугастої поверхні є її комбінаторним інваріантом.

Означення 6.2.1. Граф G, побудований по деякому зведеному атласу смугастої поверхні (M^2, Δ_q), називається її *спрощеним (абстрактним) графом*.

На ребрах графа G можна задати *орієнтацію*: якщо $X_\beta \subset S_{\alpha'}$, а $Y_\beta \subset S_{\alpha''}$, то вершину α' назвемо *початком* ребра β, а вершину α'' – його *кінцем.* Але ця орієнтація не є канонічною і залежить від вибору атласа.

Означення 6.2.2. *Діаметром* $\operatorname{diam} G$ графа G називається мінімальне невід'ємне число d, таке що довільні дві вершини G можна з'єднати шляхом довжини не більше d, якщо таке число існує. В протилежному випадку кажуть, що $\operatorname{diam} G = \infty$.

Нагадаємо, що *порядком вершини* графа G називається кількість ребер, яким вона інцидентна. Взагалі кажучи, граф G може бути не локально скінченним, тобто може містити вершини нескінченного порядку.

6.3. **Геометрична реалізація спрощеного графу.** Маючи спрощений граф G, побудований по зведеному атласу (4.2), можна поставити йому у відповідність CW-комплекс $|G|$ виміру 1 наступним чином.

0) 0-остовом $|G|$ є множина $\mathbf{A}$ вершин графа G.
1) Нехай β – орієнтоване ребро G з початком α_1 і кінцем α_2. Розглянемо відрізок $(I_\beta, \partial I_\beta) \cong ([-1,1], \{-1,1\})$ і відображення

$$\chi_\beta : \partial I_\beta = \{-1,1\} \to \mathbf{A}, \quad \chi_\beta(-1) = \alpha_1, \quad \chi_\beta(1) = \alpha_2,$$

яке приклеює 1-клітину I_β до 0-остову.

На незв'язному об'єднанні $\mathbf{A} \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathbf{B}} I_\beta$ визначимо відношення еквівалентності:

$$\tau \sim \chi_\beta(\tau), \quad \tau \in \partial I_\beta, \beta \in \mathbf{B}$$

і нехай

$$|G| := \mathbf{A} \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathbf{B}} I_\beta \Big/ \sim$$

відповідний фактор-простір.

Означення 6.3.1. Простір $|G|$ називається *геометричною реалізацією графа G.*

Для кожного $\beta \in \mathbf{B}$ нехай

$$i_\beta : I_\beta \to \mathbf{A} \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathbf{B}} I_\beta\,,$$

– відповідне вкладення, і

$$\Theta : \mathbf{A} \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathbf{B}} I_\beta \to |G|$$

– відображення проєкції. Композиція

$$\theta_\beta = \Theta \circ i_\beta : I_\beta \to |G|$$

називається *характеристичним відображенням* одновимірної клітини I_β. Топологія на $|G|$ визначається так, що відображення $f : |G| \to X$ у топологічний простір X неперервне тоді й лише тоді, коли неперервна кожна з композицій $f \circ \theta_\beta : I_\beta \to X$, $\beta \in \mathbf{B}$.

6.4. **Канонічне ін'єктивне відображення** $\varphi : |G| \to M^2$**.** Нехай (M^2, Δ_q) – смугаста поверхня, $|G|$ – геометрична реалізація її спрощеного графу G, побудованого за зведеним атласом (4.2). Побудуємо ін'єктивне неперервне відображення $\varphi : |G| \to M^2$.

Для простоти будемо вважати, що кожна модельна смуга S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, відповідає співвідношенням $\mathbb{R} \times (-1, 1) \subset S_\alpha \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Почнемо побудову з 0-остова. Нехай $\alpha \in \mathbf{A}$. Покладемо $0_\alpha = (0, 0) \in S_\alpha$, $\varphi(\alpha) = q(0_\alpha)$. Очевидно, це відображення є ін'єктивним.

Нехай $\beta \in \mathbf{B}$. Продовжимо відображення ϕ на одновимірну клітину I_β наступним чином.

Нехай $\omega_\beta = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ – відповідний шов на поверхні M^2, причому $X_\beta \subset \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$ і $Y_\beta \subset \partial_{\sigma''} S_{\alpha''}$ для деяких $\alpha', \alpha'' \in \mathbf{A}$ і $\sigma', \sigma'' \in \{\pm 1\}$. Зафіксуємо точку $z_\beta \in \omega_\beta$. Тоді $q^{-1}(z_\beta) = \{x_\beta, y_\beta\}$ для деяких $x_\beta = (u_\beta, \sigma') \in X_\beta$ і $y_\beta = (v_\beta, \sigma'') \in Y_\beta$. Означимо $\varphi_\beta : I_\beta \to M^2$ за допомогою співвідношення

$$\varphi_\beta(t) = \begin{cases} q(2(t+1)u_\beta, \sigma'(t+1)), & t \in [-1, -1/2], \\ q(u_\beta, \sigma'(t+1)), & t \in (-1/2, 0], \\ q(v_\beta, \sigma''(1-t)), & t \in (0, 1/2]), \\ q(2(1-t)v_\beta, \sigma''(1-t)), & t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Безпосередня перевірка показує, що це проста неперервна крива, яка з'єднує точки $0_{\beta'}$ та $0_{\beta''}$, причому для різних $\beta \in \mathbf{B}$ носії цих кривих можуть перетинатися тільки в точках множини $\varphi(\mathbf{A})$. Це означає наступне.

- Маємо коректно визначене відображення $\varphi : |G| \to M^2$, яке задовольняє умову $\varphi_\beta = \varphi \circ \theta_\beta$ для кожного $\beta \in \mathbf{B}$.
- Більш того, відображення φ є ін'єктивним.

Як було відмічено вище, неперервність φ слідує з неперервності всіх φ_β, $\beta \in \mathbf{B}$.

Теорема 6.4.1 (див. [25, Теорема 2.8]). *Нехай* (M^2, Δ_q) *– смугаста поверхня,* $|G|$ *– геометрична реалізація її спрощеного графу* G*, побудованого за зведеним атласом* (4.2)*. Тоді для кожного* $x \in |G|$ *відображення* $\varphi : |G| \to M^2$ *індукує ізоморфізм фундаментальних груп*

$$\varphi_* : \pi_1(|G|, x) \to \pi_1(M^2, \varphi(x)) .$$

Зокрема φ *є гомотопійною еквівалентністю.*

Теорема 6.4.2 (див. [25, Теорема 2.9]). *Нехай* (M^2, Δ_q) *– смугаста поверхня,* $|G|$ *– геометрична реалізація її спрощеного графу* G*, побудованого за зведеним атласом* (4.2)*. Тоді існує підмножина* $Z \in \varphi(|G|)$*, така що* $\varphi(\mathbf{A}) \subset Z$ *і відображення* $\varphi : |G| \to M^2$ *індукує ізоморфізм фундаментальних групоїдів*

$$\varphi^* : \Pi(|G|, \varphi^{-1}(Z)) \to \Pi(M^2, Z) .$$

6.5. **Орієнтація канонічного шарування на смугастій поверхні.** Припустимо, що смугаста поверхня (M^2, Δ_q) допускає структуру локально-тривіального розшарування, узгоджену зі структурою шарування на ній (див. Теореми 3.3 і 5.1).

Тоді відображення проєкції $\mathrm{pr} : M^2 \to M^2/\Delta_q$ на простір листів відповідає наступній властивості. Для кожної точки $x \in M^2$ існують відкритий окіл V її образа $\mathrm{pr}(x)$, гомеоморфний відкритій підмножині $[0, 1)$, а також вкладення $i_V : V \times \mathbb{R} \to M^2$ такі що

- множина $i_V(V \times \mathbb{R}) \subset M^2$ є насиченим відкритим околом точки x;
- відображення $\mathrm{pr}_1 : V \times \mathbb{R} \to V$ проекції на першу координату задовольняє рівність $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr} \circ i_V$;
- множина $i_V(\{y\} \times \mathbb{R})$ є листом шарування Δ_q для кожного $y \in V$.

Пара (V, i_V) називається *тривіалізацією* розшарування (M^2, pr) в точці x.

Нехай на кожному листі шарування Δ_q зафіксована орієнтація. Тоді для тривіалізації (V, i_V) розшарування (M^2, pr) відображення i_V індукує на кожній "вертикальній лінії" $\{y\} \times \mathbb{R} \subset V \times \mathbb{R}$ якусь орієнтацію. Зафіксуємо також стандартну орієнтацію на $\mathbb{R}$ і нехай $\mathrm{pr}_2 : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – проєкція на другу координату. Тоді для кожного $y \in V$ відображення $p_y = \mathrm{pr}_2 |_{\{y\} \times \mathbb{R}} : \{y\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зберігає або обертає орієнтацію.

Скажемо, що орієнтація листів Δ_q *погоджена на* (V, i_V), якщо всі відображення p_y, $y \in V$, одночасно зберігають або обертають орієнтацію.

Назвемо шарування Δ_q *орієнтованим*, якщо орієнтація його листів погоджена на кожній тривіалізації (V, i_V) розшарування (M^2, pr). Це поняття формалізує ідею того, що "близькі листи" шарування Δ_q "однаково орієнтовані".

Скажемо, що листовий гомеоморфізм $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$ *зберігає орієнтацію* орієнтованого шарування Δ_q, якщо він відображає кожен лист $\omega \in \Delta_q$ на його образ $h(\omega)$ (який за означенням є теж листом Δ_q) зі збереженням орієнтації.

Припустимо, канонічне шарування Δ_q смугастої поверхні (M^2, Δ_q) є орієнтованим. Розглянемо підгрупу $\mathcal{H}^+(\Delta_q)$ групи $\mathcal{H}(\Delta_q)$, елементами якої є листові автоморфізми поверхні M^2, що зберігають орієнтацію шарування Δ_q.

Ми знаємо, див. теорему 6.1.4, що для довільного неперервного шляху $\Theta : [0,1] \to \mathcal{H}(\Delta_q)$, який з'єднує тотожне відображення id_{M^2} з деяким $h \in \mathcal{H}(\Delta_q)$, виконується наступна властивість: $\Theta(t) \in \mathcal{H}^+(\Delta_q)$ для кожного $t \in [0,1]$. Тому $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)$ є підгрупою $\mathcal{H}^+(\Delta_q)$. Більш того легко бачити, що $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q) \lhd \mathcal{H}^+(\Delta_q)$ а отже коректно означена група

$$\pi_0\mathcal{H}^+(\Delta_q) = \mathcal{H}^+(\Delta_q)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q),$$

яка називається *групою орієнтованих гомеотопій* смугастої поверхні (M^2, Δ_q).

На кожній смузі S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, атласу (4.2) її шарування Δ_α на горизонтальні прямі та межові інтервали можна орієнтувати природним чином: зафіксуємо на кожному листі ω таку орієнтацію, щоб відображення $\mathrm{pr}_1|_\omega : \omega \to \mathbb{R}$ (обмеження на ω проєкції на першу координату) зберігало орієнтацію. Припустимо, що всі гомеоморфізми $\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta$, $\beta \in \mathbf{B}$, зберігають орієнтацію. Тоді кожен лист канонічного шарування Δ_q отримує якусь орієнтацію.

Виявляється, що *шарування Δ_q з такою орієнтацією листів є орієнтованим.* Це твердження слідує з наступного факту: існує покриття простору M^2 насиченими відкритими множинами, кожна з яких є носієм деякої тривіалізації розшарування (M^2, pr), причому орієнтація листів Δ_q погоджена на кожній з цих тривіалізацій.

Вказане відкрите покриття складається з таких множин:
- $q(\mathrm{Int}\, S_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{A}$;
- $\omega \cup \bigcup_{\omega \subset q(\partial S_\alpha)} q(\mathrm{Int}\, S_\alpha)$, $\omega \in \Delta_q$, $\omega \subset D$, див. (4.4).

Відповідні тривіалізації будуються безпосередньо за допомогою розтинів шарування Δ_q (існування розтинів гарантують Теореми 3.3 та 5.1).

6.6. **Смугасті поверхні з класу $\mathfrak{F}$.** У роботах [45] і [44] розглянутий клас смугастих поверхонь, спрощені графи яких є кореневими деревами скінченного діаметра. Щоб його означити, спочатку розглянемо один більш широкий допоміжний клас смугастих поверхонь.

Означення 6.6.1. Назвемо модельну смугу $S \subset \mathbb{R}^2$ *допустимою*, якщо сім'я компонентів зв'язності множини ∂S є локально скінченною в $\mathbb{R}^2$, тобто кожна точка $\mathbb{R}^2$ має окіл, що перетинається не більш ніж зі скінченним числом компонентів зв'язності множини ∂S.

Наприклад, модельна смуга

$$S = \mathbb{R} \times [-1, 1] \setminus \big(\{(0, -1)\} \cup \{x_n = (1/n, -1) \mid n \in \mathbb{N}\}\big)$$

не є допустимою.

Введемо наступні позначення:

$$[0] = \varnothing, \quad [n] = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad -\mathbb{N} = \{-i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Нехай також $J_i = (2i, 2i + 1)$. Для підмножини $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ позначимо

$$A_\Lambda = \bigcup_{i \in \Lambda} J_i .$$

Назвемо *стандартними* такі множини даного типу: $A_{[n]}$, $n = 0, 1, \ldots$, а також $A_{\mathbb{Z}}$, $A_{\mathbb{N}}$, $A_{-\mathbb{N}}$.

Лема 6.6.2 (див. [45, Лема 2.6])**.** *Нехай S – допустима модельна смуга. Тоді існує листовий гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ простору $\mathbb{R}^2$ з шаруванням на горизонтальні прямі, що зберігає орієнтацію листів цього шарування, і такий що $h(S) \subset \mathbb{R} \times [-1, 1] = \overline{h(S)}$ є модельною смугою, причому $\partial h(S) = A_\alpha \times \{-1\} \sqcup A_\beta \times \{1\}$ для деяких стандартних множин A_α і A_β. Більш того, α, $\beta \in \{[0], [1], \ldots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ не залежать від вибору гомеоморфізму h вказаного типу.*

Нехай (M^2, Δ_q) – смугаста поверхня має атлас (4.2), у якого всі модельні смуги якого є допустимими. Будемо вважати, що на кожній модельній смузі S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, з цього атласу її шарування Δ_α має природну орієнтацію (див. попередній підрозділ).

Введемо наступні позначення:

$$D_- = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \partial_- S_\alpha, \qquad\qquad D_+ = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \partial_+ S_\alpha.$$

Тоді $D = q(D_- \sqcup D_+)$ (див. (4.4)).

Означення 6.6.3. Атлас (4.2) назвемо *допустимим*, якщо кожний гомеоморфізм склейки $\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta$, $\beta \in \mathbf{B}$, відповідає наступним властивостям:

(1) $X_\beta \subset D_-$, $Y_\beta \subset D_+$;

(2) гомеоморфізм ϕ_β зберігає орієнтацію.

З властивості (1) слідує, що у допустимому атласі немає листів типів (c31) і (c32), отже відображення проєкції $\mathrm{pr} : M^2 \to M^2/\Delta_q$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром $\mathbb{R}$, а простір M^2/Δ_q – локально гомеоморфний до $[0,1)$, див. теореми 3.3 і 5.1.

Враховуючи сказане, властивість (2) гарантує, що природні орієнтації на канонічних шаруваннях Δ_α смуг S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, породжують орієнтоване шарування Δ_q.

Означення 6.6.4. Назвемо описану орієнтацію *природною орієнтацією* на Δ_q.

Отже, для допустимого атласу завжди означена група орієнтованих гомеотопій $\pi_0\mathcal{H}^+\bigl(\Delta_q\bigr)$.

Означення 6.6.5. Скажемо, що допустимий атлас (4.2) *належить до класу* $\mathfrak{F}$, якщо
(1) для кожної смуги S_α множина $\partial_- S_\alpha$ містить рівно один межовий інтервал (тобто має стандартний тип $A_{[1]}$);
(2) спрощений граф G цього атласу зв'язний, має скінченний діаметр і не має циклів.

Означення 6.6.6. Скажемо, що смугаста поверхня (M^2, Δ_q) належить до класу $\mathfrak{F}$, якщо вона має атлас, що належить до класу $\mathfrak{F}$.

Зауваження 6.6.7. З вимоги (2) Означення 6.6.5 слідує, що кожна смугаста поверхня, яка належить до класу $\mathfrak{F}$ має зведений атлас. Причому всі її зведені атласи належать до класу $\mathfrak{F}$, див. Зауваження 4.4.6.

Зрозуміло, що смугаста поверхня (M^2, Δ_q), що належить до класу $\mathfrak{F}$, є зв'язною та однозв'язною некомпактною поверхнею. Тому внутрішність такої поверхні гомеоморфна $\mathbb{R}^2$, див. [12].

Позначимо

$$\mathcal{R} = \{\pi_0\mathcal{H}^+\bigl(\Delta_q\bigr) \mid (M^2, \Delta_q) \text{ належить до класу } \mathfrak{F}\}$$

клас груп орієнтованих гомеотопій всіх смугастих поверхонь, що належать до класу $\mathfrak{F}$. Виявляється, що цей клас груп тісно пов'язаний з класами груп, побудованими у підрозділі 2.6.

Теорема 6.6.8 (див. [45, Теорема 4.5])**.** *Класи $\mathcal{R}$ та $\mathcal{W}'$ збігаються.*

6.7. **Граф смугастої поверхні.** Розглянемо на поверхні M^2 деякий смугастий атлас (4.2). Поставимо йому у відповідність певний граф G, що кодує “комбінаторну” інформацію про склейку смуг за допомогою проєкції q. Цей граф може мати кратні ребра і петлі, а також напіввідкриті ребра (ребра без одного кінця). Крім того, він несе певну додаткову структуру. Дамо спочатку дещо неформальний опис графу G.
(1) *Вершинами* G є смуги з сім'ї $\bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha$.

(2) Назвемо для зручності межовий інтервал X смуги S_α *пів-ребром, яке інцидентне вершині* S_α. Позначимо множину всіх пів-ребер, що належать до $\partial_\pm S_\alpha$ через $d_\pm(S_\alpha)$. Також позначимо

$$d(S_\alpha) = d_-(S_\alpha) \cup d_+(S_\alpha).$$

(3) *Ребра* графу G бувають двох наступних типів.
   (а) Якщо дві смуги S_1 і S_2 "зшиті" вздовж межових інтервалів X_β і Y_β, ми будемо вважати, що *вершини* S_1 і S_2 графу G з'єднані ребром e_β. Отже, ребро e_β є невпорядкованою парою пів-ребер. Назвемо (X_β, Y_β) *замкненим* ребром G.
   (б) Якщо межовий інтервал X деякої смуги S_α не ототожнюється з іншим межовим інтервалом, тобто $q(X)$ є компонентою краю M^2, ми будемо вважати, що X є напіввідкритим ребром, яке інцидентне лише вершині S_α.

Візьмемо на кожній смузі S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, природну орієнтацію листів її шарування Δ_α на горизонтальні прямі та межові інтервали.

Додамо до G інформацію про напрями склеювання межових інтервалів, а також про взаємне розташування межових інтервалів вздовж кожної смуги.

Означимо для гомеоморфізму $f : (a, b) \to (c, d)$ число $\mathbf{or}(f) = +1$, якщо f зберігає орієнтацію, і $\mathbf{or}(f) = -1$, якщо змінює. Зрозуміло, що для будь-якого гомеоморфізму $g : (c, d) \to (e, f)$ виконується рівність $\mathbf{or}(g \circ f) = \mathbf{or}(g) \cdot \mathbf{or}(f)$.

(4) Поставимо у відповідність кожному замкненому ребру (X_β, Y_β), що відповідає склеюванню межових інтервалів X_β та Y_β за допомогою гомеоморфізму $\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta$, число $\sigma(X_\beta, Y_\beta) := \mathbf{or}(\phi_\beta)$ і назвемо його *орієнтацією склеювання.*

(5) На кожній модельній смузі S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, відображення $\mathrm{pr}_1|_{\partial_+ S_\alpha} : \partial_+ S_\alpha \to \mathbb{R}$ разом з лінійним порядком на просторі $\mathbb{R}$ природним чином індукують лінійний порядок на сім'ї межових інтервалів, що належать до $\partial_+ S_\alpha$. Лист ω_1 передує ω_2, якщо $\mathrm{pr}_1(\omega_1)$ розташована в $\mathbb{R}$ лівіше за $\mathrm{pr}_1(\omega_2)$ (таке означення є коректним, тому що множини $\mathrm{pr}_1(\omega_1)$ і $\mathrm{pr}_1(\omega_2)$ зв'язні і не перетинаються).

   Аналогічним чином можна задати лінійний порядок на сім'ї межових інтервалів, що належать до $\partial_- S_\alpha$.

   Отже, на кожній з множин $d_-(S_\alpha)$ і $d_+(S_\alpha)$ всіх пів-ребер, що інцидентні *вершині* S_α графу G означений лінійний порядок.

Більш формально сказане можна записати наступним чином.

Означення 6.7.1. *Графом смугастого атласу* назвемо наступну четвірку

$$G = (\mathbf{A}, H, \xi, \sigma),$$

де

- $\mathbf{A}$ є множиною *вершин* G.
- $H = \bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} \Big(d_{-1}(\alpha) \sqcup d_{+1}(\alpha)\Big)$ – сім'я попарно неперетинних лінійно впорядкованих множин, кожна з яких має не більше ніж зліченну потужність. Скажемо, що елементи множини $d(\alpha) = d_{-1}(\alpha) \cup d_{+1}(\alpha)$ є *пів-ребрами, інцидентними вершині* α.
- Відображення $\xi : H \to H$ є інволюцією, тобто це бієкція, яка відповідає рівності $\xi^2 = \mathrm{id}_H$. Якщо $X \neq \xi(X)$ для деякого $X \in H$, то *невпорядкована* пара $\{X, \xi(X)\}$ називається *замкненим ребром* графа G. Інакше X є нерухомою точкою ξ і називається *напів-відкритим* ребром G.
- $\sigma : E \to \{\pm1\}$ – це відображення з множини
$$E = \big\{\{X, \xi(X)\} \mid X \in H,\ X \neq \xi(X)\big\}$$
всіх замкнених ребер G до $\{\pm1\}$, яке назвемо *орієнтацією склейки.*

  Еквівалентно, можна вважати, що $\sigma : H \setminus \mathrm{Fix}(\xi) \to \{\pm1\}$ відповідає умові $\sigma \circ \xi = \sigma$.

Означення 6.7.2. Нехай $G = (\mathbf{A}, H, \xi, \sigma)$ та $G' = (\mathbf{A}', H', \xi', \sigma')$ – графи смугастих атласів деяких смугастих поверхонь. Назвемо *ізоморфізмом* цих графів четвірку відображень
$$\nu : \mathbf{A} \to \mathbf{A}', \qquad \varepsilon : H \to H', \qquad l, \tau : \mathbf{A} \to \{\pm1\},$$
що відповідають наступним властивостям.

(а) Відображення ν та ε є бієктивними і для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$ і $s \in \{\pm1\}$ задовольняють рівність
$$\varepsilon(d_s(\alpha)) = d'_{\tau(\alpha)\cdot s}(\nu(\alpha)),$$
де $d'_{\pm1}(\alpha') \subset H'$ – множина пів-ребер графа G' інцидентних до $\alpha' \in \mathbf{A}'$. Більш того, кожна з бієкцій
$$\varepsilon|_{d_{-1}(\alpha)} : d_{-1}(\alpha) \to d'_{-\tau(\alpha)}(\nu(\alpha)),$$
$$\varepsilon|_{d_{+1}(\alpha)} : d_{+1}(\alpha) \to d'_{\tau(\alpha)}(\nu(\alpha)),$$
є зростаючим відображенням (відносно лінійних порядків на множинах $d_{\pm1}(\alpha)$ і $d'_{\pm\tau(\alpha)}(\nu(\alpha))$), якщо $l(\alpha) = +1$, і є спадним відображенням при $l(\alpha) = -1$.

(б) $\xi' \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \xi$; зокрема ε індукує бієкцію між множинами замкнених ребер графів G і G'.

(в) Нехай $\{X, Y\}$ є замкненим ребром графу G і для деяких $\alpha, \mu \in \mathbf{A}$ маємо $X \in d(\alpha)$ та $Y = \xi(X) \in d(\mu)$. Тоді
$$l(\alpha) \cdot \sigma(X, Y) = \sigma'(\varepsilon(X), \varepsilon(Y)) \cdot l(\mu). \tag{6.2}$$

Відмітимо, що на множині $\operatorname{Aut}(G)$ автоморфізмів графа G можна задати групову структуру за допомогою наступного множення: якщо

$$a' = (\nu', \varepsilon', l', \tau'),\ a = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \ \in \ \operatorname{Aut}(G),$$

означимо добуток $a'' = a'a = (\nu'', \varepsilon'', l'', \tau'')$ наступним чином:

$$\nu'' = \nu' \circ \nu, \qquad\qquad \varepsilon'' = \varepsilon' \circ \varepsilon, \tag{6.3}$$

$$l''(\alpha) = l'(\nu(\alpha)) \cdot l(\alpha), \qquad\qquad \tau''(\alpha) = \tau'(\nu(\alpha)) \cdot \tau(\alpha), \tag{6.4}$$

для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$.

Позначимо $\mathbf{1} : \mathbf{A} \to \{\pm 1\}$ постійну функцію, що має значення $+1$. Тоді $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}, \mathrm{id}_H, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ є одиницею групи $\operatorname{Aut}(G)$. Також маємо

$$(\nu, \varepsilon, l, \tau)^{-1} = (\nu^{-1}, \varepsilon^{-1}, l, \tau)$$

для кожного $(\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \operatorname{Aut}(G)$.

Розглянемо деяку множину X. Позначимо через $\Sigma(X) = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Set}}(X)$ групу всіх бієктивних відображень X на себе, тобто групу перестановок на множині X. Для групи A позначимо через A^X групу всіх відображень $X \to A$ з поточковим множенням, так що $(\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ для всіх φ, $\psi \in A^X$ і $x \in X$. Тоді наступне правило означає природну праву дію $\bar{\phi} : \Sigma(X) \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Grp}}(A^X)$ групи $\Sigma(X)$ на A^X: $\bar{\phi}_\nu(a) = a \circ \nu$, $\nu \in \Sigma(X)$, $a \in A^X$.

Розглянемо відповідний напівпрямий добуток $A^X \rtimes_{\bar{\phi}} \Sigma(X)$. За означенням це прямий добуток множин $A^X \times \Sigma(X)$ з наступним множенням:

$$(a', \nu')(a, \nu) = \big((a' \circ \nu) \cdot a,\ \nu' \circ \nu\big),$$

де $\cdot$ позначає множення в A^X.

З іншого боку, $A^X \cong \prod_{x \in X} A_x$, де $A_x \cong A$ для всіх $x \in X$. Розглянемо тотожній гомоморфізм $\mathrm{id}_{\Sigma(X)} : \Sigma(X) \to \Sigma(X)$. Він породжує гомоморфізм $\bar{\phi} : \Sigma(X) \to \prod_{x \in X} A_x$, який діє за правилом $\bar{\phi}(\sigma) : (a_x) \mapsto (a_{\sigma(x)})$, $\sigma \in \Sigma(X)$. Зі сказаного безпосередньо слідує (див. Означення 2.5.2), що

$$A^X \rtimes_{\bar{\phi}} \Sigma(X) \cong A \wr_{\mathrm{id}_{\Sigma(X)}} \Sigma(X)\,.$$

Переписуючи (6.3) і (6.4) у формі:

$$(\nu', \varepsilon', l', \tau')\ (\nu, \varepsilon, l, \tau) = \big(\nu' \circ \nu,\ \varepsilon' \circ \varepsilon,\ (l' \circ \nu) \cdot l,\ (\tau' \circ \nu) \cdot \tau\big)$$

ми бачимо, що $\operatorname{Aut}(G)$ є *підгрупою* групи

$$\Big(\{\pm 1\}^2 \wr_{\mathrm{id}_{\Sigma(\mathbf{A})}} \Sigma(\mathbf{A})\Big) \times \Sigma(H).$$

Теорема 6.7.3 (див. [30, Теорема 6.2])**.** *Кожна еквівалентність смугастих атласів породжує ізоморфізм їх графів.*

Обернено, кожен ізоморфізм між графами деяких смугастих атласів індукований деякою еквівалентністю цих атласів.

Розглянемо декілька прикладів.

З формальних міркувань нам потрібно буде говорити про відображення з порожньої множини. Ми можемо дивитись на відображення $f : A \to B$ між множинами як на графік $\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$. З цієї точки зору відображення $\varnothing \to B$ з порожньої множини є порожньою підмножиною порожньої множини $\varnothing \times B$.

Приклад 6.7.4. Нехай $S = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ і $q = \mathrm{id}_S : S \to S$ є смугастим атласом, що складається з єдиної смуги, див. Рис. 6.1(a). Тоді $\mathbf{A} = \{*\}$ є одноточковою множиною, $H = \varnothing$, а отже

$$\xi : H \to H, \qquad \sigma : H \setminus \mathrm{Fix}(\xi) \to \{\pm 1\}$$

є відображеннями з порожньої множини.

Нехай $(\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \mathrm{Aut}(G)$. Тоді $\nu = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ і $\varepsilon = \mathrm{id}_H$ однозначно визначені, в той час як відображення $l, \tau : \{*\} \to \{\pm 1\}$ можуть бути довільними. Легко бачити, що $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$.

(a) (b)

Рис. 6.1. Смугасті атласи, що містять єдину смугу, і їх графи

Приклад 6.7.5. Нехай $S = \mathbb{R} \times (-1, 1) \cup \{(-2, -1) \cup (1, 2)\} \times \{1\}$ і смугастий атлас $q = \mathrm{id}_S : S \to S$ знову складається з єдиної смуги, див. Рис. 6.1(b). Тоді $\mathbf{A} = \{*\}$ містить єдину точку, $H = \{a, b\} = d_{+1}(*)$, де $a = (-2, -1) \times \{1\}$, $b = (1, 2) \times \{1\}$, і $a < b$ відносно лінійного порядку на $d_{+1}(*)$. Оскільки відображення проекції q не ототожнює ніяких межових інтервалів, зрозуміло що $\xi = \mathrm{id}_H : H \to H$, тоді $\sigma : H \setminus \mathrm{Fix}(\xi) \to \{\pm 1\}$ є відображенням з порожньої множини.

Нехай $x = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \mathrm{Aut}(G)$. Тоді $\nu = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$. Більш того, оскільки $H = d_{+1}(*)$, внаслідок чого $d_{-1}(*) = \varnothing$, то $\varepsilon(d_{+1}(*)) = d_{+1}(*)$, отже $\tau(*) = +1$.

Якщо $\varepsilon(a) = a$, то $\varepsilon = \mathrm{id}_H$, тому $l(*) = +1$, отже x є одиницею групи $\mathrm{Aut}(G)$. Припустимо, що $\varepsilon(a) = b$. Тоді $\varepsilon(b) = a$, отже ε є бієкцією $H = d_{+1}(*)$, що обертає порядок, тому $l(*) = -1$. Таким чином $\mathrm{Aut}(G)$ складається з двох елементів, тобто $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\pm 1\}$.

Приклад 6.7.6. Розглянемо *стандартний циліндр* $M^2 = S/\phi$ (див. підрозділ 4.3). Тут $S = \mathbb{R}\times[0,1]$, $\phi : \mathbb{R}\times\{0\} \to \mathbb{R}\times\{+1\}$ – гомеоморфізм, означений за допомогою співвідношення $\phi(x,0) = (x,1)$, $q : S \to M^2$ – відповідний смугастий атлас, див. Рис. 6.2(a).

Тоді, як і у попередніх прикладах, $\mathbf{A} = \{*\}$ є одноточковою множиною, $H = \{a,b\}$, де $a = \mathbb{R}\times\{0\}$, $b = \mathbb{R}\times\{1\}$, $\xi : H \to H$ означено за допомогою рівностей $\xi(a) = b$, $\xi(b) = a$, а $\sigma : H \to \{\pm1\}$ означено як $\sigma(a) = \sigma(b) = \mathbf{or}(\phi) = +1$.

Нехай $x = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \mathrm{Aut}(G)$. Тоді $\nu = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$. Більш того, оскільки G має єдине ребро $\{a,b\}$, то воно нерухоме під дією ε і зі співвідношення (6.2) слідує, що $l(a) = l(b)$.

Припустимо, що $\varepsilon(a) = a$. Тоді $\varepsilon = \mathrm{id}_H$, отже $\tau(*) = +1$. В протилежному випадку, $\varepsilon(a) = b$, $\varepsilon(b) = a$, і $\tau(*) = -1$. Відмітимо, що в обох випадках спільне значення $l(a) = l(b)$ можна вибрати довільним чином.

Зі сказаного слідує, що $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\pm1\}\times\{\pm1\}$.

Приклад 6.7.7. Розглянемо *стандартну стрічку Мебіуса.* Її побудова відрізняється від попереднього прикладу тільки відображенням

$$\phi : \mathbb{R}\times\{0\} \to \mathbb{R}\times\{+1\},$$

яке тепер має вигляд $\phi(x,0) = (-x,1)$, а отже обертає орієнтацію, див. Рис. 6.2(b). Безпосередня перевірка показує, що і в цьому випадку $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\pm1\}\times\{\pm1\}$.

(a) (b)

Рис. 6.2. Стандартні циліндр і стрічка Мебіуса

Теорема 6.7.8 (див. [30, Означення 5.7, Теореми 5.8 та 8.1], а також Зауваження 4.4.6)**.** *Розглянемо* ***зведений*** *смугастий атлас* (4.2) *на* ***зв'язній*** *поверхні* M^2. *Нехай* G *– його граф, а* Δ_q *– відповідне канонічне шарування. Тоді існує ізоморфізм* $\rho : \pi_0\mathcal{H}(\Delta_q) \cong \mathrm{Aut}(G)$.

6.8. **Простори листів смугастих поверхонь.** Існує інший підхід до вивчення гомотопійних властивостей простору листових автоморфізмів смугастої поверхні. Замість графу смугастої поверхні можна розглянути двоїстий до нього об'єкт і вивчати простір його автоморфізмів. Належна топологія на цьому двоїстому об'єкті робить його гомеоморфним до простору листів канонічного шарування на відповідній смугастій поверхні.

Почнемо з модельної смуги S. Розглянемо канонічне шарування Δ_S на цій смузі і відображення проекції $\mathrm{pr} : S \to \bar{e}$ на його простір листів.

Простір $\bar{e}$ є об'єднанням трьох неперетинних множин

$$e = \mathrm{pr}(\operatorname{Int} S), \qquad \partial_- e = \mathrm{pr}(\partial_- S), \qquad \partial_+ e = \mathrm{pr}(\partial_+ S).$$

Легко бачити, що відносно фактор топології на $\bar{e}$ множина e гомеоморфна відкритому інтервалу, а також $\mathrm{hcl}(y) = \partial_+ e$, якщо $y \in \partial_+ e$ і $\mathrm{hcl}(y) = \partial_- e$ для кожного $y \in \partial_- e$.

Означення 6.8.1. Множину $\bar{e}$ назвемо *інтервалом з розщепленими кінцями*, а множини $\partial_- e$ і $\partial_+ e$ назвемо відповідно *розщепленими кінцями* $\bar{e}$.

Відображення $\mathrm{pr}_1|_{\partial_+ S} : \partial_+ S \to \mathbb{R}$ разом з лінійним порядком на просторі $\mathbb{R}$ природним чином індукують лінійне впорядкування на елементах сім'ї межових інтервалів, що належать до $\partial_+ S$. Лист ω_1 передує ω_2, якщо $\mathrm{pr}_1(\omega_1)$ розташована в $\mathbb{R}$ лівіше за $\mathrm{pr}_1(\omega_2)$ (див. пункт (5) означення графу смугастої поверхні у підрозділі 6.7).

Аналогічним чином можна задати лінійний порядок на елементах сім'ї межових інтервалів, що належать до $\partial_- S$.

Отже, на кожній з множин $\partial_- e$ і $\partial_+ e$ означений деякий лінійний порядок.

Розглянемо смугасту поверхню (M^2, Δ_q), яка задана атласом (4.2). Кожній модельній смузі з цього атласу $(S_\alpha, \partial_-(S_\alpha), \partial_+(S_\alpha))$ поставимо у відповідність інтервал з розщепленими кінцями $(\bar{e}_\alpha, \partial_- e_\alpha, \partial_+ e_\alpha)$. Отримаємо топологічний простір $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \bar{e}_\alpha$ і відображення проекції

$$\overline{\mathrm{pr}} : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \to \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \bar{e}_\alpha \,,$$

яке означене незалежно на кожній смузі S_α як проекція на її простір листів $\bar{e}_\alpha$.

Розглянемо ще відображення проекції $\mathrm{pr} : M^2 \to Y = M^2/\Delta_q$ смугастої поверхні (M^2, Δ_q) на простір її листів Y. За означенням смугастого атласу під дією проекції q образом кожного листа канонічного шарування на просторі $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$ є лист канонічного шарування Δ_q на просторі M^2. Тому під дією відображення q прообраз кожної точки відносно проекції $\overline{\mathrm{pr}}$ переходить у прообраз точки відносно проекції pr і коректно означене відображення $\bar{q}$, яке замикає наступну комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} S_\alpha & \xrightarrow{q} & M^2 \\ {\scriptstyle\overline{\mathrm{pr}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}} \\ \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} \bar{e}_\alpha & \xrightarrow[\bar{q}]{} & Y \end{array}$$

Легко бачити, що відображення $\bar{q}$ є сюр'єктивним. Відомо (див. [53]), що воно неперервне. Користуючись тим, що інші три відображення у наведеній діаграмі факторні, легко перевірити, що відображення $\bar{q}$ також є факторним (воно сюр'єктивне і підмножина у його образі відкрита тоді й лише тоді, коли її повний прообраз відкритий).

Означення 6.8.2. Назвемо відображення

$$\bar{q} : Y_0 = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} \bar{e}_\alpha \to Y$$

атласом простору листів Y, що індукований атласом (4.2).

Можна перевірити, що $Y = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} \bar{e}_\alpha \big/ \sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається наступним чином: $x \sim y$, якщо $x = \overline{\mathrm{pr}}(X_\beta)$, $y = \overline{\mathrm{pr}}(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$ (зауважимо, що тоді x і y належать до розщеплених кінців якихось з інтервалів). Іншими словами це можна виразити так: $x \sim y$, якщо $\overline{\mathrm{pr}}^{-1}(\{x, y\}) = q^{-1}(\omega_\beta)$ для деякого шва ω_β.

Означення 6.8.3. Нехай Y і Y' – простори листів деяких смугастих поверхонь, а $\bar{q} : Y_0 \to Y$ і $\bar{q}\,' : Y_0' \to Y'$ – їх атласи.

Ізоморфізмом цих атласів назвемо пару гомеоморфізмів $\bar{h} : Y_0 \to Y_0'$ і $\bar{k} : Y \to Y'$, для яких виконуються наступні умови:

(1) кожне ребро з Y_0 відображається на ребро з Y_0';

(2) кожен розщеплений кінець ребра $\bar{e}_\alpha$ з Y_0 відображається на розщеплений кінець ребра $\bar{h}(\bar{e}_\alpha)$, причому це відображення зберігає лінійний порядок на елементах розщепленого кінця ребра, або обертає його;

(3) комутативна наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} Y_0 = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{A}} \bar{e}_\alpha & \xrightarrow{\bar{h}} & \bigsqcup_{\alpha'\in\mathbf{A}'} \bar{e}'_{\alpha'} = Y_0' \\ {\scriptstyle\bar{q}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\bar{q}\,'} \\ Y & \xrightarrow[\bar{k}]{} & Y' \end{array}$$

Означення 6.8.4. Ізоморфізм атласу $\bar{q} : Y_0 \to Y$ простору листів Y на себе називається його *автоморфізмом*.

Легко бачити, що автоморфізми атласу $\bar{q} : Y_0 \to Y$ утворюють групу відносно операції композиції. Позначимо цю групу $\mathcal{H}\big(\bar{q}\big)$.

Зауваження 6.8.5. Означення 6.8.3 побудовано так, щоб для кожної пари атласів $q' : Z' \to M_1^2$ і $q'' : Z'' \to M_2^2$ смугастих поверхонь кожен ізоморфізм цих атласів (див. Означення 4.2.4) породжував ізоморфізм відповідних атласів просторів листів $\bar{q}\,' : Y_0' \to Y_1$ і $\bar{q}\,'' : Y_0'' \to Y_2$.

Зауваження 6.8.6. Припустимо, що атлас $q : Z \to M^2$ смугастої поверхні (M^2, Δ_q) є зведеним. З зауваження 4.4.6 можна вивести, що кожен листовий гомеоморфізм $f \in \mathcal{H}\big(\Delta_q\big)$ індукує деякий автоморфізм атласу q. Отже f індукує автоморфізм відповідного атласу $\bar{q} : Y_0 \to Y$ простору листів $Y = M^2/\Delta_q$. Позначимо цю відповідність через

$$\rho : \mathcal{H}\big(\Delta_q\big) \to \mathcal{H}\big(\bar{q}\big).$$

Безпосередня перевірка показує, що ρ є гомоморфізмом відповідних груп.

Ця конструкція була використана у статті [44] для дослідження гомотопійних властивостей груп листових автоморфізмів смугастих поверхонь з класу $\mathfrak{F}$.

Отже, нехай (M^2, Δ_q) – смугаста поверхня, яка допускає зведений атлас $q : Z \to M^2$, що належить до класу $\mathfrak{F}$. Припустимо також, що шарування Δ_q має природну орієнтацію, див. означення 6.6.4.

Позначимо через $\mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big)$ підмножину групи $\mathcal{H}^{+}\big(\Delta_q\big)$ листових автоморфізмфв M^2, які зберігають орієнтацію шарування Δ_q і задовльняють таку умову:

– $f \in \mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big)$, якщо для кожної модельної смуги S_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, справедливі рівності $\partial_- f(S_\alpha) = f(\partial_- S_\alpha)$ і $\partial_+ f(S_\alpha) = f(\partial_+ S_\alpha)$.

Виявляється, що $\mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big)$ є підгрупою $\mathcal{H}^{+}\big(\Delta_q\big)$, більш того $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}\big(\Delta_q\big)$ є нормальною пдгрупою в $\mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big)$. Позначимо

$$\pi_0\mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big) = \mathcal{H}^{++}\big(\Delta_q\big)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}\big(\Delta_q\big).$$

Нехай $\bar{q} : Y_0 \to Y$ – атлас простору листів, що індукований атласом $q : Z \to M^2$.

Розглянемо підмножину $\mathcal{H}^{++}\big(\bar{q}\big)$ групи $\mathcal{H}\big(\bar{q}\big)$, яка складається з автоморфізмів $(\bar{h}, \bar{k})$ атласу $\bar{q}$, що відповідають таким вимогам:

– для кожного інтервалу з розщепленими кінцями $\bar{e}_\alpha$ справедливі рівності $\partial_- \bar{h}(e_\alpha) = \bar{h}(\partial_- e_\alpha)$ і $\partial_+ \bar{h}(e_\alpha) = \bar{h}(\partial_+ e_\alpha)$.
– відображення $\bar{h}$ зберігає лінійний порядок на елементах кожного розщепленого кінця кожного ребра з Y_0 (не може обертати лінійні порядки на елементах розщеплених кінців ребер на відміну від вимоги (2) означення 6.8.3).

Лема 6.8.7 (див. [44, Лема 4])**.** $\rho(\mathcal{H}^{++}(\Delta_q)) = \mathcal{H}^{++}(\bar{q})$.

Зокрема, $\mathcal{H}^{++}(\bar{q})$ є підгрупою $\mathcal{H}(\bar{q})$.

Означення 6.8.8. Автоморфізм $(\bar{h}, \bar{k})$ атласу $\bar{q}$ назвемо *ізотопним до тотожного автоморфізму* $(\mathrm{id}_{Y_0}, \mathrm{id}_Y)$, якщо існує пара ізотопій

$$H : Y_0 \times I \to Y_0\,, \quad K : Y \times I \to Y\,,$$

яка відповідає наступним вимогам:

(1) $h_0 = H(-,0) = \bar{h}$, $k_0 = K(-,0) = \bar{k}$, $h_1 = H(-,1) = \mathrm{id}_{Y_0}$, $k_1 = K(-,1) = \mathrm{id}_Y$;

(2) для кожного $t \in I$ пара $(h_t, k_t) = (H(-,t), K(-,t))$ є автоморфізмом атласу $\bar{q}$, тобто виконується рівність $\bar{q} \circ h_t = k_t \circ \bar{q}$.

Позначимо через $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q})$ множину всіх автоморфізмів атласу $\bar{q}$, які ізотопні до тотожного автоморфізму $(\mathrm{id}_{Y_0}, \mathrm{id}_Y)$. Безпосередня перевірка показує, що $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q})$ є нормальною підгрупою $\mathcal{H}(\bar{q})$.

Лема 6.8.9 (див. [44, Лема 5], а також Теорему 6.1.4)**.** *Автоморфізм* $(\bar{h}, \bar{k})$ *атласу* $\bar{q}$ *належить до підгрупи* $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q})$ *тоді й лише тоді, коли*

(а) $\bar{h}(\bar{e}) = \bar{e}$ *для кожного ребра з розщепленими кінцями;*

(б) $\bar{h}(v) = v$ *для кожного* $v \in Y_0$*, що належить розщепленому кінцю будь-якого ребра.*

Зокрема, $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q})$ є (нормальною) підгрупою $\mathcal{H}^{++}(\bar{q})$. Позначимо

$$\pi_0\mathcal{H}^{++}(\bar{q}) = \mathcal{H}^{++}(\bar{q})/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q}).$$

Лема 6.8.10 (див. [44, Лема 6])**.**

$$\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q) = \rho^{-1}(\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q})) \quad і \quad \rho(\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta_q)) = \mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\bar{q}).$$

Теорема 6.8.11 (див. [44, Теорема 2])**.** *Гомоморфізм* ρ *індукує ізоморфізм груп* $\pi_0\mathcal{H}^{++}(\Delta_q)$ *і* $\pi_0\mathcal{H}^{++}(\bar{q})$.

Література

[1] Aluffi Paolo. *Algebra: Chapter 0.* Vol. 104. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009, pp. xix + 713.

[2] Andronov A. and Pontryagin L. “Systèmes grossiers”. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 14 (1937), pp. 247–251.

[3] Aranson S. Kh., Grines V. Z., and Kaimanovich V. A. “Classification of supertransitive 2-webs on surfaces”. *J. Dynam. Control Systems* 9:4 (2003), pp. 455–468.

[4] Aranson S. Kh., Zhuzhoma E. V., and Medvedev V. S. “On the continuity of geodesic frames of flows on surfaces”. *Mat. Sb.* 188:7 (1997), pp. 3–22.

[5] Boothby William M. “The topology of regular curve families with multiple saddle points”. *American Journal of Mathematics* 73:2 (1951), pp. 405–438.

[6] Boothby William M. “The Topology of the Level Curves of Harmonic Functions with Critical Points”. *American Journal of Mathematics* 73:3 (1951), pp. 512–538.

[7] Bronstein Idel and Nikolaev Igor. “Peixoto graphs of Morse-Smale foliations on surfaces”. *Topology Appl.* 77:1 (1997), pp. 19–36.

[8] Brown Ronald. *Topology and groupoids.* 2006, с. 538.

[9] Budnyts’ka N. V. and Pryshlyak O. O. “Equivalence of closed 1-forms on surfaces with edge”. *Ukrain. Mat. Zh.* 61:11 (2009), pp. 1455–1472.

[10] Budnyts’ka N. V. and Rybalkina T. V. “Realization of a closed 1-form on closed oriented surfaces”. *Ukrainian Math. J.* 64:6 (2012), pp. 844–856.

[11] Church P. T. and Timourian J. G. “Differentiable open maps of $(p+1)$-manifold to p-manifold”. *Pacific J. Math.* 48:1 (1973), pp. 35–45.

[12] Epstein D. B. A. “Curves on 2-manifolds and isotopies”. *Acta Mathematica* 115 (1966), pp. 83–107.

[13] Farber Michael. *Topology of closed one-forms.* Vol. 108. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2004, pp. xii+246.

[14] Godbillon Claude. *Feuilletages: Études géométriques.* Vol. 98. Progress in Mathematics. Birkhauser, 1991, p. 491.

[15] Jenkins James and Morse Marston. “Conjugate nets on an open Riemann surface”. *Lectures on functions of a complex variable.* The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1955, pp. 123–185.

[16] Jenkins James and Morse Marston. “Conjugate nets, conformal structure, and interior transformations on open Riemann surfaces”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 39:12 (1953), pp. 1261–1268.

[17] Jenkins James and Morse Marston. “Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates”. *American Journal of Mathematics* 74:1 (1952), pp. 23–51.

[18] Jenkins James and Morse Marston. “Curve families F^* locally the level curves of a pseudoharmonic function”. *Acta Mathematica* 91:1 (1954), pp. 1–42.

[19] Kamke E. “Zur theorie der differentialgleichungen”. *Mathematische Annalen* 99:1 (1928), pp. 602–615.

[20] Kaplan Wilfred. “Regular curve-families filling the plane, I”. *Duke Mathematical Journal* 7:1 (1940), pp. 154–185.

[21] Kaplan Wilfred. “Regular curve-families filling the plane, II”. *Duke Mathematical Journal* 8:1 (1941), pp. 11–46.

[22] Kaplan Wilfred. “Topology of level curves of harmonic functions”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 63:3 (1948), pp. 514–522.

[23] Leinster Tom. *Basic category theory.* Vol. 143. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, pp. viii + 183.

[24] MacLane S. *Categories for the working mathematician.* Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1978, p. 317.

[25] Maksymenko Sergiy and Nikitchenko Oleksii. *Fundamental groupoids and homotopy types of non-compact surfaces.* 2021. arXiv: `2104.13683 [math.AT]`.

[26] Maksymenko Sergiy and Polulyakh Eugene. “Characterization of striped surfaces”. *Proceedings of the International Geometry Center* 10:2 (2017), pp. 24–38.

[27] Maksymenko Sergiy and Polulyakh Eugene. “Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces”. *Methods Funct. Anal. Topology* 22:3 (2016), pp. 266–282.

[28] Maksymenko Sergiy and Polulyakh Eugene. “Foliations with non-compact leaves on surfaces”. *Proceedings of the International Geometry Center* 8:3-4 (2015), pp. 17–30. eprint: `1512.07809`.

[29] Maksymenko Sergiy and Polulyakh Eugene. “One-dimensional foliations on topological manifolds”. *Proceedings of the International Geometry Center* 9:2 (2016), pp. 1–23.

[30] Maksymenko Sergiy, Polulyakh Eugene, and Soroka Yuliya. “Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces”. *Proceedings of the International Geometry Center* 10:1 (2017), pp. 22–46.

[31] Morse Marston. “La construction topologique d’un réseau isotherme sur une surface ouverte”. *J. Math. Pures Appl. (9)* 35 (1956), pp. 67–75.

[32] Morse Marston. “The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces”. *Fund. Math.* 39 (1952), 269–287 (1953).

[33] Oshemkov A. A. “Morse functions on two-dimensional surfaces. Coding of singularities”. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 205:Novye Rezult. v Teor. Topol. Klassif. Integr. Sistem (1994), pp. 131–140.

[34] Oshemkov A. A. and Sharko V. V. “On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds”. *Mat. Sb.* 189:8 (1998), pp. 93–140.

[35] Palis Jacob and Melo Welington de. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Transl. from the Portuguese by A. K. Manning.* Springer-Verlag New York, 1982, p. 209.

[36] Peixoto M. M. «Structural stability on two-dimensional manifolds». *Topology* 1:2 (1962), c. 101—120.

[37] Peixoto M. M. “Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark.” *Topology* 2 (1963), pp. 179–180.

[38] Plachta L. P. “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. I. Topological classification”. *Proceedings of the Lviv Topological Seminar (1999/2000).* Vol. 128. 1. Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 2003, pp. 63–91.

[39] Plachta L. P. “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. II. The problem of realization and some estimates”. *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya* 44:2 (2001), pp. 7–16.

[40] Plachta L. P. “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. III. The problem of realization and some estimates”. *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya* 44:3 (2001), pp. 7–16.

[41] Polulyakh Eugene and Yurchuk Iryna. *On the pseudo-harmonic functions defined on a disk.* Vol. 80. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. Kyïv: Instytut Matematyky NAN Ukraïny, 2009, p. 151.

[42] Sharko V. V. “Smooth and topological equivalence of functions on surfaces”. *Ukr. Math. Journ.* 55:5 (2003), pp. 832–846.

[43] Sharko V. V. and Soroka Yu. Yu. “Topological equivalence to a projection”. *Methods of Functional Analysis and Topology* 21:1 (2015), pp. 3–5.

[44] Soroka Yuliya. “Homeotopy groups for nonsingular foliations of the plane”. *Український Математичний Журнал* 69:7 (2017), pp. 1000–1008.

[45] Soroka Yuliya. “Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane”. *Methods Funct. Anal. Topology* 22:3 (2016), pp. 283–294.

[46] Tamura Itiro. *Topology of foliations: an introduction.* Vol. 97. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, p. 198.

[47] Whyburn G. *Analytic topology.* Vol. 28. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1942, p. 280.

[48] Арансон С. Х. и Гринес В. З. «О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем)». *Мат. сборник* 90(132):3 (1973), с. 372—402.

[49] Арансон С. Х. и Гринес В. З. «Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях». *Успехи мат. наук* 41:1(247) (1986), с. 149—169.

[50] Болсинов А. В. и Фоменко А. Т. *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем.* Москва: Наука, 1997, с. 352.

[51] Зорич В. А. *Математический анализ.* Т. 1. М.: МЦНМО, 2002, с. 674.

[52] Полулях Е. А. «Графы Кронрода - Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I». *Укр. мат. журн.* 67:3 (2015), с. 375—396.

[53] Рохлин В. А. и Фукс Д. Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* М.: Наука, 1977, с. 496.

[54] Стоилов С. *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций.* Москва: Наука, 1964, с. 227.

[55] Шарко В. В. «Гладкие функции на некомпактных поверхностях». *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* 3:3 (2006), с. 443—473.

Євген Полулях

Інститут математики НАН України,

вул. Терещенківська 3, Київ, 01024, Україна

Email: `polulyah@imath.kiev.ua`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 594–643

Задачі теорії наближень в абстрактних лінійних просторах

А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч

Присвячується світлій пам'яті Олександра Івановича Степанця

Abstract. This review presents the results, which cover the study of current problems of approximation theory in abstract linear spaces. Such research has been actively developed since the 2000s, based on the ideas and approaches initiated in the articles by Stepanets. In particular, the review contains results concerning the best, best n-term approximations and widths of some functional compacts in the spaces $\mathcal{S}^p$. Direct and inverse approximation theorems are also formulated in these spaces.

Анотація. В даній оглядовій роботі наведено результати, які охоплюють дослідження актуальних проблем теорії апроксимації в абстрактних лінійних просторах. Такі дослідження набули активного розвитку, починаючи з 2000-х років, на базі ідей та підходів, започаткованих в роботах О. І. Степанця. Зокрема, в огляді містяться результати, які стосуються найкращих, найкращих n-членних наближень та поперечників деяких функціональних компактів у просторах $\mathcal{S}^p$, а також сформульовано прямі та обернені теореми наближення у цих просторах.

1. Вступ

Результати наукових досліджень, які будуть висвітлені у даній оглядовій роботі, виникли внаслідок пошуку О. І. Степанцем, його учнями та послідовниками нових підходів до задач теорії наближення функцій багатьох змінних і, зокрема, періодичних функцій. В цій теорії існує багато проблем і одними з визначальних, напевно, є такі: вибір апроксимативних агрегатів, вибір класів функцій та апроксимаційних характеристик. В той час, як в одновимірному випадку вигляд найпростішого агрегату наближення визначається природним порядком натурального ряду, в багатовимірному випадку, тобто, коли задано абстрактну

2010 Mathematics Subject Classification: 41A65, 41A46, 41A29, 41A17, 42A10
УДК 517.5
Ключові слова: поперечник, найкраще n-членне наближення, пряма теорема наближення, обернена теорема наближення, нерівність Джексона, модуль гладкості.

множину $\mathfrak{X}$ – банахів простір функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1 \dots, x_d)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, d змінних, вибір найпростіших агрегатів є дещо проблематичним. Перші труднощі тут починаються з того, що саме слід вважати аналогом частинної суми для кратного ряду

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots k_d), \tag{1.1}$$

де $\mathbb{Z}^d$ – цілочисельна решітка в $\mathbb{R}^d$. Природним є розгляд «прямокутних» сум і відповідних їм апроксимативних агрегатів – у періодичному випадку тригонометричних поліномів вигляду

$$\sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=-n_d}^{n_d} c_{k_1,\dots,k_d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 t_1 + \dots + k_d t_d)}. \tag{1.2}$$

Проте частинні суми кратного ряду можна означати багатьма іншими способами, зокрема, наприклад, у такий спосіб. Нехай $\{G_\alpha\}$ – сім'я обмежених областей взаємно неперетинних в $\mathbb{R}^d$, які залежать від параметра α, $\alpha \in \mathbb{N}$, і такі, що будь-який вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ належить усім областям G_α при достатньо великих значеннях α. Тоді вираз $\sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{\mathbf{k}}$ називають частинною сумою ряду (1.1), яка відповідає області G_α. За аналогією з цим вводяться і відповідні частинні суми тригонометричних рядів:

$$\sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kx}} = \sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{k_1\dots k_d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)}. \tag{1.3}$$

Досить швидко виявилось, що у випадку наближення функцій з відомих класів Соболєва $W_p^r(\mathbb{R}^d)$ замість прямокутних сум вигляду (1.2) доцільніше застосовувати суми (1.3), які побудовані за областями, що визначаються деякими гіперболічними поверхнями. Такі області вперше були введені К. І. Бабенком в [27, 26] і отримали назву гіперболічних хрестів. Їх поява дала істотний поштовх у розвитку сучасної теорії наближення функцій багатьох змінних. В цьому напрямку отримано велику кількість важливих та цікавих результатів, з яким можна ознайомитись, наприклад, з робіт [69, 19, 43, 6].

Слід зазначити, що більшість результатів, які стосуються наближення функцій з використанням гіперболічних хрестів, у просторах $L_p(\mathbb{R}^d)$ мають порядковий характер, а точні рівності отримуються лише у гільбертових просторах (при $p = 2$). Спроби використання гіперболічних хрестів, а також їх модифікацій – ступінчастих гіперболічних хрестів при наближенні функцій з класів, відмінних від соболєвських, взагалі кажучи, бажаних результатів майже не дають. У зв'язку з цим, природно, виникає припущення, що для кожного конкретного класу $\mathfrak{N}$ (або ж деякої сім'ї таких класів) потрібно підбирати відповідну йому сім'ю областей G_α, яка визначається його параметрами.

Іншою причиною, яка ускладнює отримання точних результатів по наближенню функцій багатьох змінних є історично сформована практика розглядати задачі саме у просторах $L_p(\mathbb{R}^d)$. У періодичному випадку норма в цих просторах означається рівністю

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d. \tag{1.4}$$

і характеризує величину середнього значення p-го степеня модуля заданої функції.

При $p = 2$ добре відомою є рівність Парсеваля

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |c_\mathbf{k}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $c_\mathbf{k} = c_{k_1,\ldots,k_d}$ – коефіцієнти Фур'є функції f. Тобто, у цьому випадку норма функції f повністю характеризує всю множину $\{c_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ (при інших значеннях p, зрозуміло, подібні рівності можливі лише у тривіальних випадках). Тому є доцільною спроба введення норм функцій за допомогою величин, пов'язаних саме з їх коефіцієнтами Фур'є. Такий підхід розглядався, зокрема, у роботах [65, 39] та ін., але найбільш ретельно був розвинутий, починаючи з 2000-х років, у циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників [49, 50, 51, 53, 57, 56, 55, 52, 17, 60, 59, 58, 64, 62, 2, 1, 23, 31, 33, 36, 34, 44, 46, 13, 47, 70, 78, 84, 79, 77, 83, 81, 80, 82, 15].

Цей підхід, зокрема, дозволяє розповсюджувати ідеї та методи теорії наближень на абстрактні лінійні простори, що в свою чергу, дає можливість дивитись на функції з загальних позицій аналізу та дозволяє отримувати завершені змістовні результати.

2. Наближення в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$

2.1. **Означення і деякі властивості просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$.** Нехай $\mathfrak{X}$ – деякий лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – фіксована зліченна лінійно незалежна система в ньому, і нехай існує комплекснозначна функція (x, y), визначена для кожної пари $x, y \in \mathfrak{X}$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, така, що виконуються умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, де $\overline{z}$ – число, комплексно-спряжене з z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y), \quad \lambda,\ \mu$ – довільні числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Тобто, визначено скалярний добуток елементів простору $\mathfrak{X}$ із елементами системи φ.

Кожному елементу $x \in \mathfrak{X}$ ставиться у відповідність послідовність чисел $\widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають простори $\mathcal{S}^p_\varphi = \mathcal{S}^p_\varphi(\mathfrak{X})$ всіх елементів $x \in \mathfrak{X}$ зі скінченною (квазі-)нормою

$$\|x\|_p := \|x\|_{p,\varphi} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

При цьому елементи $x, y \in \mathfrak{X}$ вважаються тотожними в $\mathcal{S}^p_\varphi$, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Зрозуміло, що при $p = 2$ простір $\mathcal{S}^2_\varphi$ за умови його повноти є гільбертовим. При всіх інших $p \in (0, \infty)$ простори $\mathcal{S}^p_\varphi$ наслідують важливі властивості гільбертових просторів – рівність Парсеваля у вигляді співвідношення (2.1) і мінімальну властивість частинних сум ряду Фур'є, яка формулюється в такий спосіб:

Твердження 2.1 ([49, 50])**.** *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p \in (0, \infty)$,*

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\varphi_k \tag{2.2}$$

– ряд Фур'є елемента f за системою φ і

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

– частинні суми цього ряду. При даному $n \in \mathbb{N}$ серед усіх поліномів вигляду $\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, найменше відхиляється від f частинна сума $S_n(f)$, тобто,

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_n\|_p = \|f - S_n(f)\|_p.$$

Крім того, виконується рівність

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{f}(k)|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^p. \tag{2.3}$$

При $n \to \infty$ права частина в (2.3) прямує до нуля. Тобто, для довільного елемента f з $\mathcal{S}^p_\varphi$ його ряд Фур'є (2.2) збігається до f, система φ є повною в $\mathcal{S}^p_\varphi$, а простір $\mathcal{S}^p_\varphi$ сепарабельний.

Звернемо увагу ще на одну властивість просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$: *якщо систему* $\varphi' = \{\varphi'_k\}_{k=1}^\infty$ *отримано із системи* $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ *шляхом будь-якої перестановки її членів, то справджуються рівності*

$$\mathcal{S}^p_\varphi = \mathcal{S}^p_{\varphi'}, \quad \text{і} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in \mathcal{S}^p_\varphi. \tag{2.4}$$

Цей факт випливає з означення просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$ та рівності (2.1).

Останнє зауваження дає можливість узагальнити твердження 2.1 наступним чином.

Твердження 2.2 ([52]). *Нехай* $\{g_\alpha\}$ *– сім'я обмежених підмножин, які залежать від параметра* $\alpha \in \mathbb{N}$ *і таких, що будь-яке число* $n \in \mathbb{N}$ *належить усім множинам* g_α *з достатньо великими індексами* α. *Нехай, далі,* $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p \in (0,\infty)$, *і*

$$S_{g_\alpha}(f) = S_{g_\alpha}(f)_\varphi = \sum_{k \in g_\alpha} \widehat{f}(k)\varphi_k$$

– частинна сума ряду $S[f]_\varphi$, *яка відповідає множині* g_α. *Тоді серед усіх сум вигляду* $\Phi_{g_\alpha} = \sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, *найменше відхиляється від* f *частинна сума* $S_{g_\alpha}(f)$, *тобто*

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_{g_\alpha}\|_p = \|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p.$$

При цьому

$$\|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k\in g_\alpha} |\widehat{f}(k)|^p$$

і

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p = 0.$$

2.2. **Деякі реалізації та узагальнення.** Розглянемо декілька прикладів реалізацій та узагальнень розглядуваних у п. 2.1 побудов (див., наприклад, [52]).

2.2.1. **Простори $\mathcal{S}^p$.** Нехай $\mathbb{R}^d$ – d-вимірний, $d \geq 1$, евклідів простір, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ – його елементи, $\mathbb{Z}^d$ – цілочисельна решітка в $\mathbb{R}^d$, тобто, множина векторів $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ з цілочисельними координатами,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d,$$

$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ і, зокрема, $(\mathbf{k},\mathbf{x}) = k_1x_1 + \cdots + k_dx_d$, $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$.

Нехай, далі, $L = L(\mathbb{T}^d)$ – множина всіх 2π-періодичних за кожною зі змінних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_d)$, сумовних на кубі періодів

$$\mathbb{T}^d := [0, 2\pi)^d.$$

Якщо $f \in L$, то через $S[f]$ позначають ряд Фур'є функції f за тригонометричною системою $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, тобто

$$S[f] = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{2.5}$$

де

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d. \tag{2.6}$$

Якщо ототожнити функції, еквівалентні відносно міри Лебега, то за простір $\mathcal{X}$ можна взяти простір $L(\mathbb{T}^d)$, а за систему φ – тригонометричну систему $\tau = \{\tau_s(\mathbf{x})\}_{s=1}^{\infty}$, де

$$\tau_s(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_s,\mathbf{x})}, \quad \mathbf{k}_s\in\mathbb{Z}^m, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

утворену із системи $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ шляхом довільної нумерації її елементів; скалярний добуток в такому випадку задається у відомий спосіб:

$$(f,\tau_s) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{\tau}_s(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{k}_s) = \widehat{f}_\tau(s). \tag{2.8}$$

Отримані при цьому множини $\mathcal{S}^p_\tau$ згідно з (2.4) не залежать від нумерації системи $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ і надалі позначаються через $\mathcal{S}^p$.

2.2.2. **Простори l_p.** Виберемо тепер в ролі $\mathcal{X}$ – простір усіх послідовностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ комплексних чисел, у якому операції додавання та множення на скаляр визначаються в стандартний спосіб. У ролі φ – систему послідовностей $e = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $e_k = \{e_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$ такі, що $e_{kk} = 1$ і $e_{ki} = 0$ при $k \neq i$.

Скалярний добуток елементів $x \in \mathcal{X}$ на елементи системи e визначимо співвідношеннями

$$(x, e_k) = \widehat{x}_e(k) = x_k, \quad (e_k, x) = \overline{x_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

і при фіксованому $p \in (0,\infty)$ розглянемо простори $\mathcal{S}^p_e(\mathcal{X})$ всіх послідовностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ комплексних чисел зі скінченною (квазі-)нормою

$$\|x\|_{p,e} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{x}_e(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1$'$}$$

Очевидно, що $\mathcal{S}^p_e(\mathcal{X})$ збігаються з відомими просторами послідовностей l_p.

2.2.3. **Простори** $\mathcal{S}^{p,\,\mu}_{\varphi}$ є деяким узагальненням просторів $\mathcal{S}^p_{\varphi}$. Вони були введені в роботі О. І.Степанця та В. І. Рукасова [59] і будуються за тією ж схемою, що й останні, однак в цьому випадку функціонал вигляду

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

у співвідношенні (2.1) слід замінити на функціонал з вагою μ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\cdot|^p\mu_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\mu=\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – задана система невід'ємних чисел, $\mu_k\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$. При цьому якщо $\mu_k\equiv 1$, то $\mathcal{S}^{p,\,\mu}_{\varphi}=\mathcal{S}^p_{\varphi}$.

2.2.4. **Простори** $\mathcal{S}^p_{\Phi}$ введено в 2003 році О. І. Степанцем [57]. При їх означенні використовуються подібна до наведених вище схема, яка полягає в наступному. Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ – деякі лінійні комплексні простори векторів x та y відповідно. Припустимо, що на $\mathcal{X}$ задано лінійний оператор Φ, який діє в $\mathcal{Y}$, а на деякій підмножині $\mathcal{Y}'\subset\mathcal{Y}$ визначено функціонал f. Нехай, далі, $E(\Phi)$ – множина значень оператора Φ, і $\mathcal{X}'$ – прообраз множини $\mathcal{Y}'\subset E(\Phi)$ при відображенні Φ. В такому випадку на $\mathcal{X}'$ можна визначити функціонал f' за допомогою рівності

$$f'(x)=f(\Phi(x)),\qquad x\in\mathcal{X}' \tag{2.9}$$

Якщо в ролі f вибрати функціонал, що задає на $\mathcal{Y}'$ норму (або квазінорму), то рівність (2.9) буде визначати аналогічну величину на $\mathcal{X}'$.

Нехай $(\mathbb{R}^d,d\mu)$, $d\ge 1$, – d-вимірний евклідів простір точок

$$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d),$$

визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$ зі скінченною σ-аддитивною неперервною мірою, A – μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d,\mathrm{d}\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a – або скінченне число, або ж $a=\infty$; $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}(A,\mathrm{d}\mu)$ – множина всіх заданих на A функцій $y=y(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $\mathrm{d}\mu$.

При заданому $p\in(0,\infty]$ через $L_p(A,\mathrm{d}\mu)$ позначають підмножину функций з $\mathcal{Y}(A,\mathrm{d}\mu)$, для яких є скінченною (квазі-)норма

$$\|y\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)}=\begin{cases}\left(\int_A|\,y(\mathbf{x})|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, & p\in(0,\infty),\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbf{x}\in A}|\,y(\mathbf{x})|, & p=\infty.\end{cases} \tag{2.10}$$

Нехай тепер $\mathfrak{X}$ – деякий лінійний простір векторів x, і Φ — лінійний оператор, який діє з $\mathfrak{X}$ в $\mathcal{Y}(A, \mathrm{d}\mu)$:

$$\Phi : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}(A, \mathrm{d}\mu), \quad \Phi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \widehat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \widehat{x} \in \mathcal{Y}(A, \mathrm{d}\mu).$$

При довільному фіксованому $p \in (0, \infty]$ покладають

$$\mathcal{S}^p_\Phi = \mathcal{S}^p_\Phi\,(\mathfrak{X}; \mathcal{Y}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi} = \|\widehat{x}\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)} < \infty \right\}.$$

Елементи $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ вважають тотожними в $\mathcal{S}^p_\Phi$, якщо за мірою $\mathrm{d}\mu$ майже скрізь $\widehat{x}_1(\mathbf{t}) = \widehat{x}_2(\mathbf{t})$.

Таким чином, множина $\mathcal{S}^p_\Phi$ – множина всіх векторів $x \in \mathfrak{X}$, які є прообразами функцій з множини $L_p(A, \mathrm{d}\mu)$ при відображенні Φ.

Простори $\mathcal{S}^{p,\mu}_\varphi$ (а отже, і $\mathcal{S}^p_\varphi$) є частковими випадками просторів $\mathcal{S}^p_\Phi$. Дійсно, якщо в даному просторі $\mathfrak{X}$ означити оператор Φ, який кожному $x \in \mathfrak{X}$ ставить у відповідність послідовність $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty$, де $y_k = \widehat{x}_\varphi(k)$; за множину $(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\mu)$ взяти простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $\mathrm{d}\mu$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^1$ цілочисельних точок k, в яких $\mu(k) \equiv \mu_k$; і покласти $A = \left\{ k \in \mathbb{Z}^1 \mid k \geq 1 \right\}$, то в такому випадку $\mathcal{Y}(A, \mathrm{d}\mu)$ – множина всіх послідовностей y, для яких є скінченною величина

$$\|y\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)} = \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty)$$

2.3. ψ-інтеграли та характеристичні послідовності.

2.3.1. У 2001 році О. І. Степанець ввів до розгляду наступні об'єкти наближення у просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$, тобто, підмножини елементів, які відповідають в класичній теорії апроксимації поняттю класу функцій [50], [53, Гл. 11].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел. Якщо для данного елемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фур'є якого має вигляд (2.2), існує елемент $F \in \mathfrak{X}$, для якого ряд Фур'є $S[F]_\varphi$ має вигляд

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^\infty \psi_k \widehat{f}(k) \varphi_k, \tag{2.11}$$

тобто, коли

$$\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

то елемент F називається ψ-інтегралом елемента f. В такому випадку записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ позначають множину ψ-інтегралів усіх елементів з $\mathfrak{N}$. Зокрема, $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$ – множина ψ-інтегралів всіх елементів, які належать даному простору $\mathcal{S}^p_\varphi$.

Якщо f і F пов'язані співвідношенням (2.11) або (2.12), то f називають ψ-похідною елемента F і позначають $f = D^{\psi}F = F^{\psi}$.

Надалі обмежуємося випадком, коли система φ задовольняє умову

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{2.13}$$

Зрозуміло, що ця умова забезпечує вкладення $\psi\mathcal{S}^p_{\varphi} \subset \mathcal{S}^p_{\varphi}$, яке має місце, зокрема, за умови обмеженості множини чисел $|\psi_k|$, $k \in \mathbb{N}$.

Нехай

$$U^p_{\varphi} = \big\{ f \in \mathcal{S}^p_{\varphi} : \quad \|f\|_p \le 1 \big\} \tag{2.14}$$

– одинична куля у даному просторі $\mathcal{S}^p_{\varphi}$ і ψU^p_{φ} – множина ψ-інтегралів всіх елементів з U^p_{φ}. Саме множини ψU^p_{φ} є основними об'єктами апроксимації в просторах $\mathcal{S}^p_{\varphi}$. Якщо простір $\mathcal{S}^p_{\varphi}$ є повним, а

$$\psi_k \ne 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

то внаслідок (2.12) та (2.14)

$$\psi\, U^p_{\varphi} = \left\{ f \in \mathcal{S}^p_{\varphi} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\}, \tag{2.16}$$

тобто, множина $\psi\, U^p_{\varphi}$ є p-еліпсоїдом в просторі $\mathcal{S}^p_{\varphi}$ з півосями, які дорівнюють $|\psi_k|$.

2.3.2. Конструкцію агрегатів, які використовуються для наближення елементів $f \in \mathcal{S}^p_{\varphi}$, зручно визначати за допомогою спеціально підібраних характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ і $\delta(\psi)$ системи ψ, які задаються в такий спосіб [50], [53, Гл. 11].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умову (2.13). Через

$$\varepsilon(\psi) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$$

позначають множину значень величин $|\psi_k|$, впорядковану за їх спаданням, через

$$g(\psi) = \{g_1, g_2, \ldots\}$$

– послідовність множин

$$g_n = g_n(\psi) = \big\{ k \in \mathbb{N} : |\psi_k\,| \ge \varepsilon_n \big\}$$

і через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які належать множині g_n. Через $g_0 = g_0(\psi)$ позначають порожню множину і вважають, що $\delta_0 = 0$.

Враховуючи умову (2.13), послідовності $\varepsilon(\psi)$ і $g(\psi)$ можна визначити такими співвідношеннями:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_k|, g_1 = \{k \in \mathbb{N}: \ |\psi_k| = \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_n = \sup_{k\bar{\in} g_{n-1}} |\psi_k|, \\ g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N}: \ |\psi_k| = \varepsilon_n\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

За такого означення будь-яке число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам g_n з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty. \tag{2.18}$$

Зазначимо також, що якщо $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $|\psi_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, то має місце рівність

$$\widetilde{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.19}$$

2.4. **Найкращі наближення індивідуальних елементів множин $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$.** Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, підпорядкованих умові (2.13), і $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ та $\delta(\psi)$ – відповідні їй характеристичні послідовності.

Величину

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f - \sum_{k\in g_{n-1}(\psi)} c_k\, \varphi_k \Big\|_p \tag{2.20}$$

називають найкращим наближенням елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ довільними поліномами, побудованими по областях $g_{n-1}(\psi)$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між найкращим наближенням елемента f і найкращими наближеннями його ψ-похідних. Подібні твердження в теорії наближень прийнято називати прямими теоремами.

Теорема 2.3 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p > 0$ і система*

$$\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$$

підпорядкована умовам (2.13) *та* (2.15)*. Тоді ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\,\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f)_{\psi,p}$$

збігається і при довільному $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)\, E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}\,, \tag{2.21}$$

у якому величини $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ визначаються рівністю (2.20)*, а ε_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – елементи характеристичної послідовності $\varepsilon(\psi)$.*

Теорема 2.4 у певному розумінні є оберненою до попередньої: у ній за властивостями найкращого наближення елемента f стверджується про існування у нього похідних і дається інформація про найкраще наближення цих похідних.

Теорема 2.4 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi \cap \psi\mathfrak{X}$, $p > 0$, система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ підпорядкована умовам (2.13) та (2.15) і*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,p} = 0. \tag{2.22}$$

Тоді для того, щоб виконувалось включення $f \in \psi\mathcal{S}^p_\varphi$, необхідно та достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{k=2}^\infty (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}. \tag{2.23}$$

Якщо цей ряд збігається, то при довільному $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^\infty (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}\ , \tag{2.24}$$

у якому величини $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ та ε_k мають той же сенс, що і в теоремі 2.3.

2.5. **Найкращі наближення та базисні поперечники q-еліпсоїдів.**

2.5.1. **Означення найкращих наближень та базисних поперечників.** Нехай f – довільний елемент простору $\mathcal{S}^p_\varphi$ і γ_n, $n \in \mathbb{N}$, – будь-який набір з n різних натуральных чисел. Величину

$$E_{\gamma_n}(f)_p = \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f - \sum_{k\in\gamma_n} c_k\, \varphi_k \Big\|_p \tag{2.25}$$

називають найкращим наближенням елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ n-членними поліномами, що відповідають набору γ_n.

Нехай, далі, $S_{\gamma_n}(f) = S_{\gamma_n}(f)_\varphi = \sum_{k\in\gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k$– сума Фур'є, яка відповідає набору γ_n, і

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_p = \| f - S_{\gamma_n}(f)\|_p \tag{2.26}$$

– наближення елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ сумою Фур'є, що відповідає набору γ_n.

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина простору $\mathcal{S}^p_\varphi$, тоді через $E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p$ та $\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p$ позначають точні верхні межі величин (2.25) та (2.26) по множині $\mathfrak{N}$, тобто,

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_p \quad \text{та} \quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_p. \tag{2.27}$$

Характеристики

$$\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_p = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p \quad \text{та} \quad \mathcal{D}^\perp_n(\mathfrak{N})_p = \inf_{\gamma_n} \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p \tag{2.28}$$

називають базисним та проєкційним поперечниками порядку n множини $\mathfrak{N}$ в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$.

Зазначимо, що у випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величинам $\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_p$ відповідають тригонометричні (базисні) поперечники, а величинам $\mathcal{D}^\perp_n(\mathfrak{N})_p$ – проєкційні (Фур'є) поперечники.

2.5.2. **Найкращі наближення та поперечники q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ при $0 < q \le p$.** Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умови (2.13) та (2.15) і q – довільне додатне число таке, що $0 < q \le p$. У ролі множин $\mathfrak{N}$ у співвідношеннях (2.27) та (2.28) будемо вибирати множини $\psi\, U^q_\varphi$ q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$, які задаються рівністю (2.16) при $p = q$.

Оскільки (див., наприклад, [73]) для будь-якої невід'ємної послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \ge 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^q\right)^{1/q}, \quad 0 < q \le p, \tag{2.29}$$

то

$$S^q_\varphi \subset \mathcal{S}^p_\varphi \quad \text{та} \quad \psi U^q_\varphi \subset \psi U^p_\varphi, \quad 0 < q \le p. \tag{2.30}$$

Для довільної системи комплексних чисел $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ та будь-якого набору γ_n із n різних натуральних чисел через $\psi_{\gamma_n} = \{\psi_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty$ позначимо послідовність чисел таку, що

$$\psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi_k, & k \overline{\in} \gamma_n. \end{cases} \tag{2.31}$$

Теорема 2.5 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15), *і $0 < q \le p$. Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, справджуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1), \tag{2.32}$$

де $\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1)$ *– перший член послідовності* $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$, *яка є спадною перестановкою послідовності* $\{|\psi_{\gamma_n}(k)|\}_{k=1}^{\infty}$.

Нехай $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді, розглядаючи точні нижні межі обох частин рівності (2.32) по всіх можливих наборах γ_n, неважко помітити, що точна нижня межа правої частини (2.32) реалізується набором

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} \ : \ |\psi_{i_k}| = \widetilde{\psi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.33}$$

і при цьому $\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k) = \widetilde{\psi}_{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тому внаслідок (2.28)

$$\mathcal{D}_n(\psi U_\varphi^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_\varphi^q)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \widetilde{\psi}_{n+1}.$$

Отже, має місце таке твердження про точні значення поперечників.

Теорема 2.6 ([52]). *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15), *і* $0 < q \le p$. *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi U_\varphi^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_\varphi^q)_p = \widetilde{\psi}_{n+1}, \tag{2.34}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. *При цьому для набору чисел* γ_n^*, *означеного рівністю* (2.33), *мають місце рівності*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\psi U_\varphi^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_\varphi^q)_p = E_{\gamma_n^*}(\psi U_\varphi^q)_p = \\ = \mathcal{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_\varphi^q)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \widetilde{\psi}_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.5.3. **Найкращі наближення та базисні поперечники q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < p < q$.** Наведемо аналоги теорем 2.5 та 2.6 у випадку, коли $q > p > 0$. Як і вище, припускаємо, що система чисел ψ підпорядкована умові (2.15), а також умові

$$\|\psi\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty, \quad 0 < p < q. \tag{2.36}$$

яка забезпечує вкладення

$$\psi U_\varphi^q \subset \mathcal{S}_\varphi^p, \quad 0 < p < q. \tag{2.37}$$

Теорема 2.7 ([52]). *Нехай* $0 < p < q$, *і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36). *Тоді для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральних чисел,* $n \in \mathbb{N}$, *справджуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(\psi U_\varphi^q)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi U_\varphi^q)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{2.38}$$

де послідовність $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_{\gamma_n}(k)|\}_{k=1}^{\infty}$.

Розглядаючи точні нижні межі обох частин рівності (2.38) по всіх можливих наборах γ_n, можна переконатись, що точна нижня межа правої частини (2.38) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням (2.33). Тому внаслідок (2.28)

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}.$$

Отже, справджується таке твердження про значення поперечників.

Теорема 2.8 ([52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{2.39}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. *При цьому для набору чисел* γ_n^*, *який визначається рівністю* (2.33), *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = E_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_p =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}. \tag{2.40}$$

Звернемо увагу на те, що послідовність $\widetilde{\psi}_k$, $k \in \mathbb{N}$, в загальному випадку є східчастою. Тому внаслідок (2.34) такий самий характер має і величина $\mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_p$ при $p \geq q > 0$. Якщо ж $p < q$, то згідно з (2.39) ця величина строго спадає з ростом параметра n.

Зазначимо, що інтегральні аналоги теорем 2.5–2.8 встановлено в роботах [57, 62, 18, 63, 86]. У роботах [85, 16, 74] твердження теорем 2.5–2.8 було поширено відповідно на простори зі змінним показником підсумовування $l_{\mathbf{p}}$, простори Орлича l_M та модулярні простори Мусєляка-Орлича $l_{\mathbf{M}}$.

2.6. **Наближення поліномами, побудованими по областях $g_n(\psi)$, та колмогоровські поперечники p-еліпсоїдів.**

2.6.1. **Наближення поліномами.** Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умову (2.13). Розглянемо окремо випадок, коли апроксимуючі поліноми визначаються областями $g_n(\psi)$, побудованими по даній системі комплексних чисел ψ згідно з формулами (2.17). Для довільного елемента $f \in \psi\mathcal{S}^p_\varphi$ позначимо

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} := S_{g_n(\psi)}(f) = \sum_{k\in g_n(\psi)} \widehat{f}(k)\,\varphi_k, \quad S_0(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{2.41}$$

де $g_n(\psi)$, $n = 1, 2, \ldots$, – елементи послідовності $g(\psi)$, θ – нульовий елемент простору $\mathcal{S}^p_\varphi$, і

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p} = \|\, f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\,\psi}\|_p. \tag{2.42}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$, то покладаємо

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{\psi,\,p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p}. \tag{2.43}$$

та

$$E_n(\mathfrak{N})_{\psi,\,p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_n(f)_{\psi,\,p}. \tag{2.44}$$

Враховуючи рівності (2.19) та прийняті позначення, наводимо такі твердження – наслідки з теорем 2.5 та 2.7.

Наслідок 2.9 ([52])**.** *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, – довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15)*, і $0 < q \le p$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(\psi U^p_\varphi)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi\, U^p_\varphi)_{\psi,\,p} = \varepsilon_n, \tag{2.45}$$

де ε_n – n-й член характеристичної послідовності $\varepsilon(\psi)$.

Наслідок 2.10 ([52])**.** *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36)*, і $0 < p < q$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(\psi U^q_\varphi)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi U^q_\varphi)_{\psi,p} = \left(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{2.46}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а δ_n – члени характеристичної послідовності $\delta(\psi)$.

2.6.2. **Колмогоровські поперечники p-еліпсоїдів.** Нехай Y – лінійний нормований простір, $\mathfrak{M}$ – центрально-симетрична множина в ньому і $\mathcal{F}_n$ – множина всіх підпросторів F_n розмірності $n \in \mathbb{N}$ простору Y. Величину

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n\in\mathcal{F}_n} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \inf_{u\in F_n} \|x-u\|_Y$$

називають поперечником за Колмогоровим множини $\mathfrak{M}$ у просторі Y.

Теорема 2.11 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, – система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15)*. Тоді при довільних $p \in [1, \infty)$ та $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi U_\varphi^p) = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^p) = \ldots$$

$$= d_{\delta_n - 1}(\psi U_\varphi^p) = E_n(\psi U_\varphi^p)_{\psi,p} = \varepsilon_n, \tag{2.47}$$

у яких δ_s та ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ – елементи характеристичних послідовностей $\delta(\psi)$ та $\varepsilon(\psi)$ системи ψ, а $\delta_0 = 0$.

Зазначимо, що у скінченно вимірних просторах l_p^d твердження, аналогічне до теореми 2.11, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії А. Пінкуса [11]. У роботах [85], [16] та [74] твердження теореми 2.11 поширено відповідно на простори зі змінним показником підсумовування $l_{\mathbf{p}}$, простори Орлича l_M та модулярні простори Мусєляка-Орлича $l_{\mathbf{M}}$.

2.7. **Найкращі n-членні наближення.**

2.7.1. **Найкращі n-членні наближення q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < q \le p$.**

Нехай $n \in \mathbb{N}$, γ_n – довільний набір з n натуральних чисел і

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k, \tag{2.48}$$

де α_k – комплексні числа. Величину

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{\alpha_k,\, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_p. \tag{2.49}$$

називають найкращим n-членним наближенням елемента $f \in \mathcal{S}_\varphi^p$ в просторі $\mathcal{S}_\varphi^p$. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}_\varphi^p$, то покладаємо

$$e_n(\mathfrak{N})_p = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f)_p. \tag{2.50}$$

Величини, аналогічні до величин (2.49), вперше введені С. Б. Стєчкіним [66], і їх властивості досліджувались в теорії наближень періодичних функцій багатьма авторами (див., наприклад, [43, 6, 21, 22, 53] та ін.). Варто зазначити, що раніше Е. Шмідт [14] розглядав величину найкращого білінійного наближення, яка в ідейному плані є близькою до величин вигляду (2.49).

В даному підрозділі визначаються величини вигляду (2.50) у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є q-еліпсоїдами $\psi\, U_\varphi^q$ (див. означення (2.16)). Як і вище, вважаємо, що $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умови (2.13) та (2.15). В такому випадку, як вже зазначалося, при $0 < q \le p$ виконується вкладення $\psi U_\varphi^q \subset \mathcal{S}_\varphi^p$, а отже, величина (2.50) має зміст.

Теорема 2.12 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15), *і* $0 < q \le p$. *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{s>n}(s-n)\left(\sum_{k=1}^{s}\widetilde{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \qquad (2.51)$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності чисел* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. *Точна верхня межа в правій частині* (2.51) *досягається при деякому скінченному значенні* s^*.

У випадку, коли всі числа послідовності ψ дорівнюють одиниці, тобто, коли $\psi U_\varphi^q = U_\varphi^q$, $0 < q \le p$, має місце таке твердження.

Теорема 2.13 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < q \le p$. *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n^p(U_\varphi^q)_p = \sup_{s>n}\frac{s-n}{s^{1/q}}. \qquad (2.52)$$

При $p = q$ *точна верхня межа в правій частині* (2.52) *дорівнює одиниці. Якщо ж* $q < p$, *то вона досягається в одній із точок* $\left[\frac{n}{1-q/p}\right]$ *або ж* $\left[\frac{n}{1-q/p}\right]+1$, *де* $[c]$ *– ціла частина числа* c.

2.7.2. **Найкращі n-членні наближення q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при** $0 < p < q$**.** В цьому підрозділі наведено точні значення величини $e_n(\psi U_\varphi^q)_p$ за умови, що $0 < p < q$. Як і вище, припускаємо, що система чисел ψ підпорядкована умові (2.15), а також умові (2.36), яка гарантує вкладення $\psi U_\varphi^q \subset S_\varphi^p$.

Теорема 2.14 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36). *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p = \left((s^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \qquad (2.53)$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності чисел* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$, *а число* s^* *вибране з умови*

$$\widetilde{\psi}_{s^*}^{-q} \le \frac{1}{s^*-n}\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q} < \widetilde{\psi}_{s^*+1}^{-q}. \qquad (2.54)$$

Таке число s^* *існує і едине.*

Зазначимо, що аналоги теорем 2.12, 2.13 та 2.14 у випадку апроксимації інтегралами заданого рангу встановлено в роботах [57, 62, 63]. У просторах l_p^d скінченних послідовностей аналогічні твердження при всіх $0 < p,\ q \le \infty$ отримано в роботі [7].

У роботі [44] твердження теорем 2.12 та 2.14 розповсюджено на простори $\mathcal{S}_\varphi^{p,\mu}$, а в [16] твердження теореми 2.12 дещо розповсюджено на простори Орлича l_M.

2.8. **Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень та поперечників q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$.** Аналіз теорем 2.5–2.8, 2.11 та 2.12–2.14, показує, що точні значення апроксимативних характеристик у теоремах 2.5, 2.6 та 2.11, виражаються у термінах величин, для яких явно прослідковується їх швидкість прямування до нуля при $n \to \infty$. Вирази, у термінах яких визначені точні значення апроксимативних характеристик у теоремах 2.8, 2.12 та 2.14, потребували додаткових досліджень. Такі дослідження були здійснені, зокрема, у роботах [62, 61, 63, 15]. При цьому ефективним виявився розвинений О. І. Степанцем та його учнями апарат дослідження, який базується на наведеній нижче класифікації опуклих функцій [54, Гл.3].

2.8.1. **Класифікація Степанця опуклих функцій.** Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину всіх опуклих донизу функцій $\psi(t)$, неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$:

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t): \ \psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) + \psi(t_2) \ge 0 \\ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Множина $\mathfrak{M}$ досить неоднорідна за швидкістю прямування до нуля при $t \to \infty$ її елементів: функції $\psi(t)$ можуть спадати як дуже повільно, так і дуже швидко. Тому виникає необхідність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини, що об'єднують функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які в певному сенсі мають однакову швидкість прямування до нуля.

В ролі характеристики, за допомогою якої можна здійснити таке розбиття, О. І. Степанець обрав пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, що означаються в такий спосіб. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначають функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \ge 1. \tag{2.55}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, характеристика $\eta(t)$ для всіх $t \ge 1$ з (2.55) визначається однозначно: $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$.

Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

В залежності від поведінки функції μ розрізняють такі підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < \mu(\psi; t) \le K \ \ \forall t \ge 1 \ \ \}^1,$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < K \le \mu(\psi; t) < \infty \ \ \forall t \ge 1 \ \ \},$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 \ \forall t \ge 1\}.$$

Через B позначимо множину всіх монотонно спадних до нуля при $t \to \infty$ функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$, які задовольняють так звану Δ_2-умову:

$$\psi(t) \le K\psi(2t). \tag{2.56}$$

Як показано в [54, Гл.3, §3.16] має місце рівність

$$B \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0. \tag{2.57}$$

Зазначимо, що природними представниками множин $\mathfrak{M}_C$ є функції t^{-r} при $r > 0$, а також функції $t^{-r} \ln^\varepsilon(t+a)$ при довільних $\varepsilon \in \mathbb{R}$, додатних r і a, для яких $a \ge e^{3\varepsilon/r} - 1$ та ін. До множини $\mathfrak{M}_0$ належать також функції $\ln^{-r}(t + a)$ при довільних додатних r і a.

Через $\mathfrak{M}_\infty^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M} \ : \ \mu(\psi; t) \uparrow \infty \ \big\}.$$

З цієї множини виділяють такі підмножини:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \ \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty \ \big\},$$

де

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+),$$

$$\mathfrak{M}_\infty^c = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \quad \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \ 0 < K_1 < \psi(t)/|\psi'(t)| < K_2\big\}$$

і

$$\mathfrak{M}''_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0 \ \big\}.$$

Природними представниками множин $\mathfrak{M}'_\infty$ та $\mathfrak{M}_\infty^c$ є функції $\exp(-\lambda t^s)$, $\lambda > 0$, при $s \in (0, 1)$ та $s = 1$ відповідно. До множини $\mathfrak{M}''_\infty$ належать функції $\exp(-\lambda(t + a)^r)$ при $\lambda > 0$, $r > 1$ і $a \ge ((r - 1)/(r\lambda))^{1/r} - 1$.

---

[1] K, K_1, $K_2, \ldots$ – деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

2.8.2. **Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень та поперечників q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$.** Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ містяться в такому твердженні.

Теорема 2.15 ([62, 61, 15])**.** *Нехай $0 < p, q < \infty$, система чисел $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ задовольняє рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а ψ_1 – деяка додатна функція.*

1) Якщо функція ψ_1^p належить множині B, а при $0 < p < q$, крім цього, при всіх t, більших деякого числа t_0, є опуклою та задовольняє умову

$$t|\psi_1'(t)|/\psi_1(t) \geq K_0 > \beta, \tag{2.58}$$

де $\psi_1'(t) := \psi_1'(t+)$, $\beta = d(1/p - 1/q)$, то

$$e_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)\, n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.^2$$

2) Якщо функція $\psi_1^p \in \mathfrak{M}'_\infty$, то

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)(\eta(\psi_1, n) - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

3) Якщо функція ψ_1^p належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$ або $\mathfrak{M}''_\infty$, то

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1), \quad n \to \infty.$$

Наведемо порядкові оцінки поперечників $\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p$ та $\mathcal{D}^\perp_n(\psi\, U^q_\varphi)_p$ при $0 < p < q < \infty$.

Теорема 2.16 ([62, 15])**.** *Нехай $0 < p < q < \infty$, система чисел*

$$\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$$

при всіх $k \in \mathbb{N}$ задовольняє рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а ψ_1 – деяка додатна функція.

1) Якщо функція ψ_1^p належить множині B, при всіх t, більших деякого числа t_0, є опуклою та задовольняє умову (2.58) *з*

$$\beta = d(1/p - 1/q),$$

то

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \mathcal{D}^\perp_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)\, n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

[2] Для додатних послідовностей $a(n)$ та $b(n)$ вираз "$a(n) \asymp b(n)$" означає, що існують такі сталі $K_1, K_2 > 0$, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $a(n) \leq K_2 b(n)$ і $a(n) \geq K_1 b(n)$.

2) *Якщо функція* $\psi_1^p \in \mathfrak{M}'_\infty$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \psi_1(n+1)(\eta(\psi_1,n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

3) *Якщо функція* ψ_1^p *належить множині* $\mathfrak{M}_\infty^c$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \psi_1(n+1).$$

Порівнюючи порядкові оцінки для величин $e_n(\psi U_\varphi^q)_p$ та $\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p$ бачимо, що у випадку, коли $0 < q \le p$, а послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ така, що при всіх натуральних k виконується рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де функція ψ_1 задовольняє одну з умов 1) чи 2) теореми 2.15, мають місце рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n(\psi U_\varphi^q)_p}{\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_n(\psi U_\varphi^q)_p}{\mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p} = 0.$$

Якщо ж $0 < p < q$ і ψ_1 задовольняє одну з умов 1) чи 2), або ж якщо $0 < p,\ q < \infty$ і ψ_1 належить до однієї з множин $\mathfrak{M}_\infty^c$ чи $\mathfrak{M}''_\infty$, то

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p.$$

2.9. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями.**

2.9.1. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < q \le p$.** Нехай Γ_n – множина всіх наборів γ_n з n різних натуральних чисел. В такому випадку величину $e_n(f)_p$, означена рівністю (2.49), можна записати у вигляді

$$e_n(f)_p = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_p.$$

Поряд з $e_n(f)_p$ можна розглядати та величини

$$e_n(f;\Gamma_n')_p = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n'} E_{\gamma_n}(f)_p, \tag{2.59}$$

де Γ_n' – деяка підмножина з Γ_n. У зв'язку з цим величину $e_n(f)_p$ зручно назвати абсолютним найкращим n-членним наближенням, а величину $e_n(f;\Gamma_n')_p$ – найкращим n-членним наближенням з обмеженнями, маючи на увазі, що тут термін «обмеження» стосується вибору підмножини Γ_n'.

В ролі Γ_n' розглянемо дві підмножини $\Gamma_n^{(1)}$ та $\Gamma_n^{(2)}$. Через $\Gamma_n^{(1)}$ позначають множину наборів

$$\gamma_n^{(1)} = \{j\,n+1,\ j\,n+2, \ldots (j+1)n\},\ j = 0,1,\ldots;$$

а через $\Gamma_n^{(2)}$ – множину наборів

$$\gamma_n^{(2)} = \{j+1,\ j+2, \ldots j+n\},\ j = 0,1,\ldots.$$

Зрозуміло, що завжди $\Gamma_n^{(1)} \subset \Gamma_n^{(2)} \subset \Gamma_n$ та

$$e_n(f)_p \leq e_n(f; \Gamma_n^{(2)})_p \leq e_n(f; \Gamma_n^{(1)})_p. \tag{2.60}$$

Тому якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}_\varphi^p$ і

$$e_n(\mathfrak{N}; \Gamma_n^{'})_p = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f; \Gamma_n^{'})_p\,, \tag{2.61}$$

то мають місце нерівності

$$e_n(\mathfrak{N})_p \leq e_n(\mathfrak{N}; \Gamma_n^{(2)})_p \leq e_n(\mathfrak{N}; \Gamma_n^{(1)})_p. \tag{2.62}$$

Як і раніше, в ролі множин $\mathfrak{N}$ вибираємо множини $\psi\, U_\varphi^q$, які задаються рівністю (2.16) при $p = q$.

Теорема 2.17 ([58, 55, 52]). *Нехай $0 < q \leq p$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система комплексних чисел, для яких послідовність $|\psi_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно прямує до нуля. Тоді при довільному $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q; \Gamma^{(1)})_p = e_n(\psi\, U_\varphi^q; \Gamma^{(2)})_p = \frac{(s^* - 1)^{1/p}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s^*} |\,\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{1/q}},$$

де s^* – деяке натуральне число, для якого

$$\sup_{s>1} \frac{(s-1)^{1/p}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s} |\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{1/q}} = \frac{(s^* - 1)^{1/p}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s^*} |\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{1/q}}.$$

Таке число s^* завжди існує.

2.9.2. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < p < q$.** У випадку, коли $0 < p < q$ точні значення величин $e_n(\psi\, U_\varphi^q; \Gamma^{(1)})_p$ містяться в такому твердженні.

Теорема 2.18 ([55, 52]). *Нехай $0 < p < q$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система таких комплексних чисел, що виконуються умови (2.15) та (2.36) і послідовність $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$ не зростаючи прямує до нуля. Тоді при довільному $n \in \mathbb{N}$*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q; \Gamma_n^{(1)})_p = \left((s^* - 1)^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \widetilde{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}},$$

де

$$\widetilde{\psi}_k = \Big(\sum_{i=(k-1)n+1}^{k\,n} |\psi_i|^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Число s вибране з умови

$$\widetilde{\psi}_{s^*}^{-q} \le \frac{1}{s^*-1}\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q} < \widetilde{\psi}_{s^*+1}^{-q}.$$

Таке число s завжди існує і єдине.

Для величин $e_n(\psi U_\varphi^q;\Gamma_n^{(2)})_p$ при $0<p<q$, взагалі кажучи, має місце нерівність

$$e_n(\psi U_\varphi^q;\Gamma_n^{(2)})_p \le \left((s^*-1)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*n+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Більш детально з цим випадком і зокрема, з умовами, за яких в останньому співвідношенні має місце рівність, можна ознайомитись у роботі [55].

3. Наближення в просторах $\mathcal{S}^p$.

3.1. **Основні означення.** Нехай, як і в п. 2.2, $L = L(\mathbb{T}^d)$, $d \ge 1$, – множина всіх 2π-періодичних за кожною зі змінних функцій

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\cdots,x_d),$$

сумовних на кубі періодів $\mathbb{T}^d$ і (2.5) – ряд Фур'є функції $f\in L$ за системою (2.7). Еквівалентні відносно міри Лебега функції ототожнюються.

Нехай, далі, $\mathcal{S}^p$ – простір, породжений множиною L, системою (2.7) і деяким числом $p\in(0,\infty)$, зі скалярним добутком (2.8) і (квазі-)нормою $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{\mathcal{S}^p}$, визначеною згідно з (2.1):

$$\|f\|_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{f}(\mathbf{k})|^p\Big)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Нехай тепер $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – довільна система комплексних чисел – кратна послідовність. Якщо для функції $f\in L$ з рядом Фур'є (2.5) ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\psi(\mathbf{k})\widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{3.2}$$

є рядом Фур'є деякої функції F з L, то F називають ψ-інтегралом функції f і позначають $F = \mathcal{J}^\psi(f)$. При цьому функцію f називають ψ-похідною функції F і позначають $f = D^\psi(F) = F^\psi$. Множину ψ-інтегралів всіх функцій $f\in L$ позначають через L^ψ. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з L, то через $L^\psi\mathfrak{N}$ позначають множину ψ-інтегралів всіх функцій з $\mathfrak{N}$. Зрозуміло, що коли $f \in L^\psi$, коефіцієнти Фур'є функцій f и f^ψ пов'язані співвідношеннями

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k})\widehat{f}^\psi(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.3}$$

В ролі $\mathfrak{N}$ можна обрати одиничну кулю в U^p в просторі $\mathcal{S}^p$:

$$U^p = \{f \in \mathcal{S}^p : \quad \|f\|_p \le 1\}. \tag{3.4}$$

В такому випадку покладаємо $L^\psi_p := L^\psi_p(\mathbb{T}^d) = L^\psi U^p$. Система ψ, як і вище, підпорядкована умові

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \psi(\mathbf{k}) = 0. \tag{3.5}$$

Зазначимо, що коли $f \in L^\psi\mathcal{S}^p$ і $|\psi(\mathbf{k})| \le K$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, то $f \in \mathcal{S}^p$. Тому за умови (3.5) має місце вкладення $L^\psi_p \subset \mathcal{S}^p$.

Означимо характеристичні послідовності $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ і $\delta(\psi)$ аналогічно до того як це зроблено у підрозділі 2.3 Через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ позначимо множину значень величин $|\psi(\mathbf{k})|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, впорядковану за спаданням. Розглянемо також послідовності $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^\infty$ та $\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, де

$$g_n = g_n(\psi) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\psi(\mathbf{k})| \ge \varepsilon_n\}, \qquad \delta_n = \delta_n^\psi = |g_n|$$

– кількість елементів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, що належать множині g_n.

З огляду на умову (3.5), в даному випадку послідовності $\varepsilon(\psi)$ та $g(\psi)$ означаються рівностями (2.17) з врахуванням того, що $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Як і раніше, вважаємо, що $g_0 = g_0(\psi)$ – порожня множина і $\delta_0 := \delta_0(\psi) = 0$.

Зазначимо, що крім природної умови (3.5) від системи ψ жодних інших істотних обмежень не вимагатиметься. Тому ці системи ψ, а з ними і їх характеристичні послідовності $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ та $\delta(\psi)$ в загальному випадку можуть бути різноманітними та достатньо складними.

В багатовимірному випадку, напевно, найбільш простими і природними є системи ψ, у яких $\psi(\mathbf{k})$ зображуються добутками

$$\psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1, \ldots, k_d) = \prod_{j=1}^d \psi_j(k_j), \quad k_j \in \mathbb{Z}^1, \quad j = \overline{1,d}, \tag{3.6}$$

значень одновимірних послідовностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^\infty$. Якщо при цьому $\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}$, $j = \overline{1,d}$, то множини $g_n(\psi)$ будуть симетричними відносно усіх координатних площин і, як неважно переконатися,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_+} 2^{d-q(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^d |\psi_j(k_j)| \cos\Big(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}\Big),$$

де $q(\mathbf{k})$ – кількість координат вектора $\mathbf{k}$, які дорівнюють нулю, а числа β_{k_j} означаються рівностями

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2}=\frac{\mathrm{Re}\ \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|},\quad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2}=\frac{\mathrm{Im}\ \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В такому випадку множина L^ψ ψ-інтегралів дійсних функцій φ з $L(\mathbb{T}^d)$ складається з дійсних функцій f, і якщо при цьому ряд в (3.2) є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\mathcal{D}_\psi(t)$, то достатньою умовою включення $f\in L^\psi\mathfrak{N}$ є можливість зображення функції f у вигляді згортки

$$f(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(x-t)\mathcal{D}_\psi(t)\mathrm{d}t,$$

де $\varphi\in\mathfrak{N}$ і майже скрізь $\varphi(\mathbf{x})=f^\psi(\mathbf{x})$. Це, зокрема, означає, що множини $L^\psi\mathfrak{N}$ містять класи функцій, які зображуються у вигляді згорток з фіксованими сумовними ядрами.

3.2. **Застосування отриманих результатів до задач наближення періодичних функцій багатьох змінних.** Наведемо застосування результатів попередніх підрозділів до розв'язання задач теорії наближення функцій багатьох змінних в просторах $\mathcal{S}^p$.

3.2.1. **Найкращі наближення, найкращі n-членні наближення та базисні поперечники класів L^ψ_q в просторах $\mathcal{S}^p$.** Нехай f – довільна функція з простору $\mathcal{S}^p$, n – будь-яке натуральне число і γ_n – довільний набір з n векторів $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$. Розглянемо тригонометричні поліноми

$$P_{\gamma_n}=\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}c_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}\quad\text{та}\quad S_{\gamma_n}(f)=\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)},\tag{3.7}$$

де $c_{\mathbf{k}}$ – будь-які комплексні числа, а $\widehat{f}(\mathbf{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f, а також величини

$$E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}=\inf_{c_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}}\|f-P_{\gamma_n}\|_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}=\|f-S_{\gamma_n}(f)\|_{\mathcal{S}^p}.\tag{3.8}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}^p$, то покладаємо

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\sup_{f\in\mathfrak{N}}E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}$$

а також

$$\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\inf_{\gamma_n}E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{D}^\perp_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\inf_{\gamma_n}\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}.$$

Через $e_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}$ позначаємо найкраще n-членне тригонометричне наближення множини $\mathfrak{N}$ в просторі $\mathcal{S}^p$, тобто, величину

$$e_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}.$$

В ролі множини $\mathfrak{N}$ розглядаємо множину L^{ψ}_q ψ-інтегралів всіх функцій з одиничної кулі простору $\mathcal{S}^q$, $0 < p, q < \infty$, за умов, що гарантують вкладення $L^{\psi}_q \subset \mathcal{S}^p$.

За таких позначень мають місце такі твердження – наслідки відповідних теорем підрозділів 3-6.

Твердження 3.1 ([53, Гл. 11], [52])**.** *Нехай $0 < q \le p$, і $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *і*

$$\psi(\mathbf{k}) \ne 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.9}$$

Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і для довільного набору γ_n із n різних натуральных чисел справджуються рівності

$$E_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1),$$

де $\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1)$ – перший член послідовності $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$, яка є спадною перестановкою системи чисел $\{|\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k})|\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$,

$$\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{k} \in \gamma_n, \\ \psi(\mathbf{k}), & \mathbf{k} \overline{\in} \gamma_n, \end{cases}$$

при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\mathcal{D}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \widetilde{\psi}_{n+1},$$

$$e^p_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \sup_{s>n} (s-n)\Big(\sum_{k=1}^{s} \bar{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}} = (s^*-n)\Big(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, і s^* – деяке натуральне число.

Твердження 3.2 ([53, Гл. 11], [52])**.** *Нехай $0 < p < q$, і $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, яка задовольняє умови* (3.5) *та*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\psi(\mathbf{k})|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty. \tag{3.10}$$

Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел справджуються рівності

$$E_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

де система чисел $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $\{|\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k})|\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$; при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\mathcal{D}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

$$e^p_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \Bigg((s^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Bigg)^{\frac{q-p}{pq}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ і s^* – деяке натуральне число.

3.2.2. **Наближення поліномами, що побудовані за областями $g_n(\psi)$, в просторах $\mathcal{S}^p$.** Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам (3.5) та (3.9), і функція f належить множині $L^{\psi}\mathcal{S}^p$. Розглянемо випадок, апроксимуючі поліноми будуються по наборах γ_n, які визначаються через елементи $g_n(\psi)$ характеристичної послідовності $g(\psi)$ системи ψ. Тоді поліноми (3.7) набуватимуть вигляду $P_{g_n(\psi)} = \sum_{\mathbf{k}\in g_n(\psi)} c_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}$ і

$$S_n(f)_{\psi} = S_{g_n(\psi)}(f) = \sum_{\mathbf{k}\in g_n(\psi)} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}, \tag{3.11}$$

$S_0(f)_{\psi} := 0$, а величини (3.8) –

$$E_n(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \inf_{a_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}}\Big\|f - P_{g_n(\psi)}\Big\|_{\mathcal{S}^p} \quad \text{і} \quad \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \|f - S_{n-1}(f)_{\psi}\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $L^{\psi}\mathcal{S}^p$, то покладаємо

$$E_n(\mathfrak{N})_{\psi,\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} \quad \text{і} \quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\psi,\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\psi,\mathcal{S}^p}.$$

Твердження 3.3 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $0 < q \le p$ і $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9). *Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(L^{\psi}_q)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_q)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \varepsilon_n,$$

де ε_n – члени характеристичної послідовності системи $\varepsilon(\psi)$.

Твердження 3.4 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *– система чисел, яка задовольняє умови* (3.5) *та* (3.10). *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$E_n(L_q^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \Bigg(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Bigg)^{\frac{q-p}{pq}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ *– спадна перестановка системи чисел* $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, *а* δ_n *– члени характеристичної послідовності* $\delta(\psi)$.

Аналоги теорем 2.3 та 2.4 у просторах $\mathcal{S}^p$ формулюються в такий спосіб.

Твердження 3.5 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $f \in L_p^\psi$, $p > 0$ *і*

$$\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^\mathrm{d}}$$

– система чисел, яка задовольняє умову (3.5). *Тоді ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p}$$

збігається, і при кожному $n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$E_n^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p},$$

де ε_k *– елементи характеристичної послідовності* $\varepsilon(\psi)$.

Твердження 3.6 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L^\psi$, $p > 0$, *система* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^\mathrm{d}}$ *задовольняє умову* (3.5) *і*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = 0.$$

Тоді для того, щоб виконувалося включення $f \in L_p^\psi$ *необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})E_k^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p}.$$

Якщо цей ряд збігається, то при довільному $n \in \mathbb{N}$, *справджується рівність*

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p},$$

де ε_k *– елементи характеристичної послідовності* $\varepsilon(\psi)$.

3.2.3. **Поперечники за Колмогоровим класів L^{ψ}_p.** Нехай $\mathcal{G}_n$ – множина всіх n-вимірних підпросторів G_n в $\mathcal{S}^p$, $n\in\mathbb{N}$, і

$$d_n(L^{\psi}_p)_{\mathcal{S}^p} = \inf_{G_n\in\mathcal{G}_n}\ \sup_{f\in L^{\psi}_p}\ \inf_{u\in G_n}\|f-u\|_{\mathcal{S}^p},\quad d_0(L^{\psi}_p)_{\mathcal{S}^p} := \sup_{f\in L^{\psi}_p}\|f\|_{\mathcal{S}^p},$$

– поперечники за Колмогоровим класів L^{ψ}_p в просторі $\mathcal{S}^p$.

Твердження 3.7 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $p\in[1,\infty)$ і $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9). *Тоді при довільних $n\in\mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_p)_{\mathcal{S}^p} &= d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_p)_{\mathcal{S}^p} = \ldots \\ &= d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_p)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_p)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \varepsilon_n, \end{aligned}$$

де ε_n та δ_n – члени характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$ та $\delta(\psi)$, відповідно.

3.2.4. **Деякі наслідки для просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$.** Нехай $L_p=L_p(\mathbb{T}^d)$, $p\in[1,\infty)$, – простір функцій $f\in L$ зі скінченною нормою (1.4). Зв'язок між просторами L_p та $\mathcal{S}^p$ встановлює відома теорема Гаусдорфа-Юнга (див., наприклад, [19]), з якої випливає, що при $p\in(1,2]$ і $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ мають місце формули

$$\begin{aligned} &L_p\subset\mathcal{S}^{p'} \quad \text{і} \quad \|f\|_{\mathcal{S}^{p'}}\le\|f\|_{L_p}, \\ &\mathcal{S}^p\subset L_{p'} \quad \text{і} \quad \|f\|_{L_{p'}}\le\|f\|_{\mathcal{S}^p}. \end{aligned}$$

Зокрема, при $p=p'=2$ виконуються рівності

$$L_2=\mathcal{S}^2 \quad \text{і} \quad \|\cdot\|_{L_2}=\|\cdot\|_{\mathcal{S}^2}. \tag{3.12}$$

Отже, теореми, доведені для просторів $\mathcal{S}^p$, містять певну інформацію і для просторів L_p, яка є найбільш повною внаслідок (3.12), у випадку, коли $p=2$.

У останньому випадку, з теорем 3.3 та 3.7 отримуємо наслідок

Наслідок 3.8 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9). *Тоді для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_2)_{L_2} &= d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_2)_{L_2} = \ldots = d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_2)_{L_2} = \\ &= E_n(L^{\psi}_2)_{\psi,L_2} = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_2)_{\psi,L_2} = \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де ε_n та δ_n – члени характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$ та $\delta(\psi)$, відповідно.

Рівності (3.13) в одновимірному випадку ($d = 1$) для класів Соболєва W_2^r (при $\psi(k) = k^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$) отримав у 1936 році А. М. Колмогоров [9], який започаткував новий напрям в теорії наближень, пов'язаний з дослідженням поперечників різних функціональних класів.

Як випливає з (3.13), у просторі L_2 поперечники множин L_2^ψ реалізують суми Фур'є (3.11).

Зазначимо, що відомі класи диференційовних функцій Соболєва отримуються з $L^\psi U_{L_p}$, якщо $\psi(\mathbf{k})$ має вигляд (3.6) з

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{-r_j}, & k_j \neq 0, \end{cases} \quad j = \overline{1,d}, \ r_j \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Нехай $d = 2$, а послідовності $\psi_1(k_1)$ та $\psi_2(k_2)$ означені рівностями (3.14) за умови $r_1 = r_2 = r > 0$. У цьому випадку класи $L^\psi U_{L_p}$ з точки зору знаходження поперечників вперше розглядалися К. І. Бабенком в [26, 27], який цьому випадку фактично отримав співвідношення (3.13).

В цій ситуації характеристична послідовність $\varepsilon(\psi)$ складається з елементів $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in \mathbb{N}$, множини $g_n(\psi)$ векторів $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, які задовольняють умову

$$k_1' k_2' \leq n,$$

де

$$k_j' = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0, \ j = 1, 2. \end{cases}$$

Такі множини вперше з'явились у згаданих роботах К. І. Бабенка [26, 27] і зараз їх заведено називати гіперболічними хрестами.

3.3. Класи $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ та їх апроксимативні характеристики.

3.3.1. **Означення класів $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$.** Позначимо через l_p^d, $0 < p \leq \infty$, простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$ зі стандартною l_p-нормою (квазінормою)

$$|\mathbf{x}|_p := \|\mathbf{x}\|_{l_p^d} = \begin{cases} (\sum_{k=1}^d |x_k|^p)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq d} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Розглянемо наступні функціональні класи:

$$\mathcal{F}_{q,r}^\psi = \mathcal{F}_{q,r}^\psi(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L(\mathbb{T}^d) : \ \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \leq 1 \right\},$$

де $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, – деяка фіксована додатна спадна функція, така, що $\psi(0) := \psi(1)$ і $0 < q, r \leq \infty$.

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$ і $q = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty} =: \mathcal{F}^{s}_{q,\infty}$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. Якщо ж $q = 2$, то класи $\mathcal{F}^{s}_{2,\infty}$ збігаються з класами Соболєва W^s_2. Апроксимативні характеристики класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ для різних $r \in (0, \infty]$ і різноманітних функцій ψ досліджувались в роботах [5, 20, 10, 81, 80, 82, 48, 15] та інших. Отримані для цих класів результати знаходять своє застосування до дослідження поведінки апроксимативних характеристик функціональних класів у просторах Лебега $L_p(\mathbb{T}^d)$.

3.3.2. **Порядкові оцінки найкращих n-членних тригонометричних наближень в просторах S^p.** Класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ збігаються з множинами $L^{\psi^*}_q$ у випадку, коли система $\psi^* = \{\psi^*(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ задовольняє рівності $\psi^*(\mathbf{k}) = \psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Тому для них справджуються наведені вище твердження 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 та 3.7. З огляду на можливі застосування результатів до задач наближення у просторах Лебега $L_p(\mathbb{T}^d)$ також є корисними твердження цього підрозділу, у яких, зокрема, встановлено точні порядкові оцінки апроксимативних величин класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$. Для їх формулювання та доведення використовувалися згадані вище твердження, а також наведена у підрозділі 2.8.1 класифікація Степанця опуклих функцій.

Нехай $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, – фіксована додатна спадна до нуля функція. Тоді спадну перестановку $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$ можна визначити рівністю

$$\widetilde{\psi}(l) = \psi(m), \quad l \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots,$$

де $V_m := |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}|$ – кількість елементів множини

$$\widetilde{\Delta}^d_{m,r} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_r \leq m, \quad m = 0, 1, \ldots\}.$$

Далі, при формулюванні результатів важливо, щоб при всіх достатньо великих m (більших, ніж деяке додатне число k_0) виконувалось співвідношення

$$M_r(m - c_1)^d < V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}| \leq M_r(m + c_2)^d, \tag{3.15}$$

де M_r, c_1 та c_2 – деякі додатні сталі.

Зрозуміло, що у випадку, коли $r = \infty$, співвідношення (3.15) виконується і $M_\infty = \mathrm{vol}\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_\infty \leq 1\} = 2^d$, якщо ж $r = 1$, то $M_1 = \mathrm{vol}\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_1 \leq 1\} = 2^d/d!$.

Твердження 3.9 ([81, 15]). *Нехай $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, виконуються умова* (3.15)*, і функція ψ^p належить множині B, а при*

$0 < p < q$, *крім того, при всіх* t, *більших ніж деяке число* t_0, *є опуклою та задовольняє умову* (2.58) *з* $\beta = d(1/p - 1/q)$. *Тоді*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.16}$$

Враховуючи вигляд оцінки (3.16) і те, що умова (3.15) виконується, зокрема, при $r = 1$ та $r = \infty$, з даного твердження легко отримати такий наслідок.

Наслідок 3.10. *Нехай* $d \geq 1$, $0 < p, q < \infty$ *і функція* ψ *задовольняє умови твердження 3.9. Тоді для довільного* $r \in [1, \infty]$ *має місце оцінка* (3.16).

Дійсно, для довільних чисел $r \in [1, \infty]$, $0 < q < \infty$ і будь-якої додатної спадної функції ψ мають місце вкладення

$$\mathcal{F}^{\psi}_{q,1} \subset \mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset \mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}.$$

Тому якщо виконуються умови наслідку 3.10, то для $r \in [1, \infty]$

$$\frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \ll e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,1})_{\mathcal{S}^p} \leq e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \leq e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty})_{\mathcal{S}^p} \ll \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Твердження 3.11 ([82]). *Нехай* $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, *виконуються умова* (3.15), *а функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_{\infty}$ *або* $\mathfrak{M}^c_{\infty}$. *Тоді*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi^p, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \tag{3.17}$$

де

$$m_n = (n/M_r)^{\frac{1}{d}}.$$

У випадку, коли $d = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} =: \mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (3.15) виконується з константою $M_r = 2$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}'_{\infty} \cup \mathfrak{M}^c_{\infty}$ та будь-яких $0 < p$, $q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2)(n\alpha(\psi, n/2))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.17$'$}$$

Твердження 3.12 ([80]). *Нехай* $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p < q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, *виконується умова* (3.15) *та умова*

$$k^{(d-1)/\alpha}\psi(k+1)/\psi(k) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3.18}$$

з $\alpha = p$. *Тоді при всіх* $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p}}\, n^{\frac{1-d}{dq}}. \tag{3.19}$$

Якщо виконуються умови твердження 3.12 і $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то

$$\psi(m) n^{\frac{1-d}{qd}} \ll e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \ll \psi(m) n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Твердження 3.13 ([80]). *Нехай $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < q \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, виконуються умови* (3.15) *та* (3.18) *при $\alpha = q$. Тоді*

1) *при $n = V_{m-1}$ має місце оцінка*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m);$$

2) *для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$ таких, що*

$$q(V_m - V_{m-1}) \geq p\,(V_m - n); \tag{3.20}$$

справджується оцінка (3.19)*;*

3) *для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, що не задовольняють умову* (3.20),

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(n - V_{m-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли $r = \infty$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо $V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,\infty}| = (2m+1)^d$. Тому якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то число m визначається рівністю $m = [(n+1)^{1/d}/2]$.

У випадку $d = 1$, якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $n = V_{m-1} = V_m - 1$, а $m = [(n+1)/2]$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ та будь-яких $0 < p,\ q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]).$$

Як бачимо, при $d > 1$ у випадку $0 < q \leq p < \infty$ отримані оцінки істотно залежать від розміщення числа n на півсегменті $[V_{m-1}, V_m)$. Розглядаючи у твердженнях 3.12 та 3.13 деякі конкретні підпослідовності $n(m)$ отримаємо такий наслідок.

Наслідок 3.14. *Нехай $d \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in [V_{m-1}, V_m)$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, виконуються умови* (3.15) *та* (3.18) *при $\alpha = \min\{p, q\}$. Тоді*

1) *якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, то для довільних $0 < p,\ q < \infty$*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m) n^{\frac{1-d}{dq}};$$

2) *якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, то для довільних $0 < p < q < \infty$*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)\, n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}; \tag{3.21}$$

а для довільних $0 < q < p < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m);$$

3) *якщо ж підпослідовність* $n = n(m)$ *така, що*

$$(V_m - V_{m-1}) \asymp (V_m - n), \tag{3.22}$$

то для довільних $0 < p < q < \infty$ *справджується оцінка* (3.21), *а при* $0 < q \le p < \infty$ *оцінка* (3.21) *справджується за умови, що* $n = n(m) \ne V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.

3.3.3. **Порядкові оцінки величин** $\mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}$ **та** $\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}$ містяться в наступних твердженнях.

Твердження 3.15 ([80]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ *і* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді*

1) *якщо* $0 < q \le p < \infty$, *то для довільної додатної спадної до нуля функції* $\psi(t)$, $t \ge 1$, *при кожному* $n \in [V_{m-1}, V_m)$ *справджується рівність*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \psi(m);$$

2) *якщо ж* $0 < p < q < \infty$, *виконується умова* (3.15), $\psi^p \in \mathfrak{M}_{\infty}''$ *і при* $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ *має місце* (3.18), *то при кожному* $n \in [V_{m-1}, V_m)$ *справджується оцінка*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \tag{3.23}$$

У випадку $d = 1$ при $0 < q \le p < \infty$ з твердження 3.15 випливає, що для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$,

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q}^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q}^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]),$$

а при $0 < p < q < \infty$ для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}_{\infty}''$

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q}^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q}^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]).$$

Твердження 3.16 ([81, 15]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ *і виконується умова* (3.15). *Тоді*

1) *якщо* $0 < q \le p < \infty$, *то для довільної функції* $\psi \in B$ *має місце оцінка*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n) \asymp \psi(n^{1/d}),$$

2) *якщо ж* $0 < p < q < \infty$, *а функція* ψ^p *належить* B *і при всіх* t, *більших ніж деяке число* t_0, *є опуклою та задовольняє умову* (2.58) *при* $\beta = d(1/p - 1/q)$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Твердження 3.17 ([82]). *Нехай $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, виконуються умова* (3.15)*, а функція ψ^p належить $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді для довільних $0 < q \leq p < \infty$ має місце співвідношення*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n),$$

а для довільних $0 < p < q < \infty$ – співвідношення

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

На підставі твердження 3.17 та означення множини $\mathfrak{M}^c_\infty$ бачимо, що для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0 < p$, $q < \infty$ справджується оцінка

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp e_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2).$$

Співставляючи оцінки величин

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p}, \qquad \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p}, \qquad \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p},$$

робимо висновок, що у випадку, коли $d = 1$ і $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$, для будь-яких чисел $0 < p$, $q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$, то аналогічне співвідношення

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \tag{3.24}$$

справджується коли $0 < p < q$ і функція ψ задовольняє умови тверджень 3.9 та 3.11. Якщо ж $d > 1$, а $0 < q \leq p$, то для довільної функції, яка задовольняє умови тверджень 3.9 та 3.11

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = o\Big(\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\Big), \ n \to \infty. \tag{3.25}$$

Коли ψ^p належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$ і $d > 1$, то при $0 < q < p$ співвідношення (3.24) виконується (за відповідних додаткових умов тверджень 3.12 та 3.13) для підпослідовності вигляду

$$n = n(m) = V_{m-1} + c_m, \qquad c_m \in \mathbb{N}, \ c_m \leq K, \ m = 1, 2, \ldots,$$

а при $0 < p = q$ – для підпослідовності

$$n = n(m) = V_{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

У випадку, коли $0 < p < q$ співвідношення (3.24) виконується для підпослідовностей $n = n(m)$, що задовольняють умову (3.22); якщо ж дана підпослідовність $n = n(m)$ така, що

$$V_m - n = o(V_m - V_{m-1}), \ m \to \infty,$$

то справджується співвідношення (3.25).

3.4. Прямі та обернені теореми наближення в просторах $\mathcal{S}^p$.

3.4.1. **Попередні позначення.** Нехай f – довільна функція з простору $L = L(\mathbb{T}^d)$ з рядом Фур'є вигляду (2.5). Для будь-якого

$$\nu \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

покладемо

$$H_\nu(f)(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \ |\mathbf{k}|_1 := \sum_{j=1}^{d} |k_j|.$$

Тоді ряд Фур'є функції f можна записати у вигляді

$$S[f](\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(f)(\mathbf{x}). \tag{3.26}$$

Розглянемо множину $\mathcal{T}_n^\triangle$, $n \in \mathbb{N}_0$, всіх поліномів вигляду

$$\tau_n(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1\le n} a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{x},\mathbf{k})},$$

де $a_{\mathbf{k}}$ – довільні комплексні числа.

Величину

$$E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p} = \inf_{\tau_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}^\triangle} \|f - \tau_{n-1}\|_{\mathcal{S}^p}$$

називають *найкращим наближенням* функції $f \in \mathcal{S}^p$ порядку $n-1$ поліномами, побудованим за трикутними областями.

Модулем гладкості функції $f \in \mathcal{S}^p$ порядку $\alpha > 0$ називають величину

$$\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} := \sup_{|h|\le t} \|\Delta_h^\alpha f\|_{\mathcal{S}^p} = \sup_{|h|\le t} \Big\| \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(\cdot - jh)\Big\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Функції $\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$ володіють усіма звичайними властивостями класичних модулів гладкості. Зокрема, має місце таке твердження.

Лема 3.18. *Нехай $f, g \in \mathcal{S}^p$, $\alpha \ge \beta > 0$, $t, t_1, t_2 \ge 0$. Тоді*

(i) *$\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$, $t \in (0,\infty)$, є невід'ємною неперервною зростаючою функцією і $\lim\limits_{t\to 0+} \omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} = 0$;*

(ii) *$\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} \le 2^{\{\alpha-\beta\}}\omega_\beta^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$, де $\{\alpha\} = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : k \ge \alpha\}$;*

(iii) *$\omega_\alpha^\triangle(f+g,t)_{\mathcal{S}^p} \le \omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} + \omega_\alpha^\triangle(g,t)_{\mathcal{S}^p}$;*

(iv) *$\omega_1^\triangle(f,t_1+t_2)_{\mathcal{S}^p} \le \omega_1^\triangle(f,t_1)_{\mathcal{S}^p} + \omega_1^\triangle(f,t_2)_{\mathcal{S}^p}$;*

(v) *$\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p} \le 2^{\{\alpha\}}\|f\|_{\mathcal{S}^p}$.*

3.4.2. **Прямі теореми наближення.**

Твердження 3.19 ([2]). *Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9)*. Якщо для функції*

$$f \in \mathcal{S}^p,\ 1 \le p < \infty,$$

існує похідна f^ψ з простору $\mathcal{S}^p$, то при $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p} \le \varepsilon_n E_n^\triangle(f^\psi)_{\mathcal{S}^p}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \max_{|\mathbf{k}|_1 \ge n} |\psi(\mathbf{k})|.$$

Сформулюємо тепер прямі теореми наближення в просторах $\mathcal{S}^p$ в термінах найкращих наближень та модулів гладкості функцій. Зокрема, наведемо нерівності типу Джексона вигляду

$$E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p} \le K(\tau)\omega_\alpha^\triangle\Big(f, \frac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}, \quad \tau > 0,$$

і розглянемо питання про точні константи в цих нерівностях при фіксованих n, α, τ та p. Для цього розглянемо величину

$$K_{n,\alpha,p}(\tau) = \sup\left\{ \frac{E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p}}{\omega_\alpha^\triangle(f, \frac{\tau}{n})_{\mathcal{S}^p}} : f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y},\ f \not\equiv \text{const} \right\},$$

де $Y := \mathbb{Z}_+^d \cup \mathbb{Z}_-^d$, $\mathbb{Z}_+^d$ та $\mathbb{Z}_-^d$ – підмножини векторів $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, всі координати яких відповідно невід'мні або від'ємні,

$$L_{1,Y} := L_{1,Y}(\mathbb{T}^d) = \{f \in L(\mathbb{T}^d) :\ \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0\ \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus Y\}.$$

Через $M(\tau)$, $\tau > 0$, позначимо множину обмежених неспадних функцій μ, відмінних від константи на $[0, \tau]$.

Теорема 3.20 ([60, 2]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \le p < \infty$. Тоді для довільних $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ та $\alpha > 0$ справджується нерівність*

$$E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p} \le C_{n,\alpha,p}(\tau)\omega_\alpha^\triangle\Big(f, \frac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}, \tag{3.27}$$

де

$$C_{n,\alpha,p}(\tau) := \left(\inf_{\mu\in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{\alpha p}{2}} I_n(\tau, \mu)}\right)^{1/p}, \tag{3.28}$$

і

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,\alpha,p}(\tau, \mu) = \inf_{\nu\in\mathbb{N}:\nu\ge n} \int_0^\tau \Big(1 - \cos\frac{\nu}{n}t\Big)^{\frac{\alpha p}{2}} d\mu(t).$$

Крім цього, існує функція $\mu_* \in M(\tau)$, яка реалізує точну нижню межу в (3.28)*. Нерівність* (3.27) *є непокращуваною на множині всіх функцій*

$f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, *в тому сенсі, що для довільних* $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *маємо*

$$C_{n,\alpha,p}(\tau) = K_{n,\alpha,p}(\tau).$$

Зазначимо, що у просторах $L_2(\mathbb{T}^1)$ при $\alpha = 1$ дане твердження доведено О. Г. Бабенком [24]. У просторах $\mathcal{S}^p$ цей та інші результати цього підрозділу отримано для функцій однієї та багатьох змінної відповідно в роботах [60, 2].

Зазначимо також, що для $f \in \mathcal{S}^p$ умова $\widehat{f}(\mathbf{k}) = 0$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_{\pm}$ в теоремі 3.20 взагалі кажучи є необхідною. Наприклад, розглянемо функцію

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}^*, \mathbf{x})},$$

де $k^* = (l, -l, 0, \ldots)$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $n < 2l$ маємо $E_n(f^*)_{\mathcal{S}^p} = 1$, однак $\omega(f^*, t) \equiv 0$.

Наслідок 3.21 ([60, 2])**.** *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \leq p < \infty$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\alpha > 0$ *справджується нерівність*

$$E_n^{\triangle}(f)^p_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{\alpha p}{2}} I_n(\frac{\alpha p}{2})} \int\limits_0^{\pi} \omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{t}{n}\Big)^p_{\mathcal{S}^p} \sin t \mathrm{d}t, \tag{3.29}$$

де

$$I_n(\lambda) := \inf_{\nu \in \mathbb{N}: \nu \geq n} \int\limits_0^{\pi} \Big(1 - \cos \frac{\nu}{n} t\Big)^{\lambda} \sin t \mathrm{d}t, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Якщо при цьому $\frac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$I_n\Big(\frac{\alpha p}{2}\Big) = \frac{2^{\frac{\alpha p}{2}+1}}{\frac{\alpha p}{2} + 1},$$

і нерівність (3.29) *не може бути покращена для* $n \in \mathbb{N}$ *в тому сенсі, що для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *існує функція* $f^* \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$ *така, що*

$$E_n^{\triangle}(f^*)^p_{\mathcal{S}^p} = \frac{\frac{\alpha p}{2} + 1}{2^{\alpha p + 1}} \int\limits_0^{\pi} \omega_\alpha^{\triangle}\Big(f^*, \frac{t}{n}\Big)^p_{\mathcal{S}^p} \sin t \mathrm{d}t.$$

В наступному твердженні містяться оцінки зверху при $\tau = \pi$ для констант $K_{n,\alpha,p}(\tau)$, які не залежать від n і є не покращуваними у низці важливих випадків.

Наслідок 3.22 ([60, 2]). *Для довільних* $1 \le p < \infty$, $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються нерівності*

$$K^p_{n,\alpha,p}(\pi) \le \frac{1}{2^{\frac{\alpha p}{2}-1} I_n(\frac{\alpha p}{2})} \le \frac{\frac{\alpha p}{2}+1}{2^{\alpha p} + 2^{\frac{\alpha p}{2}-1}(\frac{\alpha p}{2}+1)\sigma(\frac{\alpha p}{2})},$$

де величина $I_n(\lambda)$ *означена рівністю* (3.30) *і*

$$\sigma(\lambda) := -\sum_{m=[\frac{\lambda}{2}]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \Bigg(\frac{1-(-1)^{[\lambda]}}{2} \binom{2m}{m}$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{2(m-j)^2-1} \Bigg), \quad \lambda > 0.$$

Якщо при цьому $\frac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то величина* $\sigma(\frac{\alpha p}{2}) = 0$ *і*

$$K^p_{n,\alpha,p}(\pi) \le \frac{\frac{\alpha p}{2}+1}{2^{\alpha p}}. \tag{3.31}$$

Наступне твердження встановлює оцінку величин $K_{n,\alpha,p}(\pi)$ рівномірно обмежену відносно усіх параметрів $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ та $1 \le p < \infty$.

Наслідок 3.23 ([60, 2]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \le p < \infty$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Тоді для довільних* $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$

$$E^{\triangle}_n(f)_{\mathcal{S}^p} < \frac{4}{3 \cdot 2^{\alpha/2}} \omega_\alpha\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}.$$

У просторах $L_2(\mathbb{T}^1)$ при $\alpha = 1$ нерівність (3.29) доведено М. І. Чернихом [76, 75]. Нерівності такого типу, а також суміжні питання, пов'язані з обчисленням значень поперечників класів функцій, що задаються мажорантами їх модулів неперервності, досліджувалися в роботах [67, 68, 34, 47, 31, 38, 33, 70, 32, 25, 1, 23] та ін.

3.4.3. **Обернені теореми наближення.** Перед формулюванням оберненої теореми наближення наведемо також нерівність Бернштейна, у якій норма узагальненої похідної тригонометричного полінома оцінюється через норму самого полінома (див., наприклад, [70, Гл. 4]).

Твердження 3.24 ([60, 2]). *Нехай* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – *система чисел, які задовольняють умову* (3.9). *Тоді для довільного* $\tau_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *справджується нерівність*

$$\|\tau^\psi_n\|_{\mathcal{S}^p} \le \frac{1}{\epsilon_n}\|\tau_n\|_{\mathcal{S}^p}, \quad \text{де} \ \ \epsilon_n := \min_{0<|\mathbf{k}|_1 \le n} |\psi(\mathbf{k})|.$$

Наслідок 3.25. *Нехай* $\psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}$, $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, $r \geq 0$. *Тоді для довільного полінома* $\tau_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\|\tau_n^{\psi}\|_{\mathcal{S}^p} = \|\tau_n^{(r)}\|_{\mathcal{S}^p} \leq n^r \|\tau_n\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Обернена апроксимаційна теорема в просторі $\mathcal{S}^p$ має такий вигляд.

Теорема 3.26 ([60, 2]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\alpha > 0$

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} (\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p}) E_\nu^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}. \qquad (3.32)$$

Зазначимо, що в (3.32) сталу π^α, взагалі кажучи, зменшити не можна, оскільки для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $f^* \in \mathcal{S}^p$ така, що при всіх n, більших деякого номера n_0 виконується протилежна нерівність

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f^*, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} > \frac{\pi^\alpha - \varepsilon}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} (\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p}) E_\nu^{\triangle}(f^*)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}.$$

Оскільки $\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p} \leq \alpha p \nu^{\alpha p - 1}$, то з нерівності (3.32) випливає, що

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{\pi^\alpha (\alpha p)^{1/p}}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha p - 1} E_\nu^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}. \qquad (3.33)$$

Звідси, зокрема, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.27 ([60, 2]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$, *послідовність найкращих наближень* $E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}$ *функції* f *задовольняє співвідношення* $E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p} = O(n^{-\beta})$ *при деякому* $\beta > 0$. *Тоді для всіх* $\alpha > 0$,

$$\omega_\alpha^{\triangle}(f, t)_{\mathcal{S}^p} = \begin{cases} O(t^\beta) & \text{при } \beta < \alpha, \\ O(t^\alpha |\ln t|^{1/p}) & \text{при } \beta = \alpha, \\ O(t^\alpha) & \text{при } \beta > \alpha. \end{cases}$$

У просторах $\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)$ 2π-періодичних функцій однієї змінної нерівності (3.33) були отримані в [65] та [60]. У просторах $\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^d)$ функцій багатьох змінних ці нерівності отримано в [2]. У просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ нерівності типу (3.33) доведено М. П. Тіманом (див. [71, 72] та [70, Гл. 2]).

Прямі та обернені теореми наближення функцій, заданих на сфері, у просторах $S^{p,q}(\sigma^d)$, $d \geq 3$, отримано в роботах [41, 40].

3.4.4. **Конструктивні характеристики класів функцій, визначених їх модулями гладкості.** Нехай ω – довільна мажоранта, визначена на відрізку $[0,1]$. Для фіксованого $\alpha>0$ покладемо

$$\mathcal{S}^pH^\omega_\alpha=\Big\{f\in\mathcal{S}^p:\quad \omega^\triangle_\alpha(f;\delta)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}(\omega(\delta)),\quad \delta\to 0+\Big\}. \tag{3.34}$$

Далі, розглядаємо мажоранти $\omega(t)$, $t\in[0,1]$, які задовольняють наступні умови:

1) $\omega(\delta)$ неперервна на $[0,1]$;
2) $\omega(\delta)\uparrow$;
3) $\omega(\delta)\neq 0$ для $\delta\in(0,1]$;
4) $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$,

а також відомі умови Барі $(\mathcal{B}_\alpha)$ та $(\mathcal{B})$ (див., наприклад, [28]):

$$(\mathcal{B}_\alpha),\ \alpha>0:\quad \sum_{v=1}^{n}v^{\alpha-1}\omega\Big(\frac{1}{v}\Big)=\mathcal{O}\Big[n^\alpha\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big],$$

$$(\mathcal{B}):\quad \sum_{v=n+1}^{\infty}\frac{1}{v}\,\omega\Big(\frac{1}{v}\Big)=\mathcal{O}\Big[\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Теорема 3.28 ([60, 2])**.** *Нехай $\alpha>0$, ω – довільна функція, яка задовольняє умови 1)-4) та умову $(\mathcal{B}_\alpha)$. Для того, щоб функція*

$$f\in\mathcal{S}^p\cap L_{1,Y}$$

належала множині $\mathcal{S}^pH^\omega_\alpha\cap L_{1,Y}$, необхідно і достатньо, щоб

$$E^\triangle_n(f)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}\Big[\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Функція t^r, $r\le\alpha$, задовольняє умови 1)-4) та $(\mathcal{B}_\alpha)$. Тому позначаючи через $\mathcal{S}^pH^r_\alpha$ множину $\mathcal{S}^pH^\omega_\alpha$ при $\omega(t)=t^r$, $0<r\le\alpha$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 3.29. *Нехай $\alpha>0$, $0<r\le\alpha$. Для того, щоб функція $f\in\mathcal{S}^p\cap L_{1,Y}$ належала множині*

$$\mathcal{S}^pH^r_\alpha\cap L_{1,Y},$$

необхідно та достатньо, щоб

$$E^\triangle_n(f)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}(n^{-r}).$$

3.5. **Наближення лінійними методами функцій з просторів $\mathcal{S}^p$.** У низці робіт (див., наприклад, [35, 64, 37, 46, 13, 78, 84, 79] та ін.) досліджувалися різні проблеми, пов'язані з апроксимацією лінійними методами підсумовування рядів Фур'є у просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ та просторах $\mathcal{S}^p$

зокрема. Так, в роботах [84, 79] розглядались загальні питанні теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є (регулярність, насичення) у просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$. В [64, 78] встановлено точні значення найкращих n-членних наближень такими методами q-еліпсоїдів у цих просторах. В роботі [35] отримано нерівності типу Джексона наближення сумами Зигмунда в просторах $\mathcal{S}^p$. Наведемо результати робіт [46, 13], у яких встановлено прямі та обернені теореми наближення функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона, і в термінах похибок наближення цими середніми в просторі $\mathcal{S}^p$ отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $\mathcal{S}^p H_\omega$.

3.5.1. **Позначення та постановка задачі.** Нехай f – довільна функція з простору $L(\mathbb{T}^d)$. Виходячи зі співвідношення (3.26), розглянемо лінійні оператори $S_n^\triangle$, $\sigma_n^\triangle$, $P_{\varrho,s}^\triangle$ і $A_{\varrho,r}^\triangle$, визначені на $L(\mathbb{T}^d)$ відповідно рівностями

$$S_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n = 0, 1, \ldots,$$

$$\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n \in \mathbb{N},$$

$$P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{\nu^s} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \quad s > 0,\ \varrho \in [0, 1),$$

і

$$A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = S_{r-1}^\triangle(f)(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r} H_\nu(f)(\mathbf{x}),$$

де при $r \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in [0, 1)$

$$\lambda_{\nu,r} := \lambda_{\nu,r}(\varrho) := \sum_{k=0}^{r-1} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(1-\varrho)^k}{k!}\ \frac{d^k}{d\varrho^k}\varrho^\nu.$$

Вирази $S_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$, $\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$ і $P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називають відповідно трикутною частинною сумою ряду Фур'є, трикутною сумою Фейєра і узагальненою трикутною сумою Абеля-Пуассона функції f. Вираз $A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називають трикутною сумою Тейлора-Абеля-Пуассона функції f.

Оператори $P_{\varrho,s}^\triangle$ в загальному випадку, як агрегати наближення функцій функцій однієї змінної, мабуть, вперше розглядалися в [29, 30]. Оператори $A_{\varrho,r}^\triangle$ введені в [45], де в їх термінах дано конструктивну характеристику класів Гарді–Ліпшиця $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини. Апроксимацій властивості цих операторів вивчалися в роботах [45, 46, 13, 42, 12, 4] та ін. В частинному випадку, коли $r = s = 1$ оператори $A_{\varrho,1}^\triangle$ та $P_{\varrho,1}^\triangle$

збігаються між собою і породжують класичний метод Абеля-Пуассона підсумовування кратних рядів Фур'є по трикутних областях.

Нагадаємо, що інтегралом Пуассона функції $f \in L(\mathbb{T}^d)$ називається функція $P(f)$, визначена в $[0,1)^d \times \mathbb{R}^d$ рівністю

$$f(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}+bt) P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

де

$$P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{d} \frac{1-\varrho_j^2}{1-2\varrho_j \cos t_j + \varrho_j^2}, \ \ \varrho_j \in [0,1),$$

— кратне ядро Пуассона і

$$\mathbf{x}+bt := (x_1+t_1, \ldots, x_d+t_d).$$

Надалі домовимось під виразом $f(\varrho, \mathbf{x})$ розуміти інтеграл Пуассона, в якому $\boldsymbol{\varrho}$ – це вектор з однаковими координатами, тобто $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho, \ldots, \varrho)$.

В даному підрозділі вивчаються оператори $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ як лінійних методів наближення функцій в просторах $\mathcal{S}^p$. При цьому основна увага звертається на зв'язок апроксимативних властивостей сум $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ із диференціальними властивостями функції f, а саме, властивостями похідних, означених в такий спосіб.

Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – довільна система комплексних чисел і

$$\mathcal{Z}(\psi) := \mathcal{Z}^d(\psi) := \Big\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \psi(\mathbf{k}) = 0\Big\}.$$

Надалі вважаємо, що множина $\mathcal{Z}(\psi)$ має скінченну кількість елементів.

Якщо для даної функції $f \in L(\mathbb{T}^d)$ знайдеться функція $g \in L(\mathbb{T}^d)$ така, що

$$S[f](\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}(\psi)} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k}) \widehat{g}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{3.35}$$

то кажуть, що у функції f існує ψ-похідна g, для якої використовують позначення $g = f^{\psi}$. При цьому, якщо $\mathcal{Z}(\psi) = \varnothing$, то перша сума в (3.35) покладається рівною нулеві.

Зрозуміло, що ψ-похідна для функцій з простору $\mathcal{S}^p$ є єдиною з точністю до суми

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}(\psi)} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},x)},$$

де $a_{\mathbf{k}}$ – будь-які числа. Дане означення ψ-похідної пристосоване для потреб досліджень, викладених у цьому підрозділі, і за суттю не відрізняється від поняття ψ-похідної О. І. Степанця, наведеного в підрозділі 3.1

Далі, розглядаються ψ-похідні функцій з $L(\mathbb{T}^d)$ в таких двох випадках:

1) $\psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}$ при $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, $r \geq 0$ і
2) $\psi(\mathbf{k}) = 0$ при $|\mathbf{k}|_1 = 0, 1, \ldots, r-1$ та $\psi(\mathbf{k}) = (\nu - r)!/\nu!$ при $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu \geq r$, $r \in \mathbb{N}$.

При цьому у першому випадку для ψ-похідної функції f використовуємо позначення $f^{(r)}$, у другому – $f^{[r]}$, а при $r = 0$ покладаємо $f^{(0)} = f^{[0]} = f$. Відмітимо також, що $f^{(1)} = f^{[1]}$.

3.5.2. **Прямі та обернені теореми наближення лінійними методами.** Перейдемо до формулювання основних результатів підрозділу 3.5. При цьому будемо використовувати позначення, наведені в підрозділах 3.4.2 та 3.4.4.

Твердження 3.30 ([46, 13])**.** *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* ($\mathcal{B}$)*. Тоді наступні твердження рівносильні:*

i) $\left\| S_n^{\triangle}\left(f^{[1]}\right)\right\|_{\mathcal{S}^p} = O(n\omega(\frac{1}{n}))$, $\quad n \to \infty$;

ii) $\|f - \sigma_n^{\triangle}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O(\omega(\frac{1}{n}))$, $\quad n \to \infty$.

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii)*, то*

iii) $f \in \mathcal{S}^p H^1_\omega$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$*, то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

Зазначимо, що імплікація ii)$\Rightarrow$iii) є твердженням типу прямих та обернених теорем для методу Фейєра [3].

В наступній теоремі даються прямі та обернені теореми наближення функцій оператором $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ в просторі $\mathcal{S}^p$ в термінах мажорант ω.

Теорема 3.31 ([46, 13])**.** *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* ($\mathcal{B}$)*. Наступні твердження рівносильні:*

i) $\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O((1-\varrho)^{r-1}\omega(1-\varrho))$, $\quad \varrho \to 1-$;

ii) $\left\|P(f^{[r]})(\varrho,\cdot)\right\|_{\mathcal{S}^p} = O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho})$, $\quad \varrho \to 1-$;

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii)*, то*

iii) $f^{[r-1]} \in \mathcal{S}^p H^1_\omega$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$*, то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

Зазначимо, що імплікація ii)⇒iii) є твердженням типу теорем Гарді-Літтлвуда [8].

Наведемо також апроксимаційні властивості сум $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ в просторі $\mathcal{S}^p$. Застосування теореми 3.31 до функції

$$f = g^{(s-1)}$$

зі значенням параметра $r = 1$ і врахування співвідношення

$$\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{\mathcal{S}^p} \sim \|f^{(s-1)} - P^{\triangle}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|_{\mathcal{S}^p}, \quad \varrho \to 1-, \tag{3.36}$$

дозволяє записати таке твердження.

Теорема 3.32 ([46, 13])**.** *Нехай* $1 \le p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* $(\mathfrak{B})$. *Наступні твердження рівносильні:*

i) $\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O(\omega(1-\varrho)), \quad \varrho \to 1-;$

ii) $\big\|P(f^{(s)})(\varrho,\cdot)\big\|_{\mathcal{S}^p} = O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho}), \quad \varrho \to 1-;$

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii)*, то*

iii) $f^{(s-1)} \in \mathcal{S}^p H_\omega$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

При $d = 1$ простір $L_{1,Y}(\mathbb{T}^1)$ збігається з простором $L_1(\mathbb{T}^1)$ і тому твердження i)–iii) в твердженні 3.30 і теоремах 3.31 та 3.32 є рівносильними без жодних застережень.

Зазначимо, що в [4] результати твердження 3.30, а також теорем 3.31 та 3.32, зокрема, розповсюджено на простори типу Орлича $\mathcal{S}_M$.

Література

[1] Abdullayev F. G., Chaichenko S. O., and Shidlich A. L. "Direct and inverse approximation theorems of functions in the Musielak-Orlicz type spaces". *Math. Inequal. Appl.* 24:2 (2021), pp. 323–336.

[2] Abdullayev F. G., Özkartepe P., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. "Exact constants in direct and inverse approximation theorems for functions of several variables in the spaces S^p". *Filomat* 33:5 (2019), pp. 1471–1484.

[3] Butzer P. L. and Nessel R. J. *Fourier Analysis and Approximation. Volume 1: One-Dimentional Theory.* Birkhäuser Basel, 1971, pp. xvi+553.

[4] Chaichenko S. O., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. "Approximation of functions by linear summation methods in the Orlicz-type spaces". *Укр. матем. вісник* 17:2 (2020), pp. 152–170.

[5] DeVore R. A. and Temlyakov V. N. "Nonlinear Approximation by Trigonometric Sums". *J. Fourier Anal. Appl.* 2:1 (1995), pp. 29–48.

[6] Dũng D., Temlyakov V., and Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation.* Springer International Publishing, 2018, pp. xi+218.

[7] Gao F. “Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator”. *J. Approx. Theory.* 162:4 (2010), pp. 646–652.

[8] Hardy G. H. and Littlewood J. E. “Some properties of fractional integrals. II”. *Math. Zeitschr.* 34:1 (1932), pp. 403–439.

[9] Kolmogoroff A. “Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse”. *Ann. of Math., Second series* 37:1 (1936), p. 107.

[10] Li R. S. and Liu Y. P. “Best m-term one-sided trigonometric approximation of some function classes defined by a kind of multipliers”. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 26:5 (2009), pp. 975–984.

[11] Pinkus A. *n-Widths in Approximation Theory.* Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. x+291.

[12] Prestin J., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. “Approximation theorems for multivariate Taylor-Abel-Poisson means”. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Matematica* 64:3 (2019), pp. 313–329.

[13] Savchuk V. V. and Shidlich A. L. “Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p”. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 80:3-4 (2014), pp. 477–489.

[14] Schmidt E. “Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I”. *Math. Annalen.* 63 (1906), pp. 433–476.

[15] Shidlich A. L. «Nonlinear approximation of the classes $F^{\psi}_{q,r}$ of functions of several variables in the integral metrics». *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 13. 3. Ін-т математики НАН України, 2016, с. 256—274.

[16] Shidlich A. L. and Chaichenko S. O. “Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces”. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 36:10 (2015), pp. 1339–1352.

[17] Stepanets A. I. *Methods of approximation theory.* De Gruyter, 2005, pp. xviii+919.

[18] Stepanets A. I. and Shidlich A. L. “Best approximations of integrals by integrals of finite rank”. *J. Approx. Theory* 162:2 (2010), pp. 323–348.

[19] Temlyakov V. N. *Approximation of periodic functions.* Computational mathematics and analysis series. Commack, New York: Nova Science Publ., 1993, p. 419.

[20] Temlyakov V. N. “Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation”. *Constr. Approx.* 14:4 (1998), pp. 569–587.

[21] Temlyakov V. N. *Greedy approximation.* Cambridge University Press, 2011, p. 418.

[22] Temlyakov V. N. *Sparse approximation with bases.* Springer Basel, 2015, p. 261.

[23] Абдуллаєв Ф. Г., Сердюк А. С. та Шидліч А. Л. «Поперечники функціональних класів, визначених мажорантами узагальнених модулів гладкості в просторах S^p». *Укр. мат. журн.* 73:6 (2021), с. 723—737.

[24] Бабенко А. Г. «О точной константе в неравенстве Джексона в L^2». *Матем. заметки* 39:5 (1986), с. 651—664.

[25] Бабенко В. Ф. и Конарева С. В. «Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства». *Укр. мат. журн.* 70:9 (2018), с. 1155—1165.

[26] Бабенко К. И. «О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами». *ДАН СССР* 132:5 (1960), с. 982—985.

[27] Бабенко К. И. «О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами». *ДАН СССР* 132:2 (1960), с. 247—250.

[28] Бари Н. К. и Стечкин С. Б. «Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций». *Тр. московского мат. об-ва.* 5 (1956), с. 483—522.

[29] Бугров Я. С. «Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка». *Mathematica (Cluj)* 5:28 (1963), с. 5—25.

[30] Бугров Я. С. «Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов». *Труды Мат. ин-та АН СССР* 117 (1972), с. 47—61.

[31] Вакарчук С. Б. «Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p, $1 \leq p < \infty$». *Укр. мат. журн.* 56:5 (2004), с. 595—605.

[32] Вакарчук С. Б. «Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I». *Укр. мат. журн.* 68:6 (2016), с. 723—745.

[33] Вакарчук С. Б. и Щитов А. Н. «О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространствах S^p, $1 \leq p < \infty$». *Укр. мат. журн.* 58:3 (2006), с. 303—316.

[34] Войцехівський В. Р. «Нерівності типу Джексона в просторі S^p». *Укр. мат. журн.* 55:9 (2003), с. 1167—1177.

[35] Войцехівський В. Р. «Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зігмунда». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України,* 35:33-46. Ін-т математики НАН України, 2002.

[36] Войцехівський В. Р. «Поперечники деяких класів простору S^p». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини,* 46:17-26. Ін-т математики НАН України, 2003.

[37] Войцехівський В. Р. та Сердюк А. С. «Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p методом Вороного». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України,* 2(2):43-53. Ін-т математики НАН України, 2005.

[38] Горбачук М. Л., Грушка Я. І. та Торба С. М. «Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца». *Укр. мат. журн.* 57:5 (2005), с. 633—643.

[39] Кахан Ж.-П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.* Москва: Мир, 1976, с. 204.

[40] Ласурия Р. А. «Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{p,q}(\sigma^{m-1})$». *Матем. заметки* 98:4 (2015), с. 530—543.

[41] Ласурия Р. А. «Прямые и обратные теоремы приближения функций, заданных на сфере, в пространстве $S^{p,q}(\sigma^m)$». *Укр. мат. журн.* 59:7 (2007), с. 901—911.

[42] Престін Ю., Савчук В. В. та Шидліч А. Л. «Прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона». *Укр. мат. журн.* 69:5 (2017), с. 657—669.

[43] Романюк А. С. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных.* Праці Ін-ту математики НАН України, 40, 2012, с. 352.

[44] Рукасов В. И. «Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой». *Укр. мат. журн.* 55:4 (2003), с. 500—509.

[45] Савчук В. В. «Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона». *Укр. мат. журн.* 59:9 (2007), с. 1253—1260.

[46] Савчук В. В. та Шидліч А. Л. «Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* Т. 4. 1. Ін-т математики НАН України, 2007, с. 302—317.

[47] Сердюк А. С. «Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 46. Ін-т математики НАН України, 2003, с. 229—248.

[48] Сердюк А. С. та Степанюк Т. А. «Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій». *Допов. НАН України* 2 (2015), с. 32—37.

[49] Степанец А. И. *Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ.* Киев: Ин-т математики НАН Украины, (Препр./ НАН Украины, Ин-т математики; 2001.2), 2001, с. 85.

[50] Степанец А. И. «Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 53:3 (2001), с. 392—416.

[51] Степанец А. И. «Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках». *Укр. мат. журн.* 53:8 (2001), с. 1121—1146.

[52] Степанец А. И. «Задачи теории приближений в линейных пространствах». *Укр. мат. журн.* 58:1 (2006), с. 47—92.

[53] Степанец А. И. *Методы теории приближений: В 2 ч.* Праці Ін-ту математики НАН Украини. Математика та її застосування, 40, (II), 2002, с. 468.

[54] Степанец А. И. *Методы теории приближений: В 2 ч.* Праці Ін-ту математики НАН Украини. Математика та її застосування, 40, (I), 2002, с. 427.

[55] Степанец А. И. «Наилучшие n-членные приближения с ограничениями». *Укр. мат. журн.* 57:4 (2005), с. 533—553.

[56] Степанец А. И. «Наилучшие приближения q-эллипсоидов в просторанствах $S^{p,\mu}_\varphi$». *Укр. мат. журн.* 56:10 (2004), с. 1378—1383.

[57] Степанец А. И. «Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах». *Укр. мат. журн.* 55:3 (2003), с. 1392—1423.

[58] Степанец А. И. и Рукасов В. И. «Наилучшие «сплошные» n-членные приближения в пространствах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 55:5 (2003), с. 801—811.

[59] Степанец А. И. и Рукасов В. И. «Пространства S^p с несимметричной метрикой». *Укр. мат. журн.* 55:2 (2003), с. 264—277.

[60] Степанец А. И. и Сердюк А. С. «Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p». *Укр. мат. журн.* 54:1 (2002), с. 106—124.

[61] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. «О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ». *Нелін. колив.* 10:4 (2007), с. 528—559.

[62] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. *Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций.* Киев: Ин-т математики НАН Украины, (Препр. НАН Украины, Ин-т математики; 2007.2), 2007, с. 103.

[63] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. «Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций». *Изв. РАН. Сер. матем.* 74:3 (2010), с. 169—224.

[64] Степанець О. І. та Шидліч А. Л. «Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 55:8 (2003), с. 1107—1126.

[65] Стерлин М. Д. «Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений». *Докл. АН СССР* 202:3 (1972), с. 545—547.

[66] Стечкин С. Б. «Об абсолютной сходимости ортогональных рядов». *Докл. АН СССР* 102:1 (1955), с. 37—40.

[67] Тайков Л. В. «Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2». *Мат. заметки* 20:3 (1976), с. 433—438.

[68] Тайков Л. В. «Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2». *Мат. заметки* 25:2 (1979), с. 217—223.

[69] Темляков В. Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной.* Тр. МИАН СССР, 178, 1986, с. 113.

[70] Тиман М. Ф. *Аппроксимация и свойства периодических функций.* Киев: Наук. думка, 2009, с. 376.

[71] Тиман М. Ф. «Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p, $(1 \le p \le \infty)$». *Матем. сб.* 46(88):1 (1958), с. 125—132.

[72] Тиман М. Ф. «Обратные теоремы конструктивной теории функций многих переменных». *Докл. АН СССР* 120:6 (1958), с. 1207—1209.

[73] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г. *Неравенства.* Москва: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 456.

[74] Чайченко С. О. та Шидліч А. Л. «Апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича». *Укр. матем. вісник* 15:2 (2018), с. 194—209.

[75] Черных Н. И. «О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2». *Матем. заметки* 2:5 (1967), с. 513—522.

[76] Черных Н. И. «О неравенстве Джексона в L_2». *Тр. МИАН СССР* 88 (1967), с. 71—74.

[77] Шидліч А. Л. «Апроксимативні характеристики просторів S^p_Φ». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 5. 1. Ін-т математики НАН України, 2008, с. 404—430.

[78] Шидліч А. Л. «Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини,* 46:283-306. Т. 46. Ін-т математики НАН України, 2003, с. 283—306.

[79] Шидліч А. Л. «Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 60:6 (2008), с. 815—828.

[80] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки для деяких апроксимаційних характеристик». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 10. 1. Ін-т математики НАН України, 2013, с. 304—337.

[81] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $F^\psi_{q,\infty}$ в просторах $L_p(T^d)$». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 8. 1. Ін-т математики НАН України, 2011, с. 302—317.

[82] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки функціоналів, в термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $F^\psi_{q,r}$». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 11. 3. Ін-т математики НАН України, 2014, с. 287—314.

[83] Шидліч А. Л. «Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень та поперечників». *Укр. мат. журн.* 61:10 (2009), с. 1403—1423.

[84] Шидліч А. Л. «Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 56:1 (2004), с. 133—138.

[85] Шидліч А. Л. та Чайченко С. О. «Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах l_p». *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 11. 2. Ін-т математики НАН України, 2014, с. 399—412.

[86] Шидліч А. Л. та Чайченко С. О. «Деякі екстремальні задачі в просторах Орлича». *Матем. студії* 42:1 (2014), с. 21—32.

А. С. Сердюк

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: sanatolii@ukr.net

ORCID: orcid.org/0000-0003-2659-8920

А. Л. Шидліч

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: shidlich@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0002-6421-9277

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 644–672

Метод зрізки в задачах чисельного підсумовування і диференціювання

Є. В. Семенова, С. Г. Солодкий, С. А. Стасюк

Abstract. The problems of numerical summation and differentiation of functions with finite smoothness are investigated. In order to ensure stability of approximations different variants of the truncation method are considered. For the constructed methods, error estimates are found in integral and uniform metrics. Moreover the volume of the used Fourier coefficients is calculated.

Анотація. Досліджено задачі чисельного підсумовування і диференціювання функцій скінченної гладкості. З метою забезпечення стійкості наближень розглянуто різні варіанти методу зрізки. Для побудованих методів знайдено оцінки похибки в інтегральній і рівномірній метриках, а також обчислено обсяг використаних коефіцієнтів Фур'є.

1. Вступ

Як відомо, значну і суттєво важливу частину некоректних задач складають задачі, що є нестійкими до малих збурень вхідних даних. Вказана особливість унеможливлює розв'язування подібних задач шляхом виключно їх дискретизації, без застосування техніки регуляризації. Чисельному розв'язуванню саме таких задач присвячені дослідження групи фахівців Інституту математики НАНУ, що тривають більш ніж 20 років. Дана стаття являє собою огляд їх основних досягнень при розв'язуванні двох популярних нестійких задач: по-перше, задачі відновлення функції скінченною сумою її ряду Фур'є (задачі підсумовування), по-друге, задачі наближеного знаходження похідної функції (задачі чисельного диференціювання). Метою наших досліджень є побудова та вивчення апроксимаційних властивостей чисельних методів розв'язування вказаних задач на класах функцій двох змінних скінченної гладкості у випадку, коли вхідна інформація про досліджувану

2010 Mathematics Subject Classification: 65D25, 47A52

УДК 519.653

Ключові слова: чисельне підсумовування, чисельне диференціювання, метод зрізки

функцію являє собою набір її неточно заданих коефіцієнтів Фур'є. Для досягнення вказаної мети задіяні два модельні варіанти методу зрізки, що мають різні області підтримки (тобто використовують коефіцієнти Фур'є з індексами, які належать різним областям координатної площини). Нижче наведемо опис основних результатів проведених досліджень:

– для обох варіантів методу зрізки знайдено мінімальні оцінки похибки,
– оцінено обсяги коефіцієнтів Фур'є, використаних обома варіантами задля досягнення мінімальної похибки,
– розглянуто випадок невідомої гладкості досліджуваної функції,
– оцінки похибки обчислені в рівномірній та інтегральній метриках.

Стаття має наступну структуру. Розділ 2 присвячений задачі чисельного підсумовування функцій скінченної гладкості. У підрозділі 2.1 сформульовано постановку досліджуваної задачі, надано коротку історичну довідку щодо досягнень попередників, а також наведено деякі результати для функцій однієї змінної. Далі, введено у розгляд об'єкт подальших досліджень – клас функцій двох змінних, що мають скінченну гладкість, наведено опис двох варіантів, стандартного та модифікованого, методу зрізки, що побудовані з підтримкою на квадраті/прямокутнику та гіперболічному хресті, відповідно. У підрозділі 2.2, на класах функцій ізотропної гладкості, вивчається ефективність цих підходів в сенсі точності й обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є. Вказані дослідження продовжуються в п. 2.3 у випадку функцій анізотропної гладкості. Розділ 3 присвячений дослідженню задачі чисельного диференціювання функцій скінченної гладкості. В підрозділах 3.1 – 3.4 розглянуто випадок періодичних функцій двох змінних зі збуреними коефіцієнтами Фур'є за тригонометричною системою. Для обох модельних варіантів методу зрізки досліджено їх ефективність для функцій ізотропної (див. п. 3.1) та анізотропної (див. п. 3.3) гладкості, а також (див. п. 3.2) вивчено випадок невідомого значення гладкості наближуваної функції. В усіх згаданих вище дослідженнях оцінка похибки вимірюється в рівномірній метриці. На противагу до попередніх результатів, в п. 3.4 вивчається ситуація, коли оцінка похибки чисельного диференціювання вимірюється в інтегральній метриці. Підрозділ 3.5 містить дослідження задачі диференціювання неперіодичних функцій двох змінних у разі, коли вхідна інформація має вигляд збурених значень коефіцієнтів Фур'є за системою поліномів Лежандра.

2. Чисельне підсумовування гладких функцій зі збуреними коефіцієнтами Фур'є

Задача наближення функції скінченною сумою її ряду Фур'є (коротше кажучи, задача підсумовування) є однією з класичних проблем теорії функцій і станом на сьогоднішній день добре вивчена для багатьох класів функціональних просторів у разі точно заданих коефіцієнтів Фур'є. Ситуація суттєво ускладнюється, якщо вхідні дані (у нашому випадку, коефіцієнти Фур'є) відомі неточно. Внесення шуму в розглядувану модель може по-різному вплинути на характер досліджуваної задачі. Пояснимо цю думку наступним чином. Нехай збурення вхідних даних вимірюється в метриці ℓ_2, а похибка підсумовування функції за такими вхідними даними оцінюється в метриці простору L_2. Тоді наявність малих збурень вхідних даних не впливає на стійкість розглядуваної задачі, а узгодження рівня дискретизації з рівнем збурення вхідних даних відбувається лише з метою запобігти так званому ефекту насичення (тобто ситуації, коли подальше збільшення кількості залучених в обчисленнях коефіцієнтів Фур'є не покращує точності наближення). Принципово інша ситуація спостерігається, якщо рівень збурення вхідних даних залишається відомим в метриці ℓ_2, а вимірювати похибку наближення треба в рівномірній метриці або в метриці простору L_q, $2 < q < \infty$. На вказаних парах просторів задача підсумовування є нестійкою до малих збурень вхідних даних. У цьому разі узгодження рівня дискретизації з рівнем збурення дозволяє уникнути нестійкості побудованих наближень, а також мінімізувати похибку наближення. Зауважимо, що замалий вибір параметру дискретизації породжує занадто грубу модель задачі, що вивчається, а завеликий вибір параметру дискретизації призводить до виникнення осциляції побудованих наближень. Обидві вказані крайності мають своїм наслідком суттєве (іноді, навіть як завгодно велике) зростання похибки. Тому процедура чисельного підсумовування функцій потребує узгодження рівнів збурення і дискретизації. Такий процес в теорії некоректних задач отримав назву *регуляризації*.

2.1. **Функції однієї змінної.** Під $L_{2,1} := L_2[0,1]$ будемо розуміти простір функцій, сумовних в квадраті на відрізку $[0,1]$, з нормою

$$\|y\|_{L_2} := \left(\int_0^1 |y(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Позначимо через

$$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$$

систему функцій, що є ортонормованою у $L_{2,1}[0,1]$ відносно стандартного скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а через

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k\cdot\varphi_k(t),\quad y_k=\langle y,\varphi_k\rangle,$$

– ряд Фур'є функції $y(t)\in L_{2,1}$ за системою функцій $\{\varphi_k(t)\}$. Під $C=C[0,1]$ будемо розуміти простір неперервних на $[0,1]$ функцій. Нехай, крім того, ℓ_2 – простір числових послідовностей $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ таких, що виконується умова

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|x_k|^2<\infty.$$

Розглянемо задачу підсумовування, яка є класичним прикладом нестійкої задачі і яку можна вважати відправною точкою відповідних досліджень. Припустимо, що замість точних значень y_k коефіцієнтів Фур'є відомі лише їх деякі наближені значення y_k^δ, що вельми часто зустрічається у прикладних задачах. При цьому будемо вважати, що рівень збурення коефіцієнтів Фур'є малий у сенсі норми простору ℓ_2 та справджується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k-y_k^\delta|^2\le\delta^2,\qquad\delta\in(0,1).\tag{2.1}$$

Природним чином виникає важлива прикладна задача: за наближеними значеннями коефіцієнтів Фур'є y_k^δ відновити у даній фіксованій точці t функцію $y(t)\in C[0,1]$ з рівнем похибки $\varepsilon(\delta)$, що прямує до нуля, коли $\delta\to0$.

Добре відомо, що така задача є некоректною, оскільки відхилення функції $y(t)\in C[0,1]$ від суми її ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k^\delta\,\varphi_k(t)$ у метриці простору $C[0,1]$ може виявитися як завгодно великим.

Метод підсумовування називається стійким, якщо за неточними вхідними даними задачі й відомою величиною їх збурення δ цей метод породжує наближення з рівнем точності $\varepsilon(\delta)\to0$ при $\delta\to0$.

Вперше для розв'язування розглядуваної задачі А. М. Тіхоновим [31] був запропонований стійкий до малих збурень коефіцієнтів Фур'є метод підсумовування рядів Фур'є. Цей метод ґрунтується на загальних принципах регуляризації, що покладені в підвалини створеної ним теорії некоректних задач (див. [32]), й полягає у наближенні за правилом

$$T_n^\alpha(y^\delta)(t)=\sum_{k=1}^{n(\delta)}r(k,\alpha)\,y_k^\delta\,\varphi_k(t),\tag{2.2}$$

де регуляризуючий множник має вигляд

$$r(k,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha\psi_k}.$$

При цьому припускалося, що $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність додатних чисел, порядок зростання яких при $k\to\infty$ не нижчий ніж $k^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon\geq 0$, а значення параметра регуляризації α мають бути узгодженими з похибкою вхідних даних $\delta:\ \alpha=\alpha(\delta)$. Згодом метод вигляду (2.2) отримав назву методу зрізки. Суть цього методу полягає в заміні ряду Фур'є функції, що відновлюється, її скінченною сумою Фур'є.

В [31] була доведена збіжність методу (2.2) на класі функцій

$$C_\rho:=\Big\{y\in C[0,1]:\ \sum_{k=1}^{\infty}|\langle y,\varphi_k\rangle|^2\,\psi_k\leq\rho<\infty\Big\},$$

де $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – задана ортонормована система.

Далі, в [23] для довільної ортонормованої системи рівномірно обмежених функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що

$$\|\varphi_k\|_C<\infty, \tag{2.3}$$

було знайдено оцінку точності для методу (2.2) при $\psi_k=k^{2s}$, $s>\frac{1}{2}$, на класі функцій з коефіцієнтами Фур'є y_k, $|y_k|=O(k^{-p})$, $k=1,2,\ldots$, $p>1+\frac{s}{2}$.

Введемо тепер поняття, яке надалі матиме для нас важливе значення.

Означення 2.1.1. Будемо говорити, що повна ортонормована у просторі $L_{2,1}$ система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ належить до класу K^β, якщо для деяких $\beta\geq 0$ і $d>0$ виконується умова

$$\big\|\varphi_k\big\|_C\leq d\,k^\beta,\quad k=1,2,\ldots. \tag{2.4}$$

Приклад 2.1.2. Тригонометрична система функцій при $\beta=0$ має властивість (2.4), а тому задовольняє умову (2.3). Разом з тим система поліномів Лежандра не задовольняє умову (2.3), проте належить до класу K^β при $\beta=\frac{1}{2}$.

У роботі П. Мате та С. В. Переверзєва [8] була розглянута варіація методу зрізки (2.2), що визначається наступним чином

$$T_n^\lambda(y^\delta)(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,y_k^\delta\,\varphi_k(t). \tag{2.5}$$

Тут відносно трикутної матриці $\lambda=\{\lambda_k=\lambda_k^n,\ k=1,2,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}\}$ припускалось, що існують такі константи $c>0$ й $\theta>0$, що виконується умова

$$|1-\lambda_k| \le c\left(\frac{k}{n}\right)^{\theta}.$$

У такому разі будемо говорити, що метод підсумовування (2.5) має порядок θ. Перевагою варіанту (2.5) перед варіантом (2.2) є простота його застосування. А саме, метод (2.2) вимагає впровадження окремого параметру регуляризації α, а також подальшого узгодження величин α, n з δ, натомість для реалізації методу (2.5) достатньо лише належним чином вибрати параметр дискретизації n, який тут відіграє роль параметра регуляризації.

В [8] на класах функцій

$$W_{2,1}^{\mu} = \left\{ y(t) \in L_{2,1} \colon \, \|y\|^2_{W_{2,1}^{\mu}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\mu} \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 < \infty \right\}$$

були знайдені оцінки похибки методу (2.5) у випадку довільних ортонормованих систем, що задовольняють умову 2.1.1.

Теорема 2.1.3 ([8])**.** *Нехай задана послідовність збурених значень* (2.1)*, а* $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *належить до класу* K^{β}*. Якщо* $y(t,\tau) \in W_{2,1}^{\mu}$ *для деякого апріорі відомого* $\mu > \beta + \frac{1}{2}$*, то для методу зрізки* $T_n^{\lambda}(y_\delta)$ (2.5) *порядку* $\theta \ge \mu$ *при* $n \asymp \delta^{-1/\mu}$ *справджується оцінка*

$$\sup_{\|y\|_{W_{2,1}^{\mu}} \le 1} \left\| y - T_n^{\lambda}(y^{\delta}) \right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu}}.$$

Надалі в роботі [16] результат теореми 2.1.3 було узагальнено на випадок гладких функцій з класу $W_{2,1}^{\psi}$, що пов'язаний із заданою системою $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \in K^{\beta}$ таким чином

$$W_{2,1}^{\psi} = \left\{ y(t) \in L_{2,1} \colon \, \|y\|^2_{\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 < \infty \right\},$$

де $\psi(k)$ — деяка монотонно зростаюча функція. Оцінка точності для методу зрізки (2.5) на класі функцій $W_{2,1}^{\psi}$ міститься в наступному твердженні.

Теорема 2.1.4 ([16])**.** *Нехай виконуються умови теореми 2.1.3, а метод зрізки* $T_n^{\lambda}(y_\delta)$ (2.5) *має порядок* θ*. Якщо* $\psi(k)$ *зростає не швидше* *ніж* k^θ, *але швидше ніж* k^p, *де* $p > \beta + \frac{1}{2}$, *то для* $n \asymp \psi^{-1}(1/\delta)$ *справджується оцінка*

$$\sup_{\|y\|_{W^{\psi}_{2,1}} \le 1} \left\| y - T^{\lambda}_{n}(y^{\delta}) \right\|_{C} \preceq \delta \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{\delta} \right) \right]^{\beta + \frac{1}{2}}.$$

Нещодавно дослідження з [16] були продовжені в роботі [13] на випадок, коли похибка вхідних даних вимірюється в метриці простору ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

2.2. **Функції двох змінних. Ізотропний випадок.** Даний підрозділ містить результати досліджень задачі чисельного підсумовування функцій двох змінних. Для викладення необхідних матеріалів нам знадобляться наступні позначення. Нехай $L_{q,2} := L_q(Q)$, $1 \le q < \infty$, — простір сумовних функцій двох змінних на квадраті $Q = [0,1] \times [0,1]$ зі стандартною нормою

$$\|y\|_{L_q} := \left(\iint\limits_{Q} |y(t,\tau)|^q \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \right)^{\frac{1}{q}},$$

а під $C = C(Q)$ надалі будемо розуміти простір неперервних на Q функцій. Нехай, крім того, ℓ_p, $2 \le p < \infty$, — простір числових послідовностей $\{x_{k,j}\}_{k,j \in \mathbb{N}}$ таких, що виконується умова

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_{k,j}|^p < \infty.$$

Варто зазначити, що, на відміну від випадку функцій однієї змінної (див. підрозділ 2.1), дослідження щодо зазначеної проблематики для функцій багатьох змінних довгий час майже не проводились. Серед відомих нам робіт попередників слід згадати дві статті [33] та [27]. Так, в [33] був узагальнений метод зрізки (2.2) на випадок, коли $\left\{ \varphi_k(\bar{t}) \right\}_{k=1}^{\infty}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^N$, є фундаментальною системою функцій оператора Лапласа в обмеженій N-вимірній області ($N > 4$), де регуляризуючі множники мають вигляд $(1 + \alpha\lambda_k)^{-s}$, $s = [N/4] + 1$. При цьому для методу підсумовування (2.2) була встановлена його збіжність.

Пізніше в [27] аналогічні дослідження були проведені для функцій двох змінних, що подані у вигляді ряду Фур'є за тригонометричною системою, де регуляризуючі множники було запропоновано факторизувати, тобто використовувати множники вигляду $\left[(1 + \alpha k_1^2)(1 + \alpha k_2^2) \right]^{-1}$. Тут автори обмежилися встановленням факту збіжності запропонованого методу підсумовування.

В той самий час проблема визначення швидкості збіжності при підсумовуванні рядів Фур'є функцій багатьох змінних (на парі просторів ℓ_2 й C) ще донедавна залишалась відкритою. Саме поданню досягнень авторів огляду при дослідженні вказаної задачі присвячений матеріал цього розділу.

Об'єктом наших подальших досліджень є наступний простір функцій двох змінних скінченної гладкості:

$$L^{\bar{\mu}}_{2,2} = L^{\bar{\mu}}_{2}(Q) := \left\{ y \in C(Q) : \; \|y\|^2_{L^{\bar{\mu}}_{2,2}} := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^{2\mu_1} \, j^{2\mu_2} \, |y_{i,j}|^2 < \infty \right\},$$

де $0 < \mu_1 \leq \mu_2$, а $y_{i,j} = \langle y, \varphi_i \varphi_j \rangle$ — коефіцієнти Фур'є функції $y(t,\tau) \in C(Q)$ за системою $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \in K^{\beta}$. У разі функцій ізотропної гладкості $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ будемо використовувати позначення $L^{\mu}_{2,2}$ замість $L^{\bar{\mu}}_{2,2}$. Відомо (див., наприклад, [2], [3], [20]), що клас $L^{\bar{\mu}}_{2,2}$ узагальнює класи функцій двох змінних з домінуючою мішаною частинною похідною і є модельним у багатьох задачах відновлення функцій.

Припустимо, що замість точних значень коефіцієнтів $y_{i,j}$ відомі їх збурені значення, тобто задана послідовність чисел $y^{\delta} := \{y^{\delta}_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ таких, що

$$y^{\delta}_{i,j} = y_{i,j} + \delta \, \xi_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\ldots, \tag{2.6}$$

де $\delta \in (0,1)$ й $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{i,j}|^2 \leq 1$.

Наші дослідження присвячені застосуванню метода зрізки для стійкого наближення функцій з класів $L^{\bar{\mu}}_{2,2}$ ($L^{\mu}_{2,2}$). Як зазначалося раніше, з метою забезпечення стійкості наближення та досягнення необхідного порядку точності, в методі зрізки необхідно належним чином вибрати параметр дискретизації, який тут відіграє роль параметра регуляризації. Очевидно, що для функцій y з $L^{\bar{\mu}}_{2,2}$ доцільно вибирати коефіцієнти Фур'є $y_{i,j}$ з індексами (i,j), що розміщені навколо початку координат декартової площини. У випадку функцій однієї змінної задача вибору множини індексів може бути зведена до задачі відшукання верхньої межі n їх значень. Що стосується функції двох (або більшої кількості) змінних, то тут виникає додаткова задача, а саме – якою має бути форма області Ω, що описує найкращу можливу конфігурацію використаних точок (i,j) декартової площини. У зв'язку з цим нагадаємо, що область Ω, звідки беруться залучені у підсумовуванні індекси (i,j), називається областю підтримки розглянутого методу підсумовування.

У випадку довільної області підтримки Ω метод підсумовування може бути записаний наступним чином

$$T_\Omega^\lambda(y^\delta)(t,\tau) = \sum_{(i,j)\in\Omega} \lambda_{i,j} y_{i,j}^\delta \,\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau), \tag{2.7}$$

де $y_{i,j}^\delta$ означено за допомогою (2.6).

Слід зазначити, що підхід (2.7) містить в собі не лише стандартний метод Фур'є ($\lambda_{i,j} = 1$, $\forall i, j$), але також відомі методи підсумовування, такі як метод підсумовування Валле Пуссена, Фейєра, Рогозинського, Зігмунда та інші.

На сьогодні існує декілька підходів щодо того, як вибрати область підтримки (див., наприклад, [17, 18, 19, 20]). В межах наших досліджень будуть розглянуті два найефективніших та найпопулярніших підходи до вибору області підтримки, по-перше, стандартний варіант, коли Ω є прямокутником/квадратом, а також альтернативний варіант, що передбачає застосування так званого гіперболічного хреста.

Мета досліджень розділу 2 — мінімізувати оцінку похибки

$$\|y - T_\Omega^\lambda(y^\delta)\|_C$$

через вибір області Ω залежно від значень параметрів μ_1, μ_2 і δ.

Розпочнемо з розгляду стандартного підходу до вибору області підтримки. Отже, для наближення функцій з класу ізотропної гладкості $L_{2,2}^\mu(Q)$ ми пропонуємо розглянути такий варіант методу зрізки (2.7):

$$T_n^\lambda(y^\delta)(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, y_{i,j}^\delta \,\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau), \tag{2.8}$$

де область Ω має форму квадрата $[1,n]\times[1,n]$, а відносно множини $\lambda = \{\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}^n : \ i,j = 1,2,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}\}$ припускається, що існують такі константи $c_\lambda > 0$ й $\theta \ge 0$, що виконується умова

$$|1-\lambda_{i,j}| \le c_\lambda \left(\frac{ij}{n^2}\right)^\theta.$$

При цьому було встановлено наступний результат.

Теорема 2.2.1 ([17]). *Нехай задана послідовність збурених значень* (2.6), *а* $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *належить до класу* K^β. *Якщо* $y(t,\tau)\in L_{2,2}^\mu$ *для деякого апріорі відомого* $\mu > \beta + \frac{1}{2}$, *то для методу зрізки* (2.8) *порядку*

$\theta > \mu$ при $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+\beta+\frac{1}{2}}}$ має місце оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}}\le 1} \left\| y - T^{\lambda}_n(y^{\delta}) \right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu+\beta+\frac{1}{2}}}.$$

Надалі під card ми розумітимемо обсяг коефіцієнтів Фур'є, використаних в межах відповідного методу.

Наслідок 2.2.2. *Метод (2.8) гарантує на класі $L^{\mu}_{2,2}$ точність підсумовування $\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu+\beta+\frac{1}{2}}}$ шляхом використання*

$$\mathrm{card} = O\Big(\varepsilon^{-\frac{2}{\mu-\beta-\frac{1}{2}}}\Big) \tag{2.9}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є.

Другий підхід до вибору області підтримки Ω пов'язаний з ідеєю гіперболічного хреста, який вперше був застосований у наближеннях в роботі [24]. В цьому підході ми будемо наближати функцію y, використовуючи тільки її збурені коефіцієнти Фур'є $y^{\delta}_{i,j}$ з індексами в точках (i,j) декартової площини xOz, які належать до області, що обмежується гіперболою $xz = n$. Ідея гіперболічного хреста застосовувалась багатьма математиками для ефективного наближення функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною (для більш детальної інформації див. огляд [3]). Далі, для некоректних задач у формі рівнянь Фредгольма першого роду гіперболічний хрест використовувався С. В. Переверзєвим [11]. Детальніша інформація про застосування гіперболічного хреста до розв'язування некоректних задач може бути знайдена в [28, 29].

Отже, при наближенні функцій з класу ізотропної гладкості $L^{\mu}_{2,2}$ під гіперболічним хрестом розумітимемо підмножину квадрату $[1,n]\times[1,n]$ вигляду

$$\{(i,j) : ij \le n,\ 1 \le i,j \le n\}.$$

Тоді відповідний метод зрізки визначається за таким правилом

$$S^{\nu}_n(y^{\delta})(t,\tau) = \sum_{ij\le n, 1\le i,j\le n} \nu_{i,j}\, y^{\delta}_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau). \tag{2.10}$$

Апроксимаційні властивості методу $S^{\nu}_n(y^{\delta})$ залежать від рівня дискретизації n й від множини $\nu = \{\nu_{i,j} = \nu^{n}_{i,j} : i,j = 1,2,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Будемо припускати, що існують такі констати $\sigma_\nu > 0$ і $\theta \geq 0$, що справджується нерівність

$$|1-\nu_{i,j}| \leq \sigma_\nu \left(\frac{ij}{n}\right)^\theta.$$

При цьому було встановлено наступний результат.

Теорема 2.2.3. *Нехай задана послідовність збурених значень* (2.6), *а* $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *належить до класу* K^β. *Якщо* $y(t,\tau) \in L^\mu_{2,2}$ *для деякого апріорі відомого* $\mu > \beta + \frac{1}{2}$, *то для методу зрізки* (2.10) *порядку* $\theta > \mu$ *при* $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu}}$ *має місце оцінка*

$$\sup_{\|y\|_{L^\mu_{2,2}} \leq 1} \left\| y - S^\nu_n(y_\delta) \right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu}} \sqrt{\ln|\delta|}.$$

Наслідок 2.2.4. *Метод* (2.10) *гарантує на класі* $L^\mu_{2,2}$ *точність підсумовування* $\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu}} \sqrt{|\ln\delta|}$ *шляхом використання*

$$\mathrm{card} = O\Big(\varepsilon^{-\frac{\mu+\beta+\frac{1}{2}}{\mu(\mu-\beta-\frac{1}{2})}} \left|\ln\varepsilon\right|^{\frac{1}{2}+\frac{\mu+\beta+\frac{1}{2}}{\mu(\mu-\beta-\frac{1}{2})}}\Big) \tag{2.11}$$

гармонік з індексами з гіперболічного хреста $\big\{(i,j)\colon\ ij \leq n,\ 1 \leq i, j \leq n\big\}$.

Зауваження 2.2.5. Порівняння результатів, викладених у наслідках 2.2.2 і 2.2.4, дозволяє зробити висновок, що на відміну від стандартного підходу (2.8) метод (2.10) не лише забезпечує кращий порядок точності на класі $L^\mu_{2,2}$, але при цьому є більш економічним у сенсі кількості коефіцієнтів Фур'є $y^\delta_{i,j}$, які залучені в обчисленнях (див. (2.9) і (2.11)).

У викладених вище дослідженнях вважалось, що число μ, яке визначає гладкість наближуваної функції, є відомим. Проте на практиці така інформація швидше за все недоступна. Принципово нова (і більш складна) задача полягає у тому, щоб вибрати n не знаючи μ та зберегти при цьому порядок точності методу (2.10) на класі $L^\mu_{2,2}$. Правила вибору n такого типу називаються апостеріорними правилами. В межах наших досліджень за апостеріорне правило візьмемо принцип рівноваги. Суть цього підходу полягає у поданні похибки наближення у вигляді суми двох функцій (зростаючої та спадної) залежно від n і подальшому знаходженні точки перетину цих функцій. Знайдене таким чином приблизне значення n мінімізує похибку наближення, а тому береться за відповідний рівень регуляризації. Слід зазначити, що ідея застосування такого правила при розв'язуванні некоректних задач була запропонована в роботах [6, 12]. Отже, введемо множину

$$M^+ := \Big\{ n\colon \ \Big\| S_n^\nu(y^\delta) - S_m^\nu(y^\delta) \Big\|_C \le 4c_1\,\delta\, m^{\beta+\frac{1}{2}}\sqrt{\ln m} \ \ \forall m > n \Big\}$$

й число

$$n_+ := \min\big\{\, n:\ n \in M^+ \,\big\}, \tag{2.12}$$

де $c_1 > 0$ — деяка відома константа.

Запропонований апостеріорний вибір параметра дискретизації полягає у знаходженні n_+ за правилом (2.12).

Теорема 2.2.6. *Нехай величина n_+ знаходиться за принципом рівноваги* (2.12)*. Тоді в умовах теореми 2.2.3 справджується оцінка*

$$\sup_{\|y\|_{L^\mu_{2,2}} \le 1} \Big\| y - S_{n_+}^\nu(y^\delta) \Big\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-\beta-\frac{1}{2}}{\mu}} \cdot \sqrt{|\ln \delta|}.$$

Зауваження 2.2.7. Очевидно, що знаходження величини n_+ призводить до збільшення загального обсягу обчислень під час реалізації методу (2.10) в умовах невідомого μ. Таким чином, зазначене зростання обчислювальних витрат можна розглядати як певну "платню" за відмову від знання точної величини μ при збереженні порядку похибки наближення (див. теореми 2.2.3, 2.2.6).

Результати підрозділу 2.2 опубліковані в [18].

2.3. **Функції двох змінних. Анізотропний випадок.** Перейдемо до функцій анізотропної гладкості з класів $L^{\bar\mu}_{2,2}$, де $\mu_1 < \mu_2$. Тоді метод зрізки по прямокутнику будується наступним чином

$$T_n^\lambda(y^\delta)(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tilde n} \lambda_{i,j}\, y^\delta_{i,j}\, \varphi_i(t)\varphi_j(\tau), \quad \tilde n = [n^{1/\tilde\gamma}], \tag{2.13}$$

де

$$\tilde\gamma := \tilde\mu_2/\tilde\mu_1 = \Big(\mu_2 - \beta - \frac{1}{2}\Big)\Big/\Big(\mu_1 - \beta - \frac{1}{2}\Big) > 1,$$
$$\tilde\mu_1 := \mu_1 - \beta - \frac{1}{2}, \qquad \tilde\mu_2 := \mu_2 - \beta - \frac{1}{2}.$$

Апроксимаційні властивості методу $T_n^\lambda(y^\delta)(t,\tau)$ (2.13) залежать від рівня дискретизації n і від множини

$$\lambda = \{\lambda_{i,j} = \lambda^n_{i,j}\colon\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,\tilde n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Будемо вважати, що існують сталі $\sigma_\lambda > 0$ і $\theta > 0$ такі, що виконується нерівність

$$|1-\lambda_{i,j}| \le \sigma_\lambda \left(\frac{ij}{n^{1+1/\tilde{\gamma}}}\right)^{\theta}. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3.1. *Нехай послідовність збурених значень y^δ задано в (2.6), а $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \in K^\beta$. Якщо $y \in L_{2,2}^{\bar{\mu}}$ для деяких апріорі відомих*

$$\mu_2 > \mu_1 > \beta + \frac{1}{2},$$

то для методу зрізки (2.13) порядку $\theta > \mu_2 - \beta - \frac{1}{2}$ при

$$n \asymp \delta^{-\frac{\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})}{\mu_1\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})^2}} \tag{2.15}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\bar{\mu}}}\le 1} \left\| y - T_n^\lambda(y^\delta)\right\|_C \preceq \delta^{\frac{(\mu_1-(\beta+\frac{1}{2}))(\mu_2-(\beta+\frac{1}{2}))}{\mu_1\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})^2}}.$$

Наслідок 2.3.2. *З теореми 2.3.1 випливає, що для досягнення точності*

$$\varepsilon \asymp \delta^{\frac{(\mu_1-(\beta+\frac{1}{2}))(\mu_2-(\beta+\frac{1}{2}))}{\mu_1\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})^2}}$$

на класі $L_{2,2}^{\bar{\mu}}$, $\mu_2 > \mu_1 > \beta + \frac{1}{2}$, стандартний метод зрізки (2.13) *вимагає*

$$\operatorname{card} \asymp n^{1+\frac{1}{\tilde{\gamma}}} \asymp \delta^{-\frac{\mu_1-(\beta+\frac{1}{2})+\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})}{\mu_1\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})^2}} \asymp \varepsilon^{-\frac{\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2}{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}} =$$
$$= \varepsilon^{-\left(\frac{1}{\mu_1-(\beta+\frac{1}{2})}+\frac{1}{\mu_2-(\beta+\frac{1}{2})}\right)}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з прямокутника

$$\{(i,j)\colon\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,\tilde{n},\ n\in\mathbb{N}\},\quad \tilde{n}=[n^{1/\tilde{\gamma}}],$$
$$\tilde{\gamma} = \left(\mu_2-\beta-\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\mu_1-\beta-\frac{1}{2}\right).$$

Побудуємо тепер модифікований варіант методу зрізки для наближення функцій з $L_{2,2}^{\bar{\mu}}$ і порівняємо його властивості зі стандартним варіантом (2.13). Нехай

$$S_n^\nu(y^\delta)(t,\tau) = \sum_{ij^\gamma\le n} \nu_{i,j}\, y_{i,j}^\delta\, \varphi_i(t)\varphi_j(\tau), \tag{2.16}$$

де $\gamma > 1$, а множина

$$\big\{(i,j): ij^\gamma \le n,\, i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,[n^{1/\gamma}],\, n\in\mathbb{N}\big\}$$

називається *нерівномірним гіперболічним хрестом.* Апроксимаційні властивості методу $S_n^\nu(y^\delta)(t,\tau)$ залежать від рівня дискретизації n та від множини

$$\nu = \big\{\nu_{i,j} = \nu_{i,j}^n:\ ij^\gamma \le n,\, i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,[n^{1/\gamma}],\, n\in\mathbb{N}\big\}.$$

Припустимо, що існують сталі $\sigma_\nu > 0$ і $\theta > 0$ такі, що виконується нерівність

$$|1-\nu_{i,j}| \le \sigma_\nu \left(\frac{ij^\gamma}{n}\right)^\theta, \quad \gamma > 1. \tag{2.17}$$

Теорема 2.3.3. *Нехай послідовність збурених значень y^δ задано* (2.6), *а $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty \in K^\beta$. Якщо $y \in L_{2,2}^{\bar\mu}$, $\mu_2 > \mu_1 > \beta + \frac{1}{2}$, то для методу зрізки* (2.16) *порядку $\theta > (\mu_2 - \beta - \frac{1}{2})/\gamma$,*

$$1 < \gamma < \frac{\mu_2 - \beta - \frac{1}{2}}{\mu_1 - \beta - \frac{1}{2}},$$

при

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\bar\mu}} \le 1} \left\| y - S_n^\nu(y^\delta) \right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu_1 - \beta - \frac{1}{2}}{\mu_1}}.$$

Зауваження 2.3.4. Розглянемо випадок стандартної тригонометричної системи $\{\varphi_k(t)\}$, тобто $\beta = 0$, і відповідні класи $W_{2,1}^{\mu_1}$ і $L_{2,2}^{\bar\mu}$, де $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2)$. У [8] стверджується, що в моделі (2.6) збурення вхідних даних порядок точності $O\big(\delta^{\frac{\mu_1 - 1/2}{\mu_1}}\big)$ не може бути покращений для функцій з $W_{2,1}^{\mu_1}$. З іншого боку, зрозуміло, що будь-яка функція $y \in W_{2,1}^{\mu_1}$ однієї змінної може бути розглянута як елемент з $L_{2,2}^{\bar\mu}$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Отже, порядок точності, що заданий теоремою 2.3.3 для $\beta = 0$, також не може бути покращений на всьому класі $L_{2,2}^{\bar\mu}$.

Наслідок 2.3.5. *На класі $L_{2,2}^{\bar\mu}$, $\mu_2 > \mu_1 > \beta + \frac{1}{2}$, модифікований метод зрізки* (2.16) *з*

$$1 < \gamma < \frac{\mu_2 - \beta - \frac{1}{2}}{\mu_1 - \beta - \frac{1}{2}}$$

для досягнення точності підсумовування

$$\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu_1-\beta-\frac{1}{2}}{\mu_1}},$$

вимагає

$$\mathrm{card} \asymp n \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{\mu_1-\beta-\frac{1}{2}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з нерівномірного гіперболічного хреста $\{(i,j) \mid ij^\gamma \le n, i,j \in \mathbb{N}\}$.

Зауваження 2.3.6. Порівняння результатів, викладених у наслідках 2.3.2 і 2.3.5, дозволяє зробити висновок, що на досліджуваних класах функцій $L_{2,2}^{\bar{\mu}}$ модифікований варіант методу зрізки (2.16) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним варіантом (2.13) як за точністю наближень, так і за обсягом використаних коефіцієнтів Фур'є.

Результати підрозділу 2.3 опубліковані в [19].

3. Чисельне диференціювання функцій

Перейдемо до задачі чисельного диференціювання функцій зі збуреними вхідними даними. Ця задача є відомим прикладом задачі, нестійкої до малих збурень, а відтак також потребує обов'язкового застосування регуляризації задля забезпечення стійкості наближення. Не зважаючи на те, що проблема стійкого диференціювання вже тривалий час привертала увагу фахівців, її інтенсивне дослідження має своїм джерелом створення теорії некоректних задач у 60-ті роки минулого сторіччя. Першою роботою щодо диференціювання функцій, що була написана з точки зору теорії некоректних задач, є [26]. Це дає підстави вважати [26] за точку відліку у розвитку сучасного етапу чисельного диференціювання. Зауважимо, що в [26] було досліджено алгоритм, який забезпечує збіжність в рівномірній метриці побудованих наближень до першої похідної функції однієї змінної. Ці дослідження знайшли своє продовження в [30], де вперше були встановлені оцінки точності в задачі чисельного диференціювання.

Станом на сьогодні багатьма дослідниками було запропоновано та обґрунтовано різні методи чисельного диференціювання функцій однієї змінної (див., наприклад, [25, 4, 5, 1, 14, 21, 7]). Що стосується функцій декількох (навіть двох) змінних, то вказана задача майже не вивчена. Тут можна згадати лише роботи [10, 22, 9]. Наші подальші дослідження мають на меті заповнити цю прогалину знань.

3.1. Періодичні функції. Ізотропна гладкість.

Для викладу отриманих результатів необхідно навести деякі позначення. Через $\{\mathrm{e}_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$

позначимо тригонометричну систему $\mathrm{e}_j = \mathrm{e}_j(\tau) := \exp(2\pi \mathrm{i} j \tau)$, $\mathrm{i}^2 = -1$, і введемо у розгляд простір періодичних функцій двох змінних

$$L_{2,2}^{\overline{\mu}} := \left\{ y(t,\tau) \in C(Q) : \, \|y\|^2_{L_{2,2}^{\overline{\mu}}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |2\pi \underline{k}|^{2\mu_1} \, |2\pi \underline{j}|^{2\mu_2} \, |y_{k,j}|^2 < \infty \right\},$$

де $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $y_{k,j} = \langle y, \mathrm{e}_k \mathrm{e}_j \rangle$ — коефіцієнти Фур'є функції $y(t,\tau)$ за тригонометричною системою, $\underline{m} = m$, якщо $m \neq 0$ та $\underline{m} = 1$, якщо $m = 0$.

Наступний ряд Фур'є

$$y^{(r_1,r_2)}(t,\tau) := \sum_{|k|=1}^{\infty} \sum_{|j|=1}^{\infty} y_{k,j}^{(r_1,r_2)} \, \mathrm{e}_k(t) \, \mathrm{e}_j(\tau),$$

де

$$y_{k,j}^{(r_1,r_2)} = (2\pi \mathrm{i} k)^{r_1} \, (2\pi \mathrm{i} j)^{r_2} \, y_{k,j}, \;\; r_1, r_2 \in \mathbb{N},$$

називається мішаною частинною похідною порядку (r_1, r_2) для функції $y \in C(Q)$. У випадку $y \in L_{2,2}^{\overline{\mu}}$ ми, очевидно, маємо $r_1 \le \mu_1$, $r_2 \le \mu_2$.

Розглянемо випадок вхідних даних із малим рівнем збурення в метриці простору ℓ_p, $2 \le p < \infty$. Більш точно, припускатимемо, що замість точних коефіцієнтів Фур'є $y_{k,j}$ досліджуваної функції маємо лише їх збурення $y_{k,j}^{\delta}$, тобто є послідовність чисел $y^{\delta} := \left\{ y_{k,j}^{\delta} \right\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$ таких, що

$$y_{k,j}^{\delta} = y_{k,j} + \delta \xi_{k,j}, \quad k, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

і

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\xi_{k,j}|^p \le 1. \tag{3.2}$$

Задача полягає у наближенні похідної функції $y(t,\tau) \in L_{2,2}^{\overline{\mu}}$ порядку (r_1, r_2) за допомогою збурених вхідних даних $y_{k,j}^{\delta}$. Наближення будуватимемо методом зрізки, а похибку відновлення будемо оцінювати в рівномірній метриці $C(Q)$ та в інтегральній метриці просторів $L_{q,2}(Q)$, $2 \le q < \infty$.

У випадку довільної області підтримки Ω метод зрізки для чисельного відшукання похідної $y^{(r_1,r_2)}$ має форму

$$T_{\Omega}^{\lambda}(D^{r_1,r_2} y^{\delta})(t,\tau) = \sum_{(k,j)\in\Omega} \lambda_{k,j} (2\pi \mathrm{i} k)^{r_1} (2\pi \mathrm{i} j)^{r_2} y_{k,j}^{\delta} \, \mathrm{e}_k(t) \, \mathrm{e}_j(\tau),$$

де

$$D^{r_1,r_2} := \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t^{r_1} \partial \tau^{r_2}},$$

а $y_{k,j}^{\delta}$ означені за допомогою (3.1), (3.2).

Метою досліджень є мінімізація норми величини похибки

$$y^{(r_1,r_2)} - T^\lambda_\Omega(D^{r_1,r_2}y^\delta)$$

через вибір Ω залежно від значень параметрів μ_1, μ_2, r_1, r_2 і δ. Як і в попередньому розділі, ми розглянемо два модельних підходи до вибору області підтримки, стандартний та модифікований, а потім порівняємо їх ефективність.

Для початку розглянемо випадок ізотропної гладкості функцій, тобто $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Крім того, вважатимемо, що $r_1 = r_2 = r$. За цих умов область Ω, в межах стандартного підходу, перетворюється у квадрат, а відповідний метод зрізки набуває форми

$$T^\lambda_n(D^{r,r}y^\delta)(t,\tau) = \sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|j|=1}^{n} \lambda_{k,j}\,(2\pi \mathrm{i} k)^r\,(2\pi \mathrm{i} j)^r\, y^\delta_{k,j}\,\mathrm{e}_k(t)\,\mathrm{e}_j(\tau). \tag{3.3}$$

Апроксимаційні властивості методу $T^\lambda_n(D^{r,r}y^\delta)(t,\tau)$ (3.3) залежать від рівня дискретизації n і від множини

$$\lambda = \{\lambda_{k,j} = \lambda^n_{k,j} \colon |k| = 1,\dots,n,\ |j| = 1,\dots,n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вважатимемо, що існують сталі $\sigma_\lambda > 0$ і $\theta > 0$ такі, що виконується нерівність

$$|1-\lambda_{k,j}| \le \sigma_\lambda\left(\frac{|kj|}{n^2}\right)^\theta. \tag{3.4}$$

Зауважимо, що в підрозділах 3.1–3.3 ми обмежуємось випадком $p = 2$ в моделі збурення вхідних даних (3.1), (3.2).

Теорема 3.1.1. *Нехай задано послідовність збурених значень y^δ, які означені за допомогою* (3.1), (3.2) *з $p = 2$. Якщо $y \in L^\mu_{2,2}$ для деякого апріорі відомого μ, $\mu - r > \frac{1}{2}$, то для методу зрізки* (3.3) *порядку $\theta > \mu - r - \frac{1}{2}$ при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+r+\frac{1}{2}}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^\mu_{2,2}}\le 1} \|y^{(r,r)} - T^\lambda_n(D^{r,r}y^\delta)\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-r-\frac{1}{2}}{\mu+r+\frac{1}{2}}}.$$

Наслідок 3.1.2. *З теореми 3.1.1 випливає, що для досягнення точності $\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu-r-1/2}{\mu+r+1/2}}$ на класі $L^\mu_{2,2}$, $\mu - r > \frac{1}{2}$, стандартний метод зрізки* (3.3) *вимагає*

$$\mathrm{card} = 4n^2 \asymp \delta^{-\frac{2}{\mu+r+1/2}} \asymp \varepsilon^{-\frac{2}{\mu-r-1/2}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з квадрата

$$\big\{(k,j)\colon\ |k|=1,\dots,n,\ |j|=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}\big\}.$$

Розглянемо тепер модифікований метод зрізки з підтримкою на гіперболічному хресті

$$S_n^{\nu}(D^{r,r}y^{\delta})(t,\tau)=\sum_{0<|kj|\le n}\nu_{k,j}\,(2\pi\mathrm{i}k)^r\,(2\pi\mathrm{i}j)^r\,y_{k,j}^{\delta}\,\mathrm{e}_k(t)\mathrm{e}_j(\tau). \tag{3.5}$$

Апроксимаційні властивості методу $S_n^{\nu}(D^{r,r}y^{\delta})(t,\tau)$ залежать від рівня дискретизації n і множини

$$\nu=\big\{\nu_{k,j}=\nu_{k,j}^{n}\colon\ 0<|kj|\le n,\ |k|=1,\dots,n,\ |j|=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}\big\}.$$

Ми припускаємо, що існують сталі $\sigma_\nu>0$ та $\theta>0$ такі, що виконується нерівність

$$|1-\nu_{k,j}|\le\sigma_\nu\left(\frac{|kj|}{n}\right)^{\theta}. \tag{3.6}$$

Оцінимо точність і обсяг обчислювальних витрат для методу (3.5) на класі $L_{2,2}^{\mu}$, а також порівняємо вказані характеристики для обох підходів.

Теорема 3.1.3. *Нехай задано послідовність збурених значень y^{δ}, що означена за допомогою* (3.1), (3.2) *з $p=2$. Якщо $y\in L_{2,2}^{\mu}$ для деякого апріорі відомого μ, $\mu-r>\frac12$, то для методу зрізки* (3.5) *порядку $\theta>\mu-r-\frac12$ при*

$$n\asymp\delta^{-\frac{1}{\mu}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\mu}}\le1}\|y^{(r,r)}-S_n^{\nu}(D^{r,r}y^{\delta})\|_C\preceq\delta^{\frac{\mu-r-\frac12}{\mu}}\,|\ln\delta|^{\frac12}. \tag{3.7}$$

Наслідок 3.1.4. *На класі $L_{2,2}^{\mu}$, $\mu>r+\frac12$, модифікований метод зрізки* (3.5) *для досягнення точності*

$$\varepsilon\asymp\delta^{\frac{\mu-r-\frac12}{\mu}}\,|\ln\delta|^{\frac12},$$

вимагає

$$\mathrm{card}\asymp n\ln n\asymp\varepsilon^{-\frac{2}{2\mu-2r-1}}\,|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2\mu-2r-1}+1}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з рівномірного гіперболічного хреста $\{(k,j):\ 0<|kj|\le n;\ k,j\in\mathbb{Z}\}$.

Зауваження 3.1.5. Порівняння наслідків 3.1.2 і 3.1.4 дозволяє зробити висновок, що метод з підтримкою на рівномірному гіперболічному хресті має перевагу над методом з підтримкою на квадраті. Більш точно, модифікований підхід (3.5) є ефективнішим у порівнянні зі стандартним варіантом (3.3) в сенсі як точності, так і обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r + \frac{1}{2}$.

3.2. **Періодичні функції. Апостеріорний випадок.** Припустимо тепер, що величина параметру μ, який визначає гладкість функції y, не є відомою точно. Нова задача полягає у побудові методу зрізки $S^{\nu}_n(D^{r,r}y^{\delta})$ (3.5) без використання значення μ, але так, щоб зберегти порядок точності $O\big(\delta^{(\mu-r-1/2)/\mu}\,|\ln\delta|^{1/2}\big)$ на всьому класі $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r + \frac{1}{2}$ (див. теорему 3.1.3). Як і в попередньому розділі, задля цього скористаємось принципом рівноваги.

Отже, нехай $y \in L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r + \frac{1}{2}$. Розглянемо множину

$$M^{+} := \{n : \|S^{\nu}_n(D^{r,r}y^{\delta}) - S^{\nu}_m(D^{r,r}y^{\delta})\|_C \le 4c_2\,\delta\, m^{r+\frac{1}{2}}\sqrt{\ln m}\ \ \forall m > n\}$$

і число

$$n_{+} := \min\{n : n \in M^{+}\}, \tag{3.8}$$

де c_2 – деяка відома константа. Запропонований варіант принципу рівноваги полягає у пошуку n_+ згідно з (3.8).

Теорема 3.2.1. *Нехай параметр регуляризації n_+ вибирається з* (3.8). *Тоді за умов теореми 3.1.3 справджується оцінка*

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}}\le 1} \left\| y^{(r,r)} - S^{\nu}_{n_+}(D^{r,r}y^{\delta}) \right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-r-\frac{1}{2}}{\mu}} \sqrt{|\ln\delta|}.$$

Зауваження 3.2.2. Порівняння теорем 3.1.3 і 3.2.1 показує, що принцип рівноваги дозволяє досягти порядку точності $O(\delta^{\frac{\mu-r-1/2}{\mu}}\,|\ln\delta|^{\frac{1}{2}})$ без використання величини μ.

3.3. **Періодичні функції. Анізотропна гладкість.** Далі ми розглянемо випадок анізотропної гладкості функції y. Нехай

$$\mu_1 - r_1 = \mu_2 - r_2 > \tfrac{1}{2},$$

але $\mu_1 < \mu_2$. У цьому разі квадрат та рівномірний гіперболічний хрест дають найкращу точність серед усіх прямокутників та гіперболічних хрестів, відповідно.

За вказаних умов стандартний варіант методу зрізки будується за правилом

$$T_n^{\lambda}(D^{r_1,r_2}y^{\delta})(t,\tau) = \sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|j|=1}^{n} \lambda_{k,j}\,(2\pi \mathrm{i}k)^{r_1}\,(2\pi \mathrm{i}j)^{r_2}\,y_{k,j}^{\delta}\,\mathrm{e}_k(t)\,\mathrm{e}_j(\tau), \quad (3.9)$$

а модифікований варіант приймає вигляд

$$S_n^{\nu}(D^{r_1,r_2}y^{\delta})(t,\tau) = \sum_{0<|kj|\le n} \nu_{k,j}\,(2\pi \mathrm{i}k)^{r_1}\,(2\pi \mathrm{i}j)^{r_2}\,y_{k,j}^{\delta}\,\mathrm{e}_k(t)\,\mathrm{e}_j(\tau). \quad (3.10)$$

Теорема 3.3.1. *Нехай задано послідовність збурених значень y^{δ}, що означена за допомогою (3.1), (3.2) з $p=2$. Якщо $y \in L_{2,2}^{\overline{\mu}}$ для деякого апріорі відомого $\mu_1 < \mu_2$, $\mu_1 - r_1 = \mu_2 - r_2 > \frac{1}{2}$, то для методу зрізки (3.9) порядку $\theta > \mu_1 - r_1 - \frac{1}{2}$ при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1+r_2+\frac{1}{2}}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\overline{\mu}}}\le 1} \|y^{(r_1,r_2)} - T_n^{\lambda}(D^{r_1,r_2}y^{\delta})\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}{\mu_1+r_2+\frac{1}{2}}}. \quad (3.11)$$

Наслідок 3.3.2. *З (3.11) випливає, що для досягнення точності*

$$\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}{\mu_1+r_2+\frac{1}{2}}}$$

на класі $L_{2,2}^{\overline{\mu}}$, $\mu_1 < \mu_2$, $\mu_1 - r_1 = \mu_2 - r_2 > \frac{1}{2}$, стандартний метод зрізки (3.9) вимагає

$$\mathrm{card} \asymp n^2 \asymp \delta^{-\frac{2}{\mu_1+r_2+\frac{1}{2}}} \asymp \varepsilon^{-\frac{2}{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з квадрата

$$\{(k,j)\colon |k| = 1,\dots,n,\ |j| = 1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 3.3.3. *Нехай задано послідовність збурених значень y^{δ}, що означена за допомогою (3.1), (3.2) з $p=2$. Якщо $y \in L_{2,2}^{\overline{\mu}}$ для деякого апріорі відомого $\mu_1 < \mu_2$, $\mu_1 - r_1 = \mu_2 - r_2 > \frac{1}{2}$, то для методу зрізки (3.10) порядку $\theta > \mu_1 - r_1 - \frac{1}{2}$ при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1-r_1+r_2}}\,|\ln\delta|^{\frac{1}{2(\mu_1-r_1+r_2)}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\bar\mu}_{2,2}}\le 1} \|y^{(r_1,r_2)} - S_n^{\nu}(D^{r_1,r_2}y^{\delta})\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}{\mu_1-r_1+r_2}} |\ln\delta|^{\frac{r_2+\frac{1}{2}}{2(\mu_1-r_1+r_2)}}.$$

Наслідок 3.3.4. *На класі* $L^{\overline{\mu}}_{2,2}$, $\mu_1<\mu_2$, $\mu_1-r_1=\mu_2-r_2>\frac{1}{2}$, *модифікований метод зрізки* (3.10) *для досягнення точності підсумовування*

$$\varepsilon \asymp \delta^{\frac{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}{\mu_1-r_1+r_2}} |\ln\delta|^{\frac{r_2+\frac{1}{2}}{2(\mu_1-r_1+r_2)}},$$

вимагає

$$\mathrm{card} \asymp n\ln n \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{\mu_1-r_1-\frac{1}{2}}} |\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2(\mu_1-r_1-\frac{1}{2})}+1}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з рівномірного гіперболічного хреста

$$\{(k,j):\, 0<|kj|\le n;\, k,j\in\mathbb{Z}\}.$$

Зауваження 3.3.5. Відповідно до наслідків 3.3.2 і 3.3.4 можна зробити висновок, що метод зрізки з підтримкою на рівномірному гіперболічному хресті має перевагу над методом зрізки з підтримкою на квадраті. Точніше, модифікований підхід (3.10) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним підходом (3.9) в сенсі як точності, так і обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\overline{\mu}}_{2,2}$,

$$\mu_1<\mu_2, \qquad \mu_1-r_1=\mu_2-r_2>\frac{1}{2}.$$

Результати підрозділів 3.1–3.3 опубліковані в [15].

3.4. **Періодичні функції. Інтегральна метрика. Оцінка похибки в $L_{2,2}(Q)$.** Дослідимо задачу відновлення похідної $y^{(r,r)}$ з класу $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu>r$, функцій з ізотропною гладкістю і оцінимо точність обох варіантів методу зрізки в метриці простору $L_{2,2}(Q)$. При цьому розглядатимемо модель збурення вхідних даних в метриці ℓ_p, $2\le p<\infty$. Зауважимо, що значення p впливатиме на величину мінімальної похибки наближення.

Як і раніше, почнемо зі стандартного варіанту методу зрізки (3.3) в задачі чисельного диференціювання.

Теорема 3.4.1. *Нехай задано послідовність збурених значень* y^{δ}, *що означена за допомогою* (3.1), (3.2), *де* $2\le p<\infty$. *Якщо* $y\in L^{\mu}_{2,2}$ *для деякого апріорі відомого* μ, $\mu>r$, *то для методу* (3.3) *порядку* $\theta>\mu-r$ *при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+r+1-\frac{2}{p}}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}}\le 1} \|y^{(r,r)} - T^{\lambda}_{n}(D^{r,r}y^{\delta})\|_{L_2} \ \le\ \delta^{\frac{\mu-r}{\mu+r+1-\frac{2}{p}}}.$$

Наслідок 3.4.2. *За припущень теореми 3.4.1 для досягнення точності* $O\left(\delta^{\frac{\mu-r}{\mu+r+1-2/p}}\right)$ *на класі* $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r$, *стандартний метод зрізки* (3.3) *вимагає*

$$\mathrm{card} = 4n^2 \asymp \delta^{-\frac{2}{\mu+r+1-\frac{2}{p}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з

$$\{(k,j)\colon\ |k| = 1,\dots,n,\ |j| = 1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Розглянемо тепер модифікований метод зрізки (3.5) з підтримкою на гіперболічному хресті.

Теорема 3.4.3. *Нехай задано послідовність збурених значень* y^{δ}, *що означена за допомогою* (3.1), (3.2), *де* $2 \le p < \infty$. *Якщо* $y \in L^{\mu}_{2,2}$ *для деякого апріорі відомого* μ, $\mu > r$, *то для методу зрізки* (3.5) *порядку* $\theta > \mu - r$ *при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\,|\ln\delta|^{\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}}\le 1} \|y^{(r,r)} - S^{\nu}_{n}(D^{r,r}y^{\delta})\|_{L_2} \preceq \delta^{\frac{\mu-r}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\,|\ln\delta|^{\frac{(\mu-r)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}. \qquad (3.12)$$

Наслідок 3.4.4. *За припущень теореми 3.4.3 модифікований метод зрізки* (3.5) *для досягнення точності*

$$O\left(\delta^{\frac{\mu-r}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\,|\ln\delta|^{\frac{(\mu-r)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\right)$$

вимагає

$$\mathrm{card} \asymp n\ln n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\,|\ln\delta|^{\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з рівномірного гіперболічного хреста $\{(k,j)\,:\ 0 < |kj| \le n; k,j\in\mathbb{Z}\}$.

Зауваження 3.4.5. Порівняння наслідків 3.4.2 і 3.4.4 призводить до висновку, що метод з підтримкою на рівномірному гіперболічному хресті має перевагу над методом з підтримкою на квадраті. Точніше, модифікований підхід (3.5) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним підходом (3.3) в сенсі як точності, так і обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r$.

Оцінка похибки в $L_{q,2}(Q)$, $2 < q < \infty$. Продовжимо наші дослідження з чисельного диференціювання функцій з класу ізотропної гладкості $L^{\mu}_{2,2}$ і оцінимо похибку обох варіантів, стандартного і модифікованого, методу зрізки в метриці L_q, $2 < q < \infty$. Очевидно, що тепер для мінімізації похибки слід також враховувати значення параметра q.

Теорема 3.4.6. *Нехай $2 < q < \infty$ і задано послідовність збурених значень y^{δ}, що означена за допомогою (3.1), (3.2), де $2 \le p < \infty$. Якщо $y \in L^{\mu}_{2,2}$ для деякого апріорі відомого μ, $\mu > r + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, тоді для методу (3.3) порядку $\theta > \mu - r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu + r + \frac{3}{2} - \frac{1}{q} - \frac{2}{p}}}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}} \le 1} \|y^{(r,r)} - T^{\lambda}_n(D^{r,r}y^{\delta})\|_{L_q} \preceq \delta^{\frac{\mu - r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}}{\mu + r + \frac{3}{2} - \frac{1}{q} - \frac{2}{p}}}.$$

Наслідок 3.4.7. *За припущень теореми 3.4.6 для досягнення точності $O\left(\delta^{\frac{\mu - r - 1/2 + 1/q}{\mu + r + 3/2 - 1/q - 2/p}}\right)$ на класі $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, стандартний метод зрізки (3.3) вимагає*

$$\mathrm{card} = 4n^2 \asymp \delta^{-\frac{2}{\mu + r + \frac{3}{2} - \frac{1}{q} - \frac{2}{p}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з квадрата

$$\{(k, j) \colon |k| = 1, \dots, n,\ |j| = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 3.4.8. *Нехай $2 < q < \infty$ і задано послідовність збурених значень y^{δ}, що означена за допомогою (3.1), (3.2), де $2 \le p < \infty$. Якщо $y \in L^{\mu}_{2,2}$ для деякого апріорі відомого μ, $\mu > r + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то для модифікованого методу зрізки (3.5) порядку $\theta > \mu - r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} |\ln \delta|^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}{\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} \tag{3.13}$$

справджується оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L^{\mu}_{2,2}} \le 1} \|y^{(r,r)} - S^{\nu}_n(D^{r,r}y^{\delta})\|_{L_q} \preceq \delta^{\frac{\mu - r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}}{\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} |\ln \delta|^{\frac{(\mu - r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q})(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}{\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}$$

Наслідок 3.4.9. *За припущень теореми 3.4.8 модифікований метод* (3.5) *для досягнення точності*

$$O\left(\delta^{\frac{\mu-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}|\ln\delta|^{\frac{(\mu-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{q})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\right),$$

вимагає

$$\mathrm{card} \asymp n\ln n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}|\ln\delta|^{\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є з індексами з рівномірного гіперболічного хреста $\{(k,j) : 0 < |kj| \le n; k,j \in \mathbb{Z}\}$.

Зауваження 3.4.10. Порівняння наслідків 3.4.7 і 3.4.9 дозволяє зробити висновок, що метод з підтримкою на рівномірному гіперболічному хресті має перевагу над методом з підтримкою на квадраті. Точніше, модифікований підхід (3.5) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним підходом (3.3) в сенсі як точності, так і обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\mu}_{2,2}$, $\mu > r + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

3.5. **Чисельне диференціювання неперіодичних функцій.** Окремо дослідимо задачу диференціювання неперіодичних функцій, що задані на квадраті $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. В цьому випадку доцільним є розглядати вхідну інформацію у вигляді коефіцієнтів Фур'є за системою поліномів Лежандра. Введемо далі необхідні позначення. Через $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ позначимо ортонормовану на $[-1,1]$ систему поліномів Лежандра

$$\varphi_k(t) = \sqrt{k+\frac{1}{2}}(2^k k!)\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k], \quad k = 0,1,2,\dots$$

Нехай $L_2 = L_{2,2}(Q)$ – простір сумовних у квадраті на Q функцій $f(t,\tau)$ зі скалярним добутком

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(t,\tau)\, g(t,\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t$$

і стандартною нормою

$$\|f\|^2_{L_2} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle^2,$$

де

$$\langle f, \varphi_{k,j}\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(t,\tau)\, \varphi_k(t)\, \varphi_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f(t,\tau)$ за системою поліномів Лежандра. Під $C = C(Q)$ будемо розуміти простір неперервних на Q функцій.

Введемо у розгляд простір досліджуваних функцій

$$L_{2,2}^{\overline{\mu}} = L_{2,2}^{\overline{\mu}}(Q) = \{f \in L_2(Q) \colon \|f\|_{\overline{\mu}}^2 = \sum_{k,j=0}^{\infty} \underline{k}^{2\mu_1} \underline{j}^{2\mu_2} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle < \infty\},$$

де $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\underline{k} = \max\{1, k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. У разі функцій ізотропної гладкості $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ будемо використовувати позначення $L_{2,2}^{\mu}$ замість $L_{2,2}^{\overline{\mu}}$.

Припустимо, що замість точних значень коефіцієнтів Фур'є $\langle f, \varphi_{k,j}\rangle$ маємо лише деякі їх збурення, такі що

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \xi_{k,j}^2 \le \delta^2,$$

де $\xi_{k,j} = \langle f - f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Спочатку розглянемо випадок функцій з ізотропною гладкістю. Отже, нехай $f \in L_{2,2}^{\mu}$, $\mu > 2$. Метою наших досліджень є чисельне знаходження похідної

$$f^{(1,1)}(t,\tau) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle \, \varphi_k'(t) \, \varphi_j'(\tau). \tag{3.14}$$

Наближення до похідної (3.14) будуватимемо методом зрізки, використовуючи збурені вхідні дані $\langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle$. Стандартний варіант цього методу має вигляд:

$$\mathcal{D}_n f_\delta(t,\tau) = \sum_{k,j=1}^{n} \langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle \, \varphi_k'(t) \, \varphi_j'(t). \tag{3.15}$$

У наступних двох твердженнях знайдено оцінки похибки для стандартного методу зрізки (3.15) в інтегральній і рівномірній метриках.

Теорема 3.5.1. *Нехай $\mu > 2$. Тоді для будь-якої функції $f \in L_{2,2}^{\mu}(Q)$ та $n \asymp \delta^{\frac{1}{\mu+2}}$ справджується оцінка*

$$\|f^{(1,1)} - \mathcal{D}_n f_\delta\|_{L_2} \preceq \delta^{\frac{\mu-2}{\mu+2}}.$$

Теорема 3.5.2. *Нехай $\mu > 3$. Тоді для будь-якої функції $f \in L_{2,2}^{\mu}(Q)$ і $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu+3}}$ справджується оцінка*

$$\|f^{(1,1)} - \mathcal{D}_n f_\delta\|_{C} \preceq \delta^{\frac{\mu-3}{\mu+3}}.$$

Далі розглянемо модифікований варіант методу зрізки, який використовує ідею гіперболічного хреста і полягає в наближенні похідної сумою

$$\overline{\mathcal{D}}_n f_\delta(t,\tau) = \sum_{1\le kj\le n} \langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle \varphi'_k(t)\varphi'_j(\tau). \tag{3.16}$$

У наступних двох твердженнях знайдено оцінки похибки для модифікованого методу зрізки (3.16) в інтегральній і рівномірній метриках.

Теорема 3.5.3. *Нехай $\mu > 2$. Тоді для будь-якої функції $f \in L^{\mu}_{2,2}(Q)$ та $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu}}$ справджується оцінка*

$$\|f^{(1,1)} - \bar{\mathcal{D}}_n f_\delta\|_{L_2} \preceq \delta^{\frac{\mu-2}{\mu}} \ln \frac{1}{\delta}.$$

Теорема 3.5.4. *Нехай $\mu > 3$. Тоді для будь-якої $f \in L^{\mu}_{2,2}(Q)$ та $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu}}$ справджується оцінка*

$$\|f^{(1,1)} - \bar{\mathcal{D}}_n f_\delta\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu-3}{\mu}} \ln^{3/2} \frac{1}{\delta}.$$

Зауваження 3.5.5. Порівняння теорем 3.5.1-3.5.4 дозволяє зробити висновок, що модифікований підхід (3.16) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним підходом (3.15) в сенсі точності і обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\mu}_{2,2}$, у разі коли похибка наближень вимірюється в метриках просторів $L_{2,2}(Q)$ і $C(Q)$.

Тепер розглянемо випадок функцій з анізотропною гладкістю. Отже, нехай $f \in L^{\overline{\mu}}_{2,2}$, $\mu_1 > 2$. Метою наших досліджень є чисельне знаходження похідної

$$f^{(1,0)}(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi'_k(t)\, \varphi_j(\tau). \tag{3.17}$$

Наближення до похідної (3.17) будуватимемо методом зрізки, використовуючи збурені вхідні дані $\langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle$. Стандартний варіант цього методу має вигляд:

$$\mathcal{D}_{n,m} f_\delta(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi'_k(t)\, \varphi_j(\tau). \tag{3.18}$$

У наступних двох твердженнях знайдено оцінки похибки для стандартного методу зрізки (3.18) в інтегральній і рівномірній метриках.

Теорема 3.5.6. *Нехай* $\mu_1 > 2$, $\mu_2 > 0$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\overline{\mu}}_{2,2}(Q)$ *і* $m \asymp n^{\frac{\mu_1-2}{\mu_2}}$, $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *справджується оцінка*

$$\|f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} f_\delta\|_{L_2} \preceq \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}.$$

Теорема 3.5.7. *Нехай* $\mu_1 > 3$, $\mu_2 > 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\overline{\mu}}_{2,2}(Q)$ *та* $m \asymp n^{\frac{\mu_1-3}{\mu_2-1}}$, $n \asymp \delta^{-\frac{\mu_2-1}{\mu_1\mu_2-3}}$ *справджується оцінка*

$$\|f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} f_\delta\|_{C} \preceq \delta^{\frac{(\mu_1-3)(\mu_2-1)}{\mu_1\mu_2-3}}.$$

Далі розглянемо модифікований варіант методу зрізки, який використовує ідею гіперболічного хреста і полягає в наближенні похідної такою сумою

$$\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f_\delta(t,\tau) = \sum_{kj^\gamma \le n} \langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi'_k(t)\, \varphi_j(\tau), \tag{3.19}$$

де $\gamma > 1$.

У наступних двох твердженнях знайдено оцінки похибки для модифікованого методу зрізки (3.19) в інтегральній і рівномірній метриках.

Теорема 3.5.8. *Нехай* $2 < \mu_1 < \mu_2 + 1$, $1 < \gamma < \frac{\mu_2}{\mu_1-1}$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\overline{\mu}}_{2,2}(Q)$ *та* $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *справджується оцінка*

$$\|f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f_\delta\|_{L_2} \preceq \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}.$$

Теорема 3.5.9. *Нехай* $3 < \mu_1 < \mu_2$, $1 < \gamma < \frac{\mu_2-1}{\mu_1-1}$. *Тоді для будь-якої* $f \in L^{\overline{\mu}}_{2,2}(Q)$ *та* $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *справджується оцінка*

$$\|f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f_\delta\|_{C} \preceq \delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}.$$

Зауваження 3.5.10. Порівняння теорем 3.5.6-3.5.9 дозволяє зробити наступний висновок. Модифікований підхід (3.19) є більш ефективним у порівнянні зі стандартним підходом (3.18) в сенсі обсягу використаних коефіцієнтів Фур'є на класі $L^{\overline{\mu}}_{2,2}$, у разі коли похибка наближень вимірюється в метриках просторів $L_{2,2}(Q)$ і $C(Q)$. Крім того, підхід (3.19) є більш точним, якщо похибка наближень вимірюється в $C(Q)$. Разом з тим, обидва підходи забезпечують однаковий порядок точності на класі $L^{\overline{\mu}}_{2,2}$, $2 < \mu_1 < \mu_2 + 1$, якщо похибка наближень вимірюється в $L_{2,2}(Q)$.

Література

[1] Ahn S., Choi U. J., and Ramm A. G. "A scheme for stable numerical differentiation". *J. Comput. Appl. Math.* 186:2 (2006), pp. 325–334.

[2] Cobos F., Kühn T., and Sickel W. "Optimal approximation of multivariate periodic Sobolev functions in the sup-norm". *J. Func. Anal.* 270:11 (2016), pp. 4196–4212.

[3] Dũng D., Temlyakov V., and Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation.* Adv. Courses in Math., CRM Barc. Birkhäuser/Springer, Basel, 2018, pp. xi + 218.

[4] Groetsch C. W. "Optimal order of accuracy in Vasin's method for differentiation of noisy functions". *J. Optim. Theory Appl.* 74:2 (1992), pp. 373–378.

[5] Hanke M. and Scherzer O. "Inverse problems light: Numerical differentiation". *Am. Math. Mon.* 108:6 (2001), pp. 512–521.

[6] Lepskii O. V. "On a problem of adaptive estimation in Gaussian white noise". *Theory Probab. Appl.* 35:3 (1991), pp. 454–466.

[7] Lu S., Naumova V., and Pereverzev S. V. "Legendre polynomials as a recommended basis for numerical differentiation in the presence of stochastic white noise". *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 21:2 (2013), pp. 193–216.

[8] Mathé P. and Pereverzev S. V. "Stable summation of orthogonal series with noisy coefficients". *J. Approximation Theory* 118:1 (2002), pp. 66–80.

[9] Meng Z., Zhao Z., Mei D., and Zhou Y. "Numerical differentiation for two-dimensional functions by a Fourier extension method". *Inverse Probl. Sci. Eng.* 28:1 (2020), pp. 126–143.

[10] Nakamura G., Wang S., and Wang Y. "Numerical differentiation for the second order derivatives of functions of two variables". *J. Comput. Appl. Math.* 212:2 (2008), pp. 341–358.

[11] Pereverzev S. V. "Optimization of projection methods for solving ill-posed problems". *Computing* 55:2 (1995), pp. 113–124.

[12] Pereverzev S. V. and Schock E. "On the Adaptive Selection of the Parameter in Regularization of Ill-Posed Problems". *SIAM J. Numer. Anal.* 43:5 (2005), pp. 2060–2076.

[13] Pozharska K. V. and Pozharskyi O. A. "Recovery of continuous functions from their Fourier coefficients known with error". *Researches in Mathematics* 28:2 (2020), pp. 24–34.

[14] Qian Z., Fu C.-L., Xiong X.-T., and Wei T. "Fourier truncation method for high order numerical derivatives". *Appl. Math. Comput.* 181:2 (2006), pp. 940–948.

[15] Semenova Y. V., Solodky S. G., and Stasyuk S. A. "Application of Fourier truncation method to numerical differentiation for two variables functions". *Comput. Methods Appl. Math.* (to appear).

[16] Sharipov K. "On the recovery of continuous functions from noisy Fourier coefficients". *Comput. Methods Appl. Math.* 11:1 (2011), pp. 75–82.

[17] Sharipov K. "On the recovery of continuous functions of two variables from noisy Fourier coefficients". *Zh. Obchysl. Prykl. Mat.* 3 (2012), pp. 116–124.

[18] Solodky S. G. and Sharipov K. K. "Summation of smooth functions of two variables with perturbed Fourier coefficients". *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 23:3 (2015), pp. 287–297.

[19] Solodky S. G. and Stasyuk S. A. "Estimates of efficiency for two methods of stable numerical summation of smooth functions". *J. Complexity* 56 (2020), p. 101422.

[20] Temlyakov V. *Multivariate approximation.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2018.

[21] Zhao Z. "A truncated Legendre spectral method for solving numerical differentiation". *Int. J. Comput. Math.* 87:14 (2010), pp. 3209–3217.

[22] Zhao Z., Meng Z., Zhao L., and You L. and Xie O. "A stabilized algorithm for multi-dimensional numerical differentiation". *J. Algorithms Comput. Technol.* 10:2 (2016), pp. 73–81.

[23] Алиев Б. «Оценка метода регуляризации для задачи суммирования рядов Фурье». *Докл. АН ТаджССР* 21:4 (1978), с. 3—6.

[24] Бабенко К. И. "О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами". *Докл. АН СССР* 132:5 (1960), pp. 982–985.

[25] Васин В. В. «Регуляризация задачи численного дифференцирования». *Матем. зап. Уральский ун-т* 7:2 (1969), с. 29—33.

[26] Долгополова Т. Ф. и Иванов В. К. «О численном дифференцировании». *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 6:3 (1966), с. 570—576.

[27] Жидков В. К. и Семерджиев Х. «О регуляризации задачи суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье». *Объедин.ин-т ядер. исслед. Препринт Р5-8891, Дубна* (1975).

[28] Милейко Г. Л. та Солодкий С. Г. «Гіперболічний хрест і складність різних класів лінійних некоректних задач». *Укр. матем. журн.* 69:7 (2017), с. 951—963.

[29] Переверзев С. В. и Солодкий С. Г. «Оптимальная дискретизация некорректно поставленных задач». *Укр. матем. журн.* 52:1 (2000), с. 106—121.

[30] Рамм А. Г. «О численном дифференцировании». *Изв. вузов. Матем.* 11 (1968), с. 131—134.

[31] Тихонов А. Н. «Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье». *Докл. АН СССР* 156:2 (1964), с. 268—271.

[32] Тихонов А. Н. и Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* 2-е изд. - Москва : Наука, 1979, с. 283.

[33] Фурлетов Г. И. «Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье». *Дифференц. уравнения* 7:3 (1971), с. 510—518.

Є. В. Семенова

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: semenovaevgen@gmail.com

С. Г. Солодкий

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: solodky@imath.kiev.ua

С. А. Стасюк

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: stasyuk@imath.kiev.ua

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 673–684

Відділ механіки та процесів керування Інституту математики НАН України. Кінець XX - початок XXI століття. Нарис

В. В. Новицький

Abstract. Outlined, in the form of an essay, a short excursion into the life of the Department of Mechanics and Control Processes of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine of the end of the XX - beginning of the XXI centuries is presented.

Анотація. Викладено, у вигляді нарису, короткий екскурс у життя відділу механіки та процесів керування в Інституті математики НАН України в кінці двадцятого та на початку двадцять першого століть.

Шостого квітня 2021 року виповнилося 56 років наукової діяльності в Інституті математики Національної академії наук України академіка НАНУ, доктора фіз.-мат. наук, професора Володимира Миколайовича Кошлякова. Саме в цей день 1965 року він був призначений завідувачем відділу механіки та процесів керування. Підкреслимо, що на громадських засадах Володимир Миколайович працював в Інституті з 1963 року та почав виховувати наукову молодь.

Далі роки наукової творчості, виховання учнів, розробка і практичне втілення нових ідей та результатів з аналітичної механіки, теорії гіроскопічних систем, теорії гіроскопічних компасів, навігаційних систем. У першу трійку учнів В. М. Кошлякова ввійшли:

- С. М. Онищенко, кандидат (1966) та доктор (1993) фіз.-мат. наук.
- А. Н. Поліщук, кандидат (1969) фіз.-мат. наук.
- С. П. Сосницький, кандидат (1969) та доктор (1993) фіз.-мат. наук, на сьогодні провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України.

Володимир Миколайович активно працює над узагальненнями та застосуваннями в науці та практиці отриманих ним і його учнями наукових результатів. Його першу монографію «Теорія гіроскопічних компасів» (рос.) друкує в 1972 році московське видавництво «Наука». Вона стала, без перебільшення, настільною книгою багатьох наукових працівників і практиків гірокомпасної справи.

На останньому курсі механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Тараса Шевченка в 1972-1973 роках мені пощастило і я попав на практику в Інститут математики до відділу В. М. Кошлякова, де під керівництвом Остапа Пилиповича Бойчука написав дипломну роботу з дослідження моделей навігаційних систем.

Напевно саме в ті дні перших справжніх наукових пошуків я відчув підтримку колективу, зокрема, Вченого секретаря Інституту математики у минулому, кандидата фіз.-мат. наук Вадима Миколайовича Калиновича та кандидата технічних наук Володимира Петровича Василенка.

З'явилося велике бажання працювати у цьому відділі. Так склалося, що мрія здійснилася лише через 15 років, оскільки я після закінчення університету працював за розподілом в Київському НДІ гідроприладів, де вступив до заочної аспірантури в 1976 році. Науковим керівником став Володимир Миколайович. З ним була погоджена тема кандидатської роботи «Метод слабкого керування в теорії гіроскопічних компасів», яка була наближена до наукової тематики відділу механіки та процесів керування. Далі були НДІ «Сатурн» та Київський політехнічний інститут. На «Сатурні» в обчислювальному центрі я познайомився з Олександром Дмитровичем Федоренком, у майбутньому учнем В. М. Кошлякова, кандидатом фіз.-мат. наук та працівником нашого відділу в Інституті математики.

Стиль наукового керівництва Володимира Миколайовича мені імпонував: аспіранта, після узгодження теми дисертації, відправляли в «самостійне плавання», корегуючи періодично його наукові досягнення, а тоді, коли з'являлися перші вагомі наукові результати, йшла активна постійна підтримка в усіх напрямках діяльності аж до завершальних акордів захисту. Таким чином виховувалися справжні самостійні науковці, які глибоко розуміли, що таке науковий пошук та наукова творчість.

Отже, під керівництвом Володимира Миколайовича, який в 1978 році став членом-кореспондентом АН УРСР, а також при безпосередній участі доктора фіз.-мат. наук Володимира Борисовича Ларіна, я захистив у 1980 році кандидатську дисертацію «Метод слабкого керування в теорії гіроскопічних компасів».

З 1981 року починається співпраця з Володимиром Миколайовичем на викладацькій ниві: він домовляється з тодішнім завідувачем кафедри теоретичної механіки Київського політехнічного інституту Михайлом Антоновичем Павловським і бере мене своїм асистентом з курсу теоретичної механіки, який сам читав на вечірньому відділенні. Це був оптимальний варіант, оскільки вдень я працював на основній роботі в обчислювальному центрі Київського НДІ «Сатурн».

В. М. Кошляков уміло поєднує викладання з науковою діяльністю. Яскравим свідоцтвом цього стала його монографія «Задачі динаміки твердого тіла і прикладної теорії гіроскопів. Аналітичні методи» (рос.), яку московське видавництво «Наука» друкує в 1985 році.

Щоб ефективніше проводити практичні заняття, починаю відвідувати лекції Володимира Миколайовича з теоретичної механіки, які він читав з великою любов'ю, спираючись на свій педагогічний талант та величезний практичний досвід морських випробувань гіроскопічних приладів і наукових досліджень наявних математичних моделей в гіроскопії. Майстерно і непомітно для студентів він прищеплював їм любов до складного курсу теоретичної механіки. Напевно, саме на тих перших лекціях, Володимир Миколайович прищепив і мені любов до викладання. Підсумком його досягнень на ниві викладання стала книжка «Короткий курс теоретичної механіки. Кінематика. Кінетика» (рос.), затверджена Міністерством освіти України як підручник для студентів технічних вишів і надрукована в 1993 році в Києві видавництвом «Вища школа». Поступово для мене окреслились загальні наукові проблеми, пов'язані з задачею слабкого керування консервативними системами. Деякі з цих проблем були частково розв'язані в опублікованому в Інституті математики препринті «Керування гіроскопічними системами» в 1982 році. Це були перші кроки до введення поняття «майже консервативної динамічної системи».

З 1983 року дослідження інших наукових проблем проходили епізодично, у зв'язку з моїм переходом на викладацьку роботу в Київський політехнічний інститут на кафедру вищої математики. Наукові дослідження керованих механічних систем я зміг відновити лише з вересня 1988 року, коли перейшов на постійну роботу до Інституту математики АН УРСР у відділ механіки та процесів керування (з 1996 року за ініціативою В. М. Кошлякова його перейменували на відділ аналітичної механіки).

Цього ж року Інститут математики отримав нового директора. Замість академіка Ю. О. Митропольського директором обрали його учня А. М. Самойленка. Інститут математики розпочав нове життя.

Завдяки Володимиру Миколайовичу у відділі панувала творча доброзичлива атмосфера, яка спонукала до наукової творчості. Для мене важливим результатом такої творчості стала докторська дисертація «Методи декомпозиції та керування в механічних системах», яка була захищена в Інституті математики НАН України в 1991 році. В 1992 році В. М. Кошлякова обрано академіком НАН України. Саме в цей час він цікавиться застосуваннями параметрів Родріга-Гамільтона до задач механіки та завершує ці дослідження в 1994 році виданням в Інституті математики монографії «Параметри Родріга-Гамільтона та їхні застосування в механіці твердого тіла» (рос.). Тут слід з вдячністю згадати нашу незмінну безвідмовну помічницю тоді та тепер у підготовці до друку статей, монографій та звітів відділу Голуб Олену Григорівну.

Моє бажання робити певні підсумки у дослідженні керованих динамічних систем переросло в цілеспрямовану роботу над монографією. В її основу було покладено результати докторської дисертації та нові наукові результати, отримані мною та моїми учнями, зокрема, моєю першою науковою ученицею кандидатом фіз.-мат. наук (1996) Тетяною Георгіївною Положий.

Володимир Миколайович, як завідувач відділу, активно підтримує процес апробації нових результатів, постійно цікавиться ходом підготовки та навіть самим процесом написання монографії. Роботу було завершено в 1995 році виданням в Інституті математики НАН України книжки «Декомпозиція та керування в лінійних системах» та навчального посібника у співавторстві з моїм другом з Київського політехнічного інституту Василем Васильовичем Ясінським «Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах», затвердженого Міністерством освіти України для студентів вищих навчальних закладів за фахом «Прилади та системи керування літальними апаратами та комплексами» та «Прилади та системи орієнтації, навігації та керування рухом у просторі».

Через кілька років, після моєї доповіді за матеріалами монографії на Вченій раді Інституту математики НАН України, академік Юрій Макарович Березанський розповів мені, що в 1957 році він займався «закритою» на той час проблемою стабілізації певних динамічних об'єктів та знайшов умови стабілізовності (за сучасною термінологією – керованості) для загальної системи лінійних диференціальних рівнянь. Важливо, що ці умови не тільки по суті, а й за формою близькі до суті та вигляду тепер уже класичних умов повної керованості Р. Калмана, викладених на I конгресі IFAC. У зв'язку з тим, що робота Юрія Макаровича виконувалася в рамках закритої тематики, то ці, безумовно цікаві та важливі результати, тоді не могли бути опублікованими.

У вересні 1995 року я прийняв запрошення обійняти посаду професора (за сумісництвом) кафедри математичного моделювання економічних систем Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут, де працював у майбутньому співробітник нашого відділу кандидат технічних наук Микола Олександрович Зінчук. Професорське викладання дало можливість застосувати ідеї декомпозиції для спрощення математичних моделей економічних систем, підготувати до захисту та захистити моїх учнів Ольгу Анатоліївну Жуковську (кандидат фіз.-мат. наук) та Євгенія Володимировича Бридуна (кандидат економічних наук). А роком пізніше розроблені ідеї були застосовані до математичних моделей гемодинаміки (кровообігу).

Володимир Миколайович підтримав моє рішення внести в дослідження економічних систем нові ідеї та надалі активно цікавиться педагогічним процесом і сучасним студентством. В той час предметом його наукових досліджень стали структурні перетворення механічних систем.

Наступного 1996 року відбулося знайомство з лікарем-неврологом, кандидатом медичних наук, Уляною Богданівною Лущик, яка була, зокрема, й фахівцем з процесів кровообігу в людському організмі, особливо з венозного кровообігу, зокрема, в мозку. Слід підкреслити, що проблеми кровообігу in vivo (в живому організмі), з урахуванням, що кров – неньютонівська рідина, майже не досліджені, хоча є особливо важливими у практичних застосуваннях. На основі досліджень процесів кровообігу в Першому в Україні Приватному медичному центрі «ІСТИНА» було створено сучасні інноваційні медичні технології лікування для покращення здоров'я нашого народу. Таким чином у моїх наукових зацікавленнях з'явився ще один важливий напрямок досліджень: математичні моделі кровообігу. В 1998 році Уляна Богданівна стала доктором медичних наук і досі успішно застосовує наші розробки та свої знання для покращення здоров'я пацієнтів. На основі досліджень моделей кровообігу в нашому відділі спільно з Науковим центром «Істина-Veritas» створено технологію судинного скринінгу, яка дає можливість діагностувати, контролювати та успішно лікувати різноманітні хвороби кровообігу. Інформацію про ці дослідження можна знайти на сайті Наукового центру «Істина-Veritas».

У квітні 2004 року В. М. Кошляков на одній з Вчених рад урочисто передав мені керівництво відділом аналітичної механіки, а сам перейшов на посаду радника при дирекції та став науковим консультантом нашого відділу. За час керівництва Володимиром Миколайовичем Кошляковим у відділі сформувалися шість окремих наукових напрямків досліджень:

- Структурні дослідження механічних систем (академік В. М. Кошляков);
- Застосування математичної теорії систем до проблем аналітичної механіки та навігації (доктор фіз.-мат. наук К. І. Науменко);
- Розвиток і застосування ідей декомпозиції та керування в динамічних системах, дослідження математичних моделей економічних систем (з 1995 року), дослідження моделей гемодинаміки (з 1996 року) (доктор фіз.-мат. наук з 1991 року, професор з 2003 року В. В. Новицький);
- Дослідження консервативних динамічних систем, зокрема, обернення теорем Лагранжа – Діріхле та Рауса (доктор фіз.-мат. наук С. П. Сосницький).

На жаль, академік В. М. Кошляков у лютому 2009 року назавжди покинув нас. Дякуємо йому за те, що був з нами.

Завдяки процесу оптимізації відділів Інститутів Національної академії наук України, з 2017 року наш відділ аналітичної механіки перестав існувати, перетворився на дослідницьку групу і влився до колективу відділу математичних проблем механіки та теорії керування.

Черговий захист кандидатської дисертації був 2018 року у моєї учениці І. Ф. Святовець.

Над докторськими дисертаціями продовжують працювати кандидати фіз.-мат. наук старший науковий співробітник О. В. Константінов та науковий співробітник О. П. Коломійчук.

Дослідницька тематика групи поповнилася новим науковим напрямком: дослідження майже консервативних керованих та спостережуваних систем. Продовжуються перспективні дослідження гемодинаміки.

Наприкінці травня 2021 року сталися дві важливі події: вибори директора Інституту математики НАН України не відбулися, а завідувач нашого відділу Олександр Миколайович Тимоха був вибраний академіком НАН України. Життя нашого Інституту продовжується.

Список захищених дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата наук, науковий керівник В. В. Новицький

- 1997, **Положий Тетяна Георгіївна** *Структурні задачі синтезу на основі другого методу Ляпунова та їхні застосування в механічних системах* (01.02.01 - теоретична механіка).
- 2002, **Бридун Євгеній Володимирович** *Моделювання системи компенсації еколого-економічних збитків* (08.03.02 - економіко-математичне моделювання).
- 2005, **Бакушевич Андрій Ярославович** *Модальне керування та оптимізація в задачах супроводу антенними системами* (01.02.01 - теоретична механіка).

- 2006, **Жуковська Ольга Анатоліївна** *Інтервальні моделі прийняття колективних рішень в умовах ризику* (01.05.04 - системний аналіз і теорія оптимальних рішень).
- 2009, **Матусов Юрій Петрович** *Оцінки лінійних перетворень випадкових функцій в стохастичній оптимізації* (01.05.04 - системний аналіз і теорія оптимальних рішень).
- 2010, **Коломійчук Олег Петрович** *Задачі спостереження у майже консервативних динамічних системах* (01.02.01 - теоретична механіка).
- 2012, **Приз Андрій Миколайович** *Декомпозиція та механічні аналогії в лінійних динамічних системах* (01.02.01 - теоретична механіка).
- 2018, **Святовець Ірина Федорівна** *Дослідження керованих гіроскопічних майже консервативних систем* (01.02.01 - теоретична механіка).

Деякі важливі наукові праці співробітників нашого відділу

[1] Konstantinov A. V. "Effect of viscous damping on forced oscillations of the system «reservoir - free surfaced liquid»". *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології* 18 (2013), pp. 73–80.

[2] Konstantinov A. V. "Forced oscillations of the system «reservoir - capillary liquid with a free surface»". *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки* 2 (2013), pp. 43–46.

[3] Konstantinov A. V., Limarchenko O., Mel'nik V. N., and Semenova I. Yu. "Nonlinear problem of the parametric oscillations of a noncylindrical tank partially filled with a fluid". *International Applied Mechanics* 52 (2016), pp. 599–604.

[4] Konstantinov A. V. and Limarchenko O. S. "Effect of the viscosity and capillarity of fluid on the nonlinear dynamics of a tank partially filled with a fluid". *International Applied Mechanics* 53 (2017), pp. 130–138.

[5] Konstantinov A. V. and Limarchenko O. S. "Nonlinear dynamics of the combined motion of a tank and a fluid partially filling it". *International Applied Mechanics* 52 (2016), pp. 520–528.

[6] Konstantinov A. V., Limarchenko O. S., Lukyanchuk V. V., and Nefedov A. A. "Dynamic methods of damping the oscillation in structure-free-surface fluid system". *International Applied Mechanics* 55 (2019), pp. 59–67.

[7] Konstantinov A. V., Limarchenko O. S., and Semenova I. Yu. "Generalizations of the Faraday problem in mechanical system «reservoir - liquid with a free surface»". *Mathematical Modeling and Computing* 1:1 (2014), pp. 45–60.

[8] Konstantinov A. V., Limarchenko O. S., and Semenovich K. O. "Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems". *Mathematical Modeling and Computing* 2:1 (2015), pp. 48–57.

[9] Konstantinov A. V., Limarchenko V. O., and Limarchenko O. S. "Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response". *Journal of Automation and Information Sciences* 52:6 (2020), pp. 58–70.

[10] Lushchyk U. B., Novytskyy V. V., Babii I. P., Lushchyk N. G., Ryabets L. S., Legka I. I., Kolomiychuk O. P., Novytskyy Vi. V., and Moamar V. P. "Vascular screening of PathoNeoAngioOncogenesis. (Analytical approach to an early diagnosis of pathological arterioVenous angiotransformations at the micro- and macrovascular levels". *Journal of Blood Disorders, Symptoms & Treatments* 3:1 (2021), pp. 1–44.

[11] Sosnitskii S. P. "On an analogy in the restricted and general three-body problems". *Adv. Space Research* 64 (2019), pp. 1160–1165.

[12] Sosnitskii S. P. "On the bounded symmetrical motions in the three-body problem". *Intern. J. Non-Linear Mech.* 67 (2014), pp. 34–38.

[13] Sosnitskii S. P. "On the boundedness of motion in the spatial circular restricted three-body problem". *Intern. J. Non-Linear Mech.* 104 (2018), pp. 116–120.

[14] Sosnitskii S. P. "On the Hill stable motions in the three-body problem". *Adv. Space Research* 56 (2015), pp. 859–864.

[15] Sosnitskii S. P. "On the Lagrange stability of motion in the planar restricted three-body problem". *Adv. Space Research* 59 (2017), pp. 2459–2465.

[16] Sosnitskii S. P. "On the Lagrange stability of motion in the spatial elliptic restricted three-body problem". *Astron. J.* 160:6 (2020), p. 281.

[17] Sosnitskii S. P. "On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem". *Astron. J.* 136:6 (2008), pp. 2533–2540.

[18] Sosnitskii S. P. "On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem". *Astron. J.* 136:6 (2008), pp. 2533–2540.

[19] Бридун Є. В. та Новицький В. В. «Відшкодування збитків на об'єктах енергетики енергетичними страховими пулами». Т. 3. Наукові вісті Національного технічного університету України, 2000, с. 120—126.

[20] Жуковська О. А. та Новицький В. В. *Ігрові моделі економіки. Контроль і управління в складних системах.* Т. 2. Книга за матеріалами п'ятої міжнародної науково-технічної конференції м. Вінниця, 1999, с. 306—311.

[21] Зінчук М. О., Науменко К. І., Новицький В. В. та Положий Т. Г. *Аналітичні дослідження моделей механічних систем.* К: Ін-т математики НАН України. Препринт 2005.8, 2005.

[22] Константінов О. В. «Вплив сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи резервуар-рідина в слабкому гравітаційному полі». Т. 3. 4. К: Ін-т математики НАН України, 2006, с. 198—213.

[23] Константинов А. В. «Влияние слабых гравитационно-капиллярных эффектов на поведение резервуара с жидкостью при сложном динамическом нагружении». Т. 3. 4. К: Ін-т математики НАН України. Український математичний конгрес. Секція 1, 2010, с. 63—72.

[24] Константинов А. В. «Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов». Т. 7. 3. К: Ін-т математики НАН України, 2010, с. 213—223.

[25] Константинов А. В. «Обобщенная задача Фарадея для резервуара, частично заполненного жидкостью, совершающего наклонные движения». Т. 10. 4-5. К: Ін-т математики НАН України, 2013, с. 472—479.

[26] Константинов А. В. «Особенности переходных процессов в классической задаче Фарадея в условиях слабой гравитации». Матеріали міжнародної наукової конференції «Варіаційні методи механіки». - Київ. - 28-30 вересня 2012, 2012, с. 70—80.

[27] Константинов А. В. «Параметрические колебания в системе «резервуар - жидкость со свободной поверхностью»: обобщения задачи Фарадея». International Workshop «Hydrodynamics of moving objects», Ukraine, Kiev, April 23, 2012, 2012, с. 58—73.

[28] Константинов А. В. и Лимарченко О. С. «Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационных эффектов». Т. 8. 2. К: Ін-т математики НАН України, 2012, с. 83—100.

[29] Константинов А. В. и Лимарченко О. С. «Нелинейные колебания с жидкостью со свободной поверхностью при горизонтальном силовом возбуждении». Т. 9. 1. К: Ін-т математики НАН України, 2012, с. 188—202.

[30] Константинов А. В., Лимарченко О. С., Кинебас К. С. и Параньកина О. Ю. «Динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, при сложном импульсном нагружении». Т. 13. 3. К: Ін-т математики НАН України, 2016, с. 117—128.

[31] Константинов А. В., Лимарченко О. С. и Семенова И. Ю. «Вынужденные нелинейные колебания жидкости в резервуаре параболической формы». Т. 11. 5. К: Ін-т математики НАН України, 2014, с. 68—77.

[32] Константінов О. В. «Динаміка системи «резервуар - рідина з вільною поверхнею» під дією зовнішнього силового збудження руху». Т. 16. 2. К: Ін-т математики НАН України, 2019, с. 38—49.

[33] Константінов О. В. «Задачі динаміки сумісного руху резервуару з рідиною». Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». - Івано-Франківськ - Яремче. - 14-19 травня 2018, 2018, с. 307—310.

[34] Константінов О. В. «Керування резервуаром, частково заповненим рідиною, на основі принципу найменшого примусу Гауса (задача гальмування)». *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки* 1 (2019), с. 85—88.

[35] Константінов О. В. «Керування системою «резервуар - рідина» зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі». *Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки* 1 (2018), с. 35—47.

[36] Константінов О. В. «Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар - рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора». *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки* 3 (2013), с. 154—158.

[37] Константінов О. В. та Лимарченко О. С. «Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною». *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології* 17 (2013), с. 73—80.

[38] Константінов О. В. и Лимарченко О. С. «Задача про параметричний резонанс у системі резервуар-рідина з вільною поверхнею». Т. 14. 1. К: Ін-т математики НАН України, 2017, с. 171—185.

[39] Константінов О. В. та Лимарченко О. С. «Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною». *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології* 16 (2012), с. 76—85.

[40] Константінов О. В. та Новицький В. В. «Модальне керування механічною системою «резервуар - рідина з вільною поверхнею»». Т. 14. 21. К: Ін-т математики НАН України, 2017, с. 42—55.

[41] Константінов О. В. та Новицький В. В. «Програмне керування рухом резервуару з рідиною з вільною поверхнею на основі принципу найменшого примусу Гаусса». Т. 15. 1. К: Ін-т математики НАН України, 2018, с. 33—46.

[42] Константінов О. В. та Семенова І. Ю. «Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар - рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора». *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. Спецвипуск* (2015), с. 125—128.

[43] Ларин В. Б. и Науменко К. И. *Об определении ориентации твердого тела.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №12, 1981, с. 23.

[44] Ларин В. Б. и Науменко К. И. *Управление шагающим аппаратом с почти невесомыми ногами.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №22, 1980, с. 38.

[45] Лущик У. Б., Бабій І. П., Тітенко Т. М., Новицький В. В., Стукалін В. О., Лущик Н. Г., Леонова В. В. та Приз А. М. *Інноваційні вектори нейрореабілітації. Логіка та менеджмент мультидисциплінарного підходу у відновній медицині.* К.: НЦ «Істина», 2012, с. 244.

[46] Лущик У. Б., Новицкий В. В., Алексеева Т. С., Францевич К. А. и Браницкая Н. С. *Аналитические аспекты индивидуальной гемодинамической коррекции в ангионеврологии.* К.: Істина, 2004, с. 144.

[47] Лущик У. Б. та Новицький В. В. *Сучасні медичні технології в аналітичній ангіології. Навчальний посібник.* К., 2011, с. 135.

[48] Лущик У. Б., Протасов А. Г. та Новицький В. В. «Сучасні технології дослідження серцево-судинної системи: чому не зменшуються показники захворюваності та смертності від серцево-судинних захворювань». *Винахідник і раціоналізатор* 10(95) (2009), с. 14—19.

[49] Науменко К. И. *Наблюдение и управление движением динамических систем.* К., 1984, с. 206.

[50] Науменко К. И. *Синтез непрерывного нелинейного наблюдателя при определении оценки ориентации твердого тела.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №93.21, 1993, с. 12.

[51] Науменко К. И. *Синтез систем оптимальной стабилизации методом Винера-Хопфа.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №92.26, 1992, с. 48.

[52] Науменко К. И. *Спектральные методы определения оптимальных оценок состояния и стабилизации линейных систем.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №81.55, 1981, с. 48.

[53] Науменко К. И. *Стабилизация горизонтального движения двуногого шагающего аппарата при неполной информации.* К: Ин-т математики АН УССР. Препринт №31, 1978, с. 44.

[54] Новицький В. В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах.* Т. 11. К: Інститут математики НАН України, 1995, с. 142.

[55] Новицький В. В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах.* Т. 77. К: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 252.

[56] Новицький В. В. *Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки.* Т. 78. К: Ін-т математики НАН України, 2008, с. 124.

[57] Новицький В. В., Бакушевич А. Я. та Бакушевич Я. М. «Нестаціонарні рівняння збуреного руху для нелінійної моделі антенної системи». *Нелінійні коливання* 5:3 (2002), с. 326—333.

[58] Новицький В. В. та Браніцька Н. С. «Деякі нелінійні математичні моделі коливних процесів при поперечному перерізі судинної стінки». *Нелінійні коливання* 7:3 (2004), с. 356—364.

[59] Новицький В. В., Зінчук М. О., Коломійчук О. П. та Святовець І. Ф. *Неперервні та дискретні майже консервативні динамічні системи.* К: Ін-т математики НАН України, 2020, с. 193.

[60] Новицький В. В., Зінчук М. О. та Приз А. М. *Канонічні форми матриць механічної аналогії лінійних систем парного порядку.* К: Ін-т математики НАН України. Препринт 2011.3, 2011, с. 74.

[61] Новицький В. В. та Ясінський В. В. *Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах: Навч. посібник.* К., 1995.

[62] Сосницкий С. П. «Об асимптотической устойчивости равновесия параметрически возмущаемых систем». *Прикладная математика и механика* 69:4 (2005), с. 612—623.

[63] Сосницький С. П. *Функція дії за Гамільтоном та стійкість руху консервативних систем.* К. : Наукова думка, Проєкт «Наукова книга», 2002, с. 228.

Патенти

[1] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб оцінки регіональної ангіоархітектоніки.* Патент №67707 А від 31.12.03.

[2] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб оцінки сірошкального сканованого зображення.* Патент №67708 А від 31.12.03.

[3] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб нейрореабілітації хворих на апалічний синдром.* Патент №72725 А від 31.12.03.

[4] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб оцінки порушень мікроциркуляції в нормі та при патології у людей різного віку за допомогою методу капіляроскопії.* Патент №67709 А від 31.12.03.

[5] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб використання композицій лікарських засобів для корекції артеріовенозного дисбалансу.* Патент №72868 А від 31.12.03.

[6] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Спосіб лікування судомного синдрому.* Патент №71505 А від 31.12.03.

[7] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Прилад для реєстрації капілярного кровотоку.* Патент №22944 від 25.05.07.

[8] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Прилад для реєстрації капілярного кровотоку (Росія).* Патент №2367340 від 20.09.09.

Зареєстрована технологія судинного скринінгу

[1] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Патент на корисну модель №8505 "Пристрій для проведення судинного скринінгу".* Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 11.11.2013.

[2] Лущик У. Б., Новицький В. В. *Медичний виріб: Комплекс судинного скринінгу "Angio Veritas TM micro".* Свідоцтво про Державну реєстрацію №13881/2014.

В. В. Новицький
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: v.novytskyy@gmail.com

Наукове видання

Сучасні проблеми математики та її застосувань. II

Збірник праць Інституту математики НАН України

2021, т. 18, № 1

Modern problems of mathematics and its applications. II

Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

2021, v. 18, No 1

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
В. І. Герасименко, С. І. Максименко.
Дизайн обгортки: Б. Г. Фещенко

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32, +38 050 540 30 64
email: gsm1502@ukr.net
папір офсетний, друк цифровий
формат 70x100/16, ум. друк. 16.5 арк.
Зам. № 7 від 16.08.2021, наклад 300 прим.

Збірник містить статті присвячені основним здобуткам наукових співробітників Інституту математики НАН України з актуальних напрямів сучасної математики та її застосувань.

Для наукових співробітників, викладачів закладів вищої освіти, докторантів і аспірантів.