Проблеми топології
та суміжні питання

Інститут математики
Національної академії наук України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Інститут математики
Національної академії наук України

Проблеми топології та суміжні питання

Київ – 2006

УДК 517.938.5+512.6+519.41

Проблеми топології та суміжні питання / Відп. ред. В. В. Шарко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.3, №3: – Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. – 487 с.

ISSN 1815-2910

Збірник містить нові результати отримані вченими наукових центрів України. Роботи, що включені до збірника, охоплюють широке коло питань топології, диференціальної геометрії, теорії динамічних систем, алгебри та теорії функцій.

Видавнича група збірника:
член-кореспондент НАН України В. В. Шарко (відп. ред.), кандидат фіз.-мат. наук С. І. Максименко, І. А. Юрчук (відп. за випуск).

Рецензенти:
член-кореспондент НАН України Ю. Ю. Трохимчук
доктор фіз.-мат. наук, професор А. П. Петравчук

Свідоцтво про державну реєстрацію — серія КВ № 8459, видане 19 лютого 2004 р.

Зміст

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 7-22

УДК 512.5

В. В. Бондаренко

Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка
E-mail: vitaliy.bondarenko@gmail.com

Про класифікацію унітрикутних зображень скінченних груп

У цій статті ми розглядаємо задачу про опис зображень скінченних груп унітрикутними матрицями над полем.

В этой статье мы рассматриваем задачу об описании представлений конечных групп унитреугольными матрицами над полем.

In this paper we consider the problem of classifying representations of finite groups by unitriangular matrices over a field.

Групу верхніх унітрикутних матриць розміру $n \times n$ над поле k будемо позначати через $\mathbf{UT}_n(k)$. унітрикутне зображення групи G над полем k — це гомоморфізм

$$S : G \to \mathbf{UT}_n(k),$$

де n — деяке натуральне число. Два унітрикутні зображення S та S' назвемо унітрикутно еквівалентними, якщо існує унітрикутна матриця M, така, що $S(g) = MS'(g)M^{-1}$ для довільного елементу $g \in G$. Якщо характеристика поля k ділить порядок групи G, то унітрикутне зображення назвемо модулярним.

Прямою сумою унітрикутних зображень S та S' групи G назвемо зображення T, таке, що $T(g) = S(g) \oplus S'(g)$ для довільного елементу $g \in G$. унітрикутне зображення T назвемо (унітрикутно) розкладним, якщо воно унітрикутно еквівалентне прямій сумі двох унітрикутних зображень, і нерозкладним в іншому разі.

У цій статті ми вказуємо повну класифікацію модулярних унітрикутних зображень циклічної групи другого порядку. Окрім того, ми покажемо, що задача про опис унітрикутних зображень більшості скінченних груп містить в собі задачу про унітрикутну подібність пари матриць (подібність за допомогою унітрикутних матриць). Такі групи ми називаємо унітрикутно дикими.

1. Модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку. У цьому параграфі ми опишемо модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку.

Через k позначаємо довільне поле характеристики 2 і покладемо $k^* = k \setminus 0$. $E(n)$ буде позначати одиничну матрицю розміру $n \times n$, а $I_{ij}(n)$ — матрицю розміру $n \times n$, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на решті місць стоять нульові елементи. Часто замість $E(n)$ будемо писати просто E.

Для натуральних чисел p і q, таких, що $p \geq q$, покладемо $[p, q] = \{p, p+1, \ldots, q\}$, $[p, q]^2 = [p, q] \times [p, q]$ та позначимо через $[p, q]^2_<$ підмножину всіх елементів (i, j) із $[p, q]^2$, таких, що $i < j$.

Нехай P — підмножина в $[1, n]^2_<$. Елемент

$$x = (i, j) \in [1, n]^2_<$$

назвемо P-ізольованим, якщо для довільного елемента

$$y = (p, q) \in P$$

, $y \neq x$, множина $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ порожня. Позначимо через $\mathcal{I}_n$ сукупність всіх підмножин $P \subset [1, n]^2_<$, $P \neq \varnothing$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P-ізольованим.

Прямою сумою $X \coprod Y$ множин $X \in \mathcal{I}_n$ і $Y \in \mathcal{I}_m$ назвемо наступну множину $Z \in \mathcal{I}_{n+m}$: $Z = X \cup Y(n)$, де $Y(n) = \{(i+n, j+n) \mid (i,j) \in Y\}$. Множину $X \in \mathcal{I}_n$ назвемо розкладною, якщо вона є прямою сумою деяких множин $X' \in \mathcal{I}_p$ і $X'' \in \mathcal{I}_q$, де p, q— натуральні числа. В іншому разі множину X назвемо нерозкладною. Очевидно, що $X \in \mathcal{I}_n$ є розкладною тоді і лише тоді, коли існує $1 \leq r < n$, таке, що $(p,q) \notin X$ для будь-яких $p > r$ і $q \leq r$.

Множину всіх пар (X, λ), де $X \in \mathcal{I}_n$ і λ — відображення із X в k^*, будемо позначати через $\mathcal{P}_n$; замість $\lambda((i,j))$ будемо писати $\lambda(i,j)$. Для $(X,\lambda) \in \mathcal{P}_n$ і $(Y,\gamma) \in \mathcal{P}_m$ покладемо

$$(X,\lambda) \coprod (Y,\gamma) = (X \coprod Y, \lambda \circ \gamma),$$

де

$$[\lambda \circ \gamma](i,j) = \lambda(i,j)$$

для $(i,j) \in X$ і

$$[\lambda \circ \gamma](i+n, j+n) = \gamma(i,j)$$

для $(i+n, j+n) \in Y(n)$.

Співставимо кожній парі $(X,\lambda) \in \mathcal{P}_n$ матрицю

$$M(X,\lambda) \in \mathbf{UT}_n(k)$$

наступним чином:

$$M(X,\lambda) = E(n) + \sum_{(i,j)\in X} \lambda(i,j) I_{ij}(n).$$

Легко бачити, що $(M(X,\lambda))^2 = E(n)$.

Модулярне унітрикутне зображення K циклічної групи другого порядку $G = \{a \mid a^2 = 1\}$, таке, що

$$K(a) = M(X,\lambda),$$

позначимо через $K_{(X,\lambda)}$. Зауважимо, що

$$K_{(X_1,\lambda_1)} \oplus K_{(X_2,\lambda_2)} = K_{(X_1 \coprod X_2, \lambda_1 \circ \lambda_2)}.$$

Модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку описуються (з точністю до унітрикутної еквівалентності) наступною теоремою.

Теорема 1. 1) *Будь-яке модулярне унітрикутне зображення циклічної групи другого порядку унітрикутно еквівалентне зображенню виду* $K_{(X,\lambda)}$.

2) *Зображення* $K_{(X,\lambda)}$ *і* $K_{(X',\lambda')}$ *не є унітрикутно еквівалентними, якщо* $(X,\lambda) \neq (X',\lambda')$.

3) *Зображення* $K_{(X,\lambda)}$ *нерозкладне тоді і лише тоді, коли нерозкладною є множина* X.

Твердження 1) і 2) теореми 1 безпосередньо випливають із основного результату статті [2], в якій описано повну систему представників класів спряжених елементів групи $\mathbf{UT}_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2.

Переходимо до твердження 3).

Якщо множина X розкладна, то, очевидно, що зображення $K_{(X,\lambda)}$ є розкладним. Покажемо, що зображення $K_{(X,\lambda)}$ нерозкладне, якщо нерозкладним є множина X. Допустимо, що це не так. Тоді $K_{(X,\lambda)}$ унітрикутно еквівалентне прямій сумі (унітрикутних) зображень T_1 і T_2. Згідно твердження 1) теореми $T_1 = K_{(X_1,\lambda_1)}$ і $T_2 = K_{(X_2,\lambda_2)}$ для деяких $X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2$. Значить

$$T_1 \oplus T_2 = K_{(X_1,\lambda_1)} \oplus K_{(X_2,\lambda_2)} = K_{(X_1 \coprod X_2, \lambda_1 \circ \lambda_2)}.$$

А це протирічить твердженню 2) теореми, тому що згідно викладеного $K_{(X,\lambda)}$ унітрикутно еквівалентне

$$K_{(X_1 \coprod X_2, \lambda_1 \circ \lambda_2)}$$

і при цьому

$$X \neq X_1 \coprod X_2$$

(бо X нерозкладне). Теорема 1 доведена.

2. Означення унітрикутно диких груп. У цьому параграфі матриці розглядаються над довільним полем.

Доведемо спочатку наступне твердження (яке для скінченного поля розглянуто в [1]).

Твердження 1. *Задача про приведення однієї (навіть унітрикутної) матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі задачу про приведення пари матриць за допомогою (однакових) унітрикутних подібних перетворень.*

Доведення. Наше доведення незалежне від доведення в [1].

Розглянемо матриці вигляду

$$X(A_1, A_2) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де A_1, A_2 — довільні матриці (всі клітини мають однаковий розмір).

Розглядаючи рівність $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $X(A_1, A_2)$ і $X(B_1, B_2)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є пари (A_1, A_2) і (B_1, B_2). При цьому клітини матриць $X(A_1, A_2)$ і $X(B_1, B_2)$ можна вважати однакового розміру, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру. Розіб'ємо матрицю C на блоки у відповідності з розбиттям матриць $X(A_1, A_2)$ та $X(B_1, B_2)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19} \\ \hline
0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} & C_{29} \\
0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} & C_{39} \\ \hline
0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} & C_{49} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} & C_{59} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & C_{67} & C_{68} & C_{69} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} & C_{78} & C_{79} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} & C_{89} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{99}
\end{array}\right),$$

де $C_{11}, \ldots, C_{99}$ — унітрикутні матриці; перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій і правій частинах рівності $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{1}$$
$$C_{23} = 0, \tag{2}$$
$$C_{24} = C_{12}, \tag{3}$$
$$C_{25} = C_{13}, \tag{4}$$
$$C_{26} = 0, \tag{5}$$
$$C_{27} = C_{14} + C_{15} + C_{16}, \tag{6}$$
$$C_{28} = C_{14}B_1 + C_{15}B_2 + C_{16}, \tag{7}$$
$$C_{29} = C_{18}, \tag{8}$$
$$C_{44} = C_{22}, \tag{9}$$
$$C_{45} = C_{23}, \tag{10}$$
$$C_{46} = 0, \tag{11}$$

$$C_{47} = C_{24} + C_{25} + C_{26}, \tag{12}$$
$$C_{48} = C_{24}B_1 + C_{25}B_2 + C_{26}, \tag{13}$$
$$C_{49} = C_{28}, \tag{14}$$
$$C_{55} = C_{33}, \tag{15}$$
$$C_{56} = 0, \tag{16}$$
$$C_{57} = C_{34} + C_{35} + C_{36}, \tag{17}$$
$$C_{58} = C_{34}B_1 + C_{35}B_2 + C_{36}, \tag{18}$$
$$C_{59} = C_{38}, \tag{19}$$
$$C_{77} = C_{44} + C_{45} + C_{46}, \tag{20}$$
$$C_{78} + A_1C_{88} = C_{44}B_1 + C_{45}B_2 + C_{46}, \tag{21}$$
$$C_{79} + A_1C_{89} = C_{48}, \tag{22}$$
$$C_{77} = C_{55} + C_{56}, \tag{23}$$
$$C_{78} + A_2C_{88} = C_{55}B_2 + C_{56}, \tag{24}$$
$$C_{79} + A_2C_{89} = C_{58}, \tag{25}$$
$$C_{77} = C_{66}, \tag{26}$$
$$C_{78} + C_{88} = C_{66}, \tag{27}$$
$$C_{79} + C_{89} = C_{68}, \tag{28}$$
$$0 = C_{78}, \tag{29}$$
$$C_{99} = C_{88}. \tag{30}$$

Проаналізуємо цю систему. Із рівнянь (1), (9), (15), (20), (10), (2), (11), (23), (16), (26), (30), (27), (29) випливає, що $C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66} = C_{77} = C_{88} = C_{99}$, а із рівнянь (21), (29), (10), (2), (11), (24), (16) — що $A_1C_{88} = C_{44}B_1$ і $A_2C_{88} = C_{55}B_2$; значить $A_1C_{88} = C_{88}B_1$ і $A_2C_{88} = C_{88}B_2$ або $(C_{88})^{-1}A_1C_{88} = B_1$ і $(C_{88})^{-1}A_2C_{88} = B_2$ (зауважимо, що матриця C_{88} унітрикутна).

Отже, якщо матриці $X(A_1, A_2)$ і $X(B_1, B_2)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A і B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A і B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $X(A_1, A_2)$ та $X(B_1, B_2)$ унітрикутно подібні.

Твердження 1 доведено.

Зауважимо, що виходячи із твердження 1 легко показати, що задача про приведення однієї унітрикутної матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі аналогічну задачу не лише для пари матриць, а і для $m > 2$ матриць.

Усе вищесказане є мотивом для наступного означення.

Групу G назвемо унітрикутно дикою над полем k, якщо задача про опис (із точністю до унітрикутної еквівалентності) її унітрикутних зображень містить в собі задачу про опис квадратних матриць над k з точністю до унітрикутних подібних перетворень.

3. Теореми про унітрикутно дикі скінченні групи. Розглянемо спочатку випадок модулярних зображень p-груп.

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Будь-яка скінченна p-група G порядку $n > 2$ є унітрикутно дикою над полем k характеристики p.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли G є циклічною групою порядку $n = p^s > 3$; у цьому випадку виконана одна із таких умов:

а) $p = 2$ і $n = 2^s$, де $s \geq 2$,

б) $p = 3$ і $n = 3^s$, де $s \geq 2$,

в) $p > 3$ і $n = p^s$, де $s \geq 1$.

Твірний елемент групи G позначимо через a.

Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця над полем k, унітрикутне зображення групи G, таке, що

$$T_A(a) = X_1(A) = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E & A & 0 \\ 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right).$$

Матриця $X_(A)$ задає зображення групи G, оскільки

$$\begin{aligned} X_1(A)^n &= [(X_1(A) - E) + E]^n \\ &= [(X_1(A) - E) + E]^{p^s} = \\ &= (X_1(A) - E)^{p^s} + E^{p^s} = \\ &= 0 + E = E, \end{aligned}$$

(відмітимо, що $(X_1(A) - E)^{p^s} = 0$, бо $(X_1(A) - E)^4 = 0$ і $p^s > 3$).

Покажемо, що зображення T_A та T_B групи G унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A і B унітрикутно подібні (це й буде означати, що G є унітрикутно дикою над полем k). Для цього треба показати, що матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B. При цьому можна вважати, матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ мають однаковий розмір (інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру).

Розглянемо рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами. Розіб'ємо матрицю C на блоки у відповідності з розбиттям матриць $X_1(A)$ та $X_1(B)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \hline 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{array}\right),$$

де $C_{11}, \ldots, C_{66}$ — унітрикутні матриці; перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій та правій частинах рівності $X_1(A)C = CX_1(B)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{31}$$

$$C_{23} = 0, \tag{32}$$

$$C_{24} = C_{12} + C_{13}, \tag{33}$$

$$C_{25} = C_{12}B + C_{13}, \tag{34}$$

$$C_{26} = C_{15}, \tag{35}$$

$$C_{44} = C_{22} + C_{23}, \tag{36}$$

$$C_{45} + AC_{55} = C_{22}B + C_{23}, \tag{37}$$

$$C_{46} + AC_{56} = C_{25}, \tag{38}$$

$$C_{44} = C_{33}, \tag{39}$$

$$C_{45} + C_{55} = C_{33}, \tag{40}$$

$$C_{46} + C_{56} = C_{35}, \tag{41}$$

$$0 = C_{45}, \tag{42}$$

$$C_{66} = C_{55}. \tag{43}$$

Проаналізуємо цю систему. З рівнянь (31), (32), (36), (39), (40), (42), (43) випливає, що

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66},$$

а з рівнянь (32), (37), (42) — що

$$AC_{55} = C_{22}B.$$

Тому $AC_{22} = C_{22}B$ або $(C_{22})^{-1}AC_{22} = B$ (зауважимо, що матриця C_{22} унітрикутна). І тому якщо матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A та B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A та B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $X_1(A)C = CX_1(B)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ — унітрикутно подібні.

Отже, ми довели, що циклічна група порядку $n = p^s > 3$ є унітрикутно дикою.

Розглянемо тепер випадок, коли G — циклічна група порядку 3: $G = \{a \mid a^3 = 1\}$ (тоді, нагадаємо, характеристика поля дорівнює 3). Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця (над k), унітрикутне зображення групи G наступного вигляду:

$$T_A(a) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & E & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right)$$

(всі клітини мають однаковий розмір).

Розглядаючи рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $T_A(a)$ та $T_A(b)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B (можна вважати, що клітини матриць $T_A(a)$ та $T_B(a)$ мають однаковий розмір, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру). Розіб'ємо матрицю C на блоки C_{ij} у відповідності із розбиттям матриць $T_A(a)$ та $T_B(a)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ \hline 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & C_{67} & C_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} & C_{78} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} \end{array}\right).$$

Перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій та правій частинах рівності $T_A(a)C = CT_B(a)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{44}$$

$$C_{23} = 0, \tag{45}$$

$$C_{24} = 0, \tag{46}$$

$$C_{25} = C_{12} + C_{13} + C_{14}, \tag{47}$$

$$C_{26} = C_{13}B + C_{14}, \tag{48}$$

$$C_{27} = C_{14}, \tag{49}$$

$$C_{28} = C_{17}, \tag{50}$$

$$C_{55} = C_{22} + C_{23} + C_{24}, \tag{51}$$

$$C_{56} = C_{23}B + C_{24}, \tag{52}$$

$$C_{57} = C_{24}, \tag{53}$$

$$C_{58} = C_{27}, \tag{54}$$

$$C_{55} = C_{33} + C_{34}, \tag{55}$$

$$C_{56} + AC_{66} = C_{33}B + C_{34}, \tag{56}$$

$$C_{57} + AC_{67} = C_{34}, \tag{57}$$

$$C_{58} + AC_{68} = C_{37}, \tag{58}$$

$$C_{55} = C_{44}, \tag{59}$$

$$C_{56} + C_{66} = C_{44}, \tag{60}$$

$$C_{57} + C_{67} + C_{77} = C_{44}, \tag{61}$$

$$C_{58} + C_{68} + C_{78} = C_{47}, \tag{62}$$

$$0 = C_{57}, \tag{63}$$

$$0 = C_{67}, \tag{64}$$

$$C_{88} = C_{77}. \tag{65}$$

Проаналізуємо цю систему.

З рівнянь (44), (45), (46), (51), (52), (55), (57), (59), (60), (61), (63), (64), (65) випливає, що

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66} = C_{77} = C_{88},$$

а з рівнянь (45), (46), (52), (56), (57), (63), (64) — що

$$AC_{66} = C_{33}B.$$

Тому $AC_{33} = C_{33}B$ або $(C_{33})^{-1}AC_{33} = B$ (зауважимо, що матриця C_{33} унітрикутна). Таким чином, якщо матриці $T_A(a)$ та $T_B(a)$ — унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A та B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A та B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то

$$T_A(a)C = CT_B(a)$$

для блоково-діагональної матриці C з діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $T_A(a)$ і $T_B(a)$ — унітрикутно подібні.

Отже, ми довели, що зображення T_A та T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B. А значить група G унітрикутно дика.

Таким чином, теорема 2 має місце, якщо група G циклічна.

Нехай, нарешті, група G нециклічна. Оскільки в цьому випадку фактор-група по комутанту $H = G/G'$ не може бути циклічною групою, то H (а значить і G) має фактор-групу H_0, що є прямим добутком двох циклічних підгруп порядку p. Звідси випливає, що для $p > 2$ група G має циклічну фактор-групу порядку p, а значить (згідно вже доведеного) є унітрикутно дикою. Таким чином, щоб завершити доведення теореми, залишилося розглянути випадок, коли група G є прямим добутком двох циклічних підгруп порядку 2:

$$G = \{a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba\}.$$

Покладемо

$$T_A(a) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad T_A(b) = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що два такі зображення T_A та T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A та B унітрикутно подібні. Отже G — унітрикутно дика.

Теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер випадок довільних скінченних груп.

Для скінченної групи G та цілого числа $m \geq 0$ позначимо через $G(n)$ нормальний дільник G, породжений елементами, порядки яких взаємно прості з n (зокрема, $G(0) = G$). Очевидно, що коли число n просте, то фактор-група $G/G(n)$ є n-групою.

Твердження 2. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p \geq 0$. Тоді будь-яке унітрикутне зображення $T : G \to \mathbf{UT}_n(k)$ індукується зображенням фактор-групи $G/G(p)$ (тобто $T = \phi S$, де S — унітрикутне зображення $G/G(p)$ і $\phi : G \to G/G(p)$ — проекція G на $G/G(p)$).*

Твердження випливає із того, що якщо $A^m = E$ для унітрикутної матриці A і до того ж m взаємно просте з p, то $A = E$.

Безпосередньо з теореми 2 та твердження 2 (з урахуванням того факту, що $G/G(p)$ — p-група) випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Тоді*

a) якщо $p \neq 2$ і $[G : G(p)] > 1$, то група G унітрикутно дика;

b) якщо $p = 2$ і $[G : G(p)] > 2$, то група G унітрикутно дика.

Зауважимо, що якщо $G = G(p)$ (зокрема, коли p взаємно просте з порядком групи), то унітрикутні зображення групи G вичерпуються одиничними зображеннями (це випливає із твердження 2); якщо ж $p = 2$ і $[G : G(p)] = 2$, то унітрикутні зображення групи G описує теорема 2 разом із твердженням 2.

Література

[1] *Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Цишкин А. И.* Классы сопряженных элементов унитреугольной группы // Кибернетика. - 1990. - N1. - С. 40-48, 133.

[2] *Бондаренко В. В.* Про спряжені елементи порядку 2 в групі унітрикутних матриць над полем характеристики 2 // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. - 2005. - вип. 10-11. - С. 9-21.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 23-44

УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко

Ин-т математики НАН Украины, Киев
E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

Е. Н. Тертичная

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: olena-tertychna@mail.ru

О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порождённых идемпотентами с частичным нулевым умножением

У статті вивчається зв'язок між нескінченністю (зображувального) типу та нескінченністю порядка для одного природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами.

В статье изучается связь между бесконечностью (представленческого) типа и бесконечностью порядка для одного естественного класса полугрупп, порождённых идемпотентами.

In this paper we study a connection between infiniteness of (representation) type and infiniteness of order for a natural class of semigroups generated by idempotents.

Введение

В теории конечномерных представлений объект исследования называют объектом конечного (представленческого) типа, если он имеет, с точностью до изоморфизма, конечное число (конечномерных) неразложимых представлений; в противном случае его называют объектом бесконечного типа. Описание объектов конечного и бесконечного типов является одной из основных задач любой теории конечномерных представлений (в частности, представлений групп [1], колчанов [2], частично упорядоченных множеств [3, 4] и т.д.). Если говорить о представлениях групп, то полностью описаны лишь конечные группы конечного типа, а (конечномерные) представления бесконечных колчанов и бесконечных частично упорядоченных множеств тривиальным образом сводиться к конечному случаю.

В этой статье рассматриваются (конечномерные) представления полугрупп, порождённых идемпотентами с частичным нулевым умножением. Мы устанавливаем связь между бесконечностью типа и бесконечностью порядка для таких полугрупп.

1. Формулировка основных результатов. Мы рассматриваем полугруппы с нулем, которые порождены элементами e_i и задаются определяющими соотношениями $e_i^2 = e_i$ для всех i и некоторыми соотношениями вида $e_i e_j = 0$.

Дадим точные определения.

Пусть I — (конечное или бесконечное) множество, не содержащее элемента 0, и J — подмножество в $I \times I$ без диагональных элементов (т. е. без элементов вида (i,i)). Обозначим через $S(I,J)$ полугруппу с образующими элементами e_i, где $i \in I \cup 0$, и следующими определяющими соотношениями:

1) $e_0 = 0$;

2) $e_i^2 = e_i$ для любого $i \in I$;

3) $e_i e_j = 0$ для любой пары $(i,j) \in J$.

Множество всех таких полугрупп обозначим через $\mathcal{I}$.

В этой статье мы изучаем конечномерные представления полугрупп из $\mathcal{I}$ над произвольным полем k.

Говорят, что полугруппа имеет конечный (представленческий) тип над k, если число ее неразложимых представлений над k конечно (с точностью до эквивалентности); в противном случае говорят, что S имеет бесконечный тип над k. Далее, будем говорить, что полугруппа имеет ограниченный тип (над k), если размерности ее неразложимых представлений ограничены сверху; в противном случае будем говорить, что полугруппа имеет неограниченный тип (над k).

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякая бесконечная полугруппа $S(I, J)$ имеет бесконечный тип над произвольным полем k.*

Теорема 2. *Всякая бесконечная полугруппа $S(I, J)$, где I — конечное множество, имеет неограниченный тип над произвольным полем k.*

2. Критерий конечности для полугрупп $S(I, J)$. Сопоставим каждой полугруппе $S = S(I, J)$ (или, что то же самое, паре (I, J)) следующий ориентированный граф $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ с множеством вершин Λ_0 и множеством стрелок Λ_1: $\Lambda_0 = \mathcal{E}(I) = \{e_i \,|\, i \in I\}$, а Λ_1 состоит из стрелок $e_i \to e_j$, где (i, j) пробегает множество J. Обозначим этот граф через $\Lambda(I, J) = \Lambda(S)$.

Однако, в дальнейшем более важную роль будет играть ориентированный граф $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}(I, J) = \overline{\Lambda}(S)$ с множеством вершин $\overline{\Lambda}_0$ и множеством стрелок $\overline{\Lambda}_1$, который определяется следующим образом: $\overline{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, а $e_i \to e_j$ принадлежит

$\overline{\Lambda}_1$ тогда и только тогда, когда $e_i \to e_j$ не принадлежит Λ_1 и при этом $i \neq j$.

Поскольку оба графа не содержат кратных стрелок, то стрелку $i \to j$ будем также обозначать через (i, j); заметим еще, что эти графы не содержат петель.

Очевидно, что полугруппа S однозначно восстанавливается по каждому из введенных ориентированных графов.

Теорема 3. *Полугруппа $S = S(I, J)$ является конечной тогда и только тогда, когда I — конечное множество и граф $\overline{\Lambda}(S)$ не содержит ориентированных циклов.*

Очевидно, что полугруппа $S(I, J)$ является бесконечной, если бесконечным является множество I. Строгое доказательство следует из того, что ее гомоморфным образом является бесконечная полугруппа, состоящая из всех (бесконечных) диагональных $I \times I$-матриц ранга 1, ненулевые элементы которых являются единичными.

Пусть I конечно и граф $\overline{\Lambda}(S)$ не имеет ориентированных циклов. Покажем, что в этом случае полугруппа S конечна.

Напомним, что через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(I)$ мы обозначаем множество $\{e_i \mid i \in I\}$.

Рассмотрим в S некоторый элемент $x = x_1 x_2 \dots x_m$, где $x_i \in \mathcal{E}$. Очевидно, что $x = 0$, если (x_i, x_{i+1}) не является стрелкой в графе $\overline{\Lambda}(S)$ (для некоторого $1 \leq i < m$). Значит, чтобы элемент x не было нулевым, необходимо, чтобы в графе $\overline{\Lambda}(S)$ существовал ориентированный путь из вершины x_1 в вершину x_m, проходящий через вершины $x_2, \dots, x_{m-1}$; при этом элементы $x = x_1 x_2 \dots x_m$ попарно различны (поскольку граф $\overline{\Lambda}(S)$ не имеет ориентированных циклов). Отсюда следует, что число ненулевых слов конечно, причем $|S| \leq 1 + |\overline{\Lambda}_0| + |\overline{\Lambda}_1| + |P|$, где P обозначает (конечное) множество всех ориентированных путей в $\overline{\Lambda}(S)$

длины $r \geq 2$ (слагаемому 1 соответстует нулевой элемент полугруппы).

Итак, доказано, что полугруппа S конечна.

Заметим, что на самом деле в последней формуле имеет место равенство.

Чтобы доказать указанный факт, нужно показать, что элемент $x = x_1 x_2 \ldots x_m$ является ненулевым всякий раз, когда в графе $\overline{\Lambda}$ существует ориентированный путь из вершины x_1 в вершину x_m, проходящий через вершины

$$x_2, \ldots, x_{m-1}.$$

Мы докажем это с помощью рассмотрения матричных представлений. Матрицу размера $m \times m$, в которой на месте (i, j) стоит единичный элемент, а на остальных местах — нулевые элементы, будем обозначать через $E_{ij}(m)$.

Рассмотрим следующее матричное $M = (M(x) \mid x \in S)$ представление полугруппы S над произвольным фиксированным полем k:

$$M(x_1) = E_{11}(m) + E_{12}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(x_2) = E_{22}(m) + E_{23}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

. . . .

$$\begin{aligned} M(x_{m-1}) &= E_{m-1,m-1}(m) + \\ &+ E_{m-1,m}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$M(x_m) = E_{mm}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и $M(e_i) = 0$ для любого $e_i \neq x_1, x_2, \dots, x_m$ (в том числе $M(e_0) = 0$).

Заметим, что поскольку граф $\overline{\Lambda}(S)$ не содержит ориентированных циклов, то $x_i x_j = 0$ всякий раз, когда $i > j$. Кроме того, могут выполняться равенства $x_i x_j = 0$ для некоторых (и даже всех) i и j, таких, что $j > i + 1$. Но поскольку, как легко видеть, $[M(x_i)]^2 = M(x_i)$ для любого i и $M(x_i)M(x_j) = 0$ для любых i и j, таких, что либо $j > i + 1$, либо $i > j$, то указанное отображение $\{e_i \,|\, i \in I \cup 0\} \to M_m(k)$ действительно задает представление полугруппы S.

Так как

$$M(x) = M(x_1 x_2 \dots x_m) = M(x_1)M(x_2)\dots M(x_m) =$$

$$= E_{1m}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то $x_1 x_2 \dots x_m \neq 0$ (иначе $M(e_0) = M(0) \neq 0$, что противоречит определению представления M).

Продолжаем доказательство теоремы 3.

Нам осталось доказать, что в случае, когда I конечно и граф $\overline{\Lambda}(S)$ содержит ориентированных цикл, полугруппа S является бесконечной.

Зафиксируем в графе $\overline{\Lambda}(S)$ ориентированный цикл:

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{m-1}, x_m), (x_m, x_1),$$

где $m \geq 2$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Доказательство будем проводить тем же методом, что и доказательство равенства

$$|S| = 1 + |\overline{\Lambda}_0| + |\overline{\Lambda}_1| + |P|,$$

(см. выше).

Рассмотрим следующее $T = (T(x) \,|\, x \in S)$ представление полугруппы S над произвольным фиксированным полем k (используя введенные выше обозначения для матриц): $T(e_i) = 0$ для любого $e_i \neq x_1, x_2, \dots, x_m$ (в том числе $T(e_0) = 0$),

$$T(x_1) = M(x_1),$$

$$T(x_2) = M(x_2), \dots, T(x_{m-1}) = M(x_{m-1})$$

и

$$T(x_m) = E_{mm}(m) + cE_{m1}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c \neq 0$ — фиксированный элемент поля k, не являющийся корнем из единицы (тогда степени $c, c^2, c^3, \dots$ элемента c попарно различны). Поскольку, как легко видеть, $[T(x_i)]^2 = T(x_i)$ для любого i и $T(x_i)T(x_j) = 0$ для любых i и j, кроме $j = i$ и $j = i+1$ (при этом $m+1$ отождествляется с 1), то указанное отображение

$$\{e_i \mid i \in I \cup 0\} \longrightarrow M_m(k)$$

действительно задает представление полугруппы S.

Положим $x = x_1 x_2 \dots x_m$. Поскольку

$$T(x) = T(x_1 \dots x_m) = T(x_1) \dots T(x_m) = cE_{11}(m) + E_{1m}(m),$$

то

$$[T(x)]^s = c^s E_{11}(m) + c^{s-1} E_{1m}(m)$$

для любого натурального s, то в силу выбора элемента $c \in k$ матрицы $T(x), [T(x)]^2, [T(x)]^3, \dots,$ попарно различны. Следовательно элементы $x, x^2, x^3, \dots,$ полугруппы S попарно различны и значит S — бесконечная полугруппа.

Теорема 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Предположим, что полугруппа $S = S(I, J)$ является бесконечной.

Если множество I бесконечное, то (бесконечная) полугруппа $S(I, J)$ имеет следующее бесконечное семейство

$$\{T_j \mid j \in I\}$$

неразложимых попарно неэквивалентных представлений: $T_j(e_i) = 0$ для $i \neq j$ и $T_j(e_j) = 1$ $(i \in I \cup 0)$.

Будем теперь предполагать, что множество I конечное.

В силу теоремы 3 граф $\overline{\Lambda}(S)$ содержит ориентированный цикл. Зафиксируем среди таких циклов некоторый цикл Γ наименьшей длины, состоящий из стрелок

$$(p_1, p_2),\ (p_2, p_3),\ \ldots,\ (p_{m-1}, p_m),\ (p_m, p_1),$$

где $m \geq 2$. В силу выбора цикла Γ все его вершины и стрелки попарно различны и между вершинами $p_1, p_2, \ldots, p_m$ нет иных стрелок, кроме тех, что принадлежат циклу Γ. Это означает, что $e_{p_i} e_{p_j} = 0$, если $i \neq j$ и

$$(i, j) \neq (p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_{m-1}, p_m), (p_m, p_1).$$

Заметим, что для подполугруппы S' полугруппы

$$S = S(I, J),$$

порождённой образующими $e_0, p_1, \ldots, p_m$, граф $\overline{\Lambda}(S')$ совпадает с Γ.

Поскольку любое представление подполугруппы S' продолжается естественным образом до представления полугруппы $S = S(I, J)$ (образующему элементу $x \notin S'$ сопоставляется нулевая матрица), то достаточно показать, что бесконечный тип имеет полугруппа S'.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что бесконечный тип имеет полугруппа S_m $(m > 1)$, состоящая из образующих элементов $e_0, e_1, \ldots, e_m$ и соотношений $e_0 = 0$, $e_i e_j = 0$, если $i \neq j$ и

$$(i, j) \neq (1, 2), (2, 3), \ldots, (m - 1, m), (m, 1).$$

Пусть сначала $m = 2$.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_2:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c} a & 1 \\ \hline a - a^2 & 1 - a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2$, такая, что выполняются матричные равенства $M_a(e_1)T = TM_b(e_1)$, $M_a(e_2)T = TM_b(e_2)$ или

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} a & 1 \\ \hline a - a^2 & 1 - a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right) &= \\ = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right)&\left(\begin{array}{c|c} b & 1 \\ \hline b - b^2 & 1 - b \end{array}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Из равенства (66) следует, что $t_{12} = t_{21} = 0$. Тогда равенство (67) эквивалентно следующей системе (скалярных) равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{11} = t_{22}; \\ (a - a^2)t_{11} = t_{22}(b - b^2); \\ (1 - a)t_{22} = t_{22}(1 - b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{11} = t_{22}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & 0 \\ \hline 0 & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Из приведенного доказательства следует, что матрица T является скалярной даже в том случае, когда $a = b$, причем без требования невырожденности. Отсюда следует, что алгебра эндоморфизмов представления M_a является локальной и значит это представление неразложимо.

Таким образом, полугруппа S_2 имеет бесконечный тип.

Пусть теперь $m = 3$.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_3:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a + a^2 & a - a^2 & 1 - a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2, 3$, такая, что выполняются матричные равенства

$$M_a(e_1)T = TM_b(e_1),$$

$$M_a(e_2)T = TM_b(e_2),$$

$$M_a(e_3)T = TM_b(e_3),$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \tag{68}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a+a^2 & a-a^2 & 1-a \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -b & b & 1 \\ \hline -b+b^2 & b-b^2 & 1-b \end{array} \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Перемножая матрицы в равенстве (68), получаем равенство

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline t_{21} & 0 & 0 \\ \hline t_{31} & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix},$$

из которого имеем, что $t_{12} = t_{13} = t_{21} = t_{31} = 0$. Подставляя это в равенство (69), получим равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

которое после умножения матриц имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & 0 \\ \hline 0 & t_{32} & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего равенства следует, что

$$t_{11} = t_{22} \qquad \text{и} \qquad t_{23} = t_{32} = 0.$$

Таким образом, матричное равенство (70) имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a+a^2 & a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -b & b & 1 \\ \hline -b+b^2 & b-b^2 & 1-b \end{array}\right),$$

или (после перемножения матриц)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -at_{11} & at_{11} & t_{33} \\ \hline (-a+a^2)t_{11} & (a-a^2)t_{11} & (1-a)t_{33} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -t_{11}b & t_{11}b & t_{11} \\ \hline t_{33}(-b+b^2) & t_{33}(b-b^2) & t_{33}(1-b) \end{array}\right).$$

Последнее равенство эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{11} = t_{33}; \\ (a - a^2)t_{11} = t_{33}(b - b^2); \\ (1 - a)t_{33} = t_{33}(1 - b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{11} = t_{33}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Далее доказательство аналогично случаю $m = 2$.

Рассмотрим, наконец, общий случай.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_m:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_3) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$M_a(e_{m-1}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_m) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m (a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2, \dots, m$, такая, что выполняются матричные равенства

$$M_a(e_1)T = TM_b(e_1),$$

$$M_a(e_2)T = TM_b(e_2),$$

$$M_a(e_3)T = TM_b(e_3), \dots, M_a(e_m)T = TM_b(e_m)$$

или следующие матричные равенства:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

. . . .

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m (a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m (a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Занумеруем эти равенства соответственно

$$(6),\ (7),\ (8), \dots,\ (m+5).$$

Перемножая матрицы в равенстве (6), получаем равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline t_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

из которого имеем, что

$$\begin{cases} t_{12} = 0, \dots, t_{1m} = 0; \\ t_{21} = 0, \dots, t_{m1} = 0. \end{cases}$$

Подставляя это в равенство (7), получим равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

которое, после умножения матриц, имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего равенства вытекают следующие равенства:

$$\begin{cases} t_{22} = t_{11}; \\ t_{23} = 0, \ldots, t_{2m} = 0; \\ t_{32} = 0, \ldots, t_{m2} = 0. \end{cases}$$

Подставляя эти скалярные равенства в матричное равенство (8), получаем равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

или (после перемножения матриц) равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & \ldots & t_{3m} \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & \ldots & t_{3m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{43} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

которое эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{cases} t_{33} = t_{11}; \\ t_{34} = 0, \ldots, t_{3m} = 0; \\ t_{43} = 0, \ldots, t_{m3} = 0. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс (рассматривая матричные равенства $(9), \ldots, (m+4)$), получим в результате, что матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} & \ldots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t_{mm} \end{array}\right).$$

Тогда уравнение $(m+5)$ будет иметь следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a t_{11} & \ldots & -a t_{11} & a t_{11} & t_{mm} \\ \hline (-1)^m (a-a^2) t_{11} & \ldots & -(a-a^2) t_{11} & (a-a^2) t_{11} & (1-a) t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m t_{11} b & \ldots & -t_{11} b & t_{11} b & t_{11} \\ \hline (-1)^m t_{mm} (b-b^2) & \ldots & -t_{mm} (b-b^2) & t_{mm} (b-b^2) & t_{mm} (1-b) \end{array}\right).$$

Последнее матричное равенство эквивалентно следующей системе скалярных равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{mm} = t_{11}; \\ (a - a^2)t_{11} = t_{mm}(b - b^2); \\ (1 - a)t_{mm} = t_{mm}(1 - b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{mm} = t_{11}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Дальше доказательство проводится так же, как и для $m = 2$.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Теорема 2 доказывается по той же схеме, что и теорема 1. Различие состоит лишь и том, что в определении представлений M_a в матрице $M_a(e_m)$ вместо элемента a следует взять клетку Жордана $J_s(a)$ размера $s \times s$ с собственным числом a, где s — любое (фиксированное) натуральное число. При этом, естественно, нулевые и единичные элементы матриц $M_a(e_1), M_a(e_2), \dots, M_a(e_m)$ нужно заменить соответственно на нулевые и единичные матрицы размера $s \times s$. Отметим еще, что в конце доказательств (при $m = 2, 3$ и в общем случае) вместо равенства $at_{11} = t_{11}b$ будем иметь матричное равенство $J_s(a)T_{11} = T_{11}J_s(b)$, из которого следует (в силу $a \neq b$), что $T_{11} = 0$.

Список литературы

[1] *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1977. — **71**. — С. 24 – 41.

[2] *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103,309.

[3] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.

[4] *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 45-106

И. Ю. Власенко

Институт математики НАН Україні
E-mail: `vlasenko@imath.kiev.ua`

Е. А. Полулях

Институт математики НАН Україні
E-mail: `polukyah@imath.kiev.ua`

Пример неблуждающего множества, не имеющего рекуррентных и предельных точек[1]

Строятся примеры гладких потоков и каскадов на бесконечномерных многообразиях, таких, что все их точки неблуждающие, но множество их предельных, а тем более рекуррентных точек пусто.

1. Вступление

Как известно, для типичной C^1-гладкой динамической системы ее множество неблуждающих точек совпадает с множеством предельных точек и с замыканием множества рекуррентных точек. Поэтому примеры гладких динамических систем с отличающимся поведением не так часты.

В этой работе строятся примеры гладких динамических систем на компактных многообразиях с различающимися граничным, неблуждающим и цепно-рекуррентным множествами, а также пример динамической системы, такой,

[1]Работа выполнена в рамках целевой программы НАН Украины “Современные методы иследования математических моделей в задачах природоведения и общественных науках” НИР № 0107U00233

что все ее точки неблуждающие, но множество ее предельных, а тем более рекуррентных точек пусто. Надеемся, что подобные примеры, кроме новизны, послужат хорошей иллюстрацией различия свойств предельных и неблуждающих точек. Для полноты изложения, не претендуя на новизну, здесь также приводится простой пример потока, у которого все точки цепно-рекуррентны, но нет неблуждающих точек (пример 2.4).

Множество неблуждающих точек, не являющихся предельными, изучалось в работах авторов [4, 14]. Используя разработанную там теорию, мы строим последовательность компактных многообразий все возрастающей размерности и динамических систем на них, таких, что у каждой системы — элемента этой последовательности — множество неблуждающих точек состоит из подмногообразия меньшей размерности, а множество предельных точек одно и то же и состоит из двух точек. Полученное в индуктивном пределе пространство (того же класса, что и $\mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{T}^\infty$, $\mathbb{CP}^\infty$) является некомпактным неполным метрическим пространством. Полученные в индуктивном пределе динамические системы на этом пространстве — поток и каскад — обладают следующим интересным свойством: все их точки являются неблуждающими, но не являются предельными (кроме двух точек, которые можно выколоть — пространство при этом топологически не ухудшится и останется некомпактным неполным метрическим пространством).

Полученный таким образом пример позволяет положительно ответить на поставленный в книге [7] вопрос о существовании потоков без блуждающих и устойчивых по Пуассону траекторий, в частности, дает пример гладкого потока на неполном метрическом пространстве с центром

Биркгофа, не совпадающим с замыканием множества рекуррентных точек.

2. Предварительные сведения

2.1. **Множества траекторий.** Пусть X — топологическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм.

Обозначим через $O_f(x)$ траекторию точки x под действием f, т.е. множество $\{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}\}$. Пусть также

$$O_f^+(x) = \{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{и} \quad O_f^-(x) = \{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}^-\}$$

обозначают положительную и отрицательную полутраектории точки x соответственно.

2.1.1. *Множество неблуждающих точек динамической системы.*

Определение 2.1. *Точка $x \in X$ называется **неподвижной (фиксированной)** точкой f если $f(x) = x$. Множество всех неподвижных точек f обозначим через* $\mathrm{Fix}(f)$.

Определение 2.2. *Точка x называется **периодической** периода n для гомеоморфизма f, если*

$$f^n(x) = x$$

и

$$f^k(x) \neq x \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Множество всех периодических точек f обозначается через $\mathrm{Per}(f)$.

Для каждой точки $x \in X$ определим ее *ω-предельное* $\omega_f(x)$ и *α-предельное* $\alpha_f(x)$ множества относительно f с помощью следующих формул:

$$\omega_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \text{и} \qquad \alpha_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^{-n}(x)}.$$

Другими словами, $y \in \omega_f(x)$ тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{i\to\infty} f^{N_i}(x) = y.$$

Аналогично, $y \in \alpha_f(x)$ тогда и только тогда, для некоторой последовательности $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, такой, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{i\to\infty} f^{-N_i}(x) = y.$$

Ясно, что $\omega_f(x) = \alpha_{f^{-1}}(x)$.

Зачастую, когда понятно о каком гомеоморфизме идет речь, мы будем опускать индекс f и обозначать множества $\omega_f(x)$ и $\alpha_f(x)$ через $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ соответственно.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Множества $\alpha(x)$ и $\omega(x)$ — замкнуты, инвариантны относительно f и содержащиеся в замыкании $\overline{O_f(x)}$ орбиты точки x. В частности, если $y \in \omega(x)$, то*

$$\alpha(y) \cup \omega(y) \ \subset \ \overline{O_f(y)} \ \subset \ \omega(x).$$

Обозначим

$$\mathrm{Lim}_-(f) = \bigcup_{x\in M} \alpha(x), \qquad \mathrm{Lim}_+(f) = \bigcup_{x\in M} \omega(x),$$

$$\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_-(f) \cup \mathrm{Lim}_+(f).$$

Множество $\mathrm{Lim}(f)$ называется *предельным множеством* f.

Определение 2.3. *Точка x называется* ***рекуррентной*** *для гомеоморфизма f, если $x \in \alpha(x) \cup \omega(x)$.*

Если $x \in \alpha(x)$ то мы будем называть эту точку ***α-рекуррентной*** *или α-рекуррентной. Аналогично определяется* ***ω-рекуррентность****.*

Заметим, что возможен случай, когда $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$. Такая точка является одновременно α- и ω-рекуррентной.

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ и $\mathrm{Rec}_-(f)$ соответственно множества всех ω- и α-рекуррентных точек f. Их объединение

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cup \mathrm{Rec}_-(f)$$

является множеством всех *рекуррентных* точек f. Очевидно, что

$$\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f).$$

Следующее определение было дано Биркгофом в [8].

Определение 2.4. *Точка $x \in X$ называется* ***блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что*

$$f^m(U) \cap U = \varnothing \quad \text{для всех } m > 0.$$

Все остальные точки называют ***неблуждающими****. Таким образом, точка $x \in X$ является неблуждающей для f, если для любой ее окрестности V найдется такое целое число $m \in \mathbb{Z}$, что $f^m(V) \cap V \neq \varnothing$.*

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. Поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью, то $W(f)$ открыто в X.

Множество неблуждающих точек f обозначается $\Omega(f)$. Оно замкнуто в X как дополнение к $W(f)$.

Так как периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

Пример 2.1. Всякая *изолированная* точка пространства X является либо периодической, либо блуждающей.

Лемма 2.2. *Если X хаусдорфово пространство, то число m в определении 2.4 неблуждающей точки можно выбрать сколь угодно большим по модулю.*

Доказательство. Пусть для некоторой окрестности V неблуждающей точки $x \in X$ найдется только конечное множество чисел $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таких, что

$$f^{m_i}(V) \cap V \neq \varnothing.$$

Мы получим противоречие, показав, что тогда x неблуждающая точка для f.

Отметим, что x не может быть периодической, так как если p — период x, то $x \in f^{pk}(V) \cap V \neq \varnothing$ для каждого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Далее, так как X хаусдорфово, то точки

$$x,\ f^{m_1}(x),\ \ldots,\ f^{m_k}(x)$$

имеют попарно непересекающиеся окрестности

$$U_0, U_1, \ldots, U_k,$$

соответственно. Рассмотрим следующую окрестность

$$U = V \bigcap \bigcap_{i=0}^{k} f^{-m_i}(U_i)$$

точки x.

Мы утверждаем, что тогда $f^k(U) \cap U = \varnothing$ для всех $k \neq 0$. Действительно, если $k \notin \{m_1, \ldots, m_k\}$, то по предположению об окрестности V

$$f^k(U) \cap U \subset f^k(V) \cap V = \varnothing.$$

Если же $k = m_i$, то

$$f^{m_i}(U) \cap U \subset f^{m_i} f^{-m_i}(U_i) \cap U_0 = U_i \cap U_0 = \varnothing.$$

Следовательно, x — блуждающая точка для f. $\square$

Отметим, что неблуждающее множество, в отличие от множества периодических точек, зависит от того, на каком пространстве действует динамическая система.

Утверждение 2.1. *Пусть* (Y, g) *— динамическая система и* Y_1 *— ее инвариантное подпространство. Положим* $g_1 = g|_{Y_1}$. *Тогда* $\Omega(g_1) \subseteq \Omega(g)$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что для каждого $y \in Y_1$ все открытые окрестности точки y в пространстве Y_1 — это в точности пересечения открытых окрестностей точки y в пространстве Y с подпространством Y_1. □

Заметим, что f-инвариантного подпространства $A \subseteq X$ выполнено неравенство $\Omega(f|_A) \subseteq \Omega(f)$, но при этом множества $\Omega(f|_A)$ и $\Omega(f)$, вообще говоря, не обязаны совпадать, даже если $\Omega(f) \subseteq A$.

Это замечание приводит к понятию центра динамической системы, которое было введено Биркгофом в [8].

2.1.2. *Центр Биркгофа динамической системы.* Рассмотрим динамическую систему (X, f). Наивное определение ее центра Биркгофа состоит в том, чтобы максимально проитерировать конструкцию неблуждающего множества. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$ и по индукции определим

$$\Omega_{n+1}(f) = \Omega(f|_{\Omega_n(f)}).$$

Пересечение полученной последовательности вложенных друг в друга замкнутых инвариантных множеств

$$\Omega(f) = \Omega_1(f) \supset \Omega_2(f) \supset \cdots \supset \Omega_n(f) \supset \cdots$$

обозначим через $\Omega_\omega(f)$. Используя трансфинитную индукцию можно определить множества $\Omega_\lambda(f)$ для всех порядковых чисел λ. Тогда, согласно лемме Цорна, убывающая цепочка множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$ должна остановиться на некотором счетном ординале α, для которого

$$\Omega_\gamma(f) = \Omega(f|_{\Omega_\gamma(f)}).$$

Полученное замкнутое инвариантное множество и называется *центром* (*Биркгофа*). Будем обозначать его через $BC(f)$.

Опишем построение $BC(f)$ более детально.

База индукции. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$.

Шаг индукции. Пусть λ — некоторое порядковое число. Предположим, что множества $\Omega_\alpha(f)$ уже определены для всех ординалов $\alpha < \lambda$.

Для того, чтобы определить множество $\Omega_\lambda(f)$, рассмотрим два случая:

(i) λ имеет предшествующий элемент $(\lambda-1) < \lambda$ в классе Ξ всех ординалов. Это означает, что для любого $\beta \in \Xi$ либо $\beta \leq (\lambda - 1)$, либо $\beta \geq \lambda$.

Положим

$$\Omega_\lambda(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_{\lambda-1}(f)}\right).$$

Тогда, в частности, имеем, что $\Omega_{n+1}(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_n(f)}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(ii) λ не имеет непосредственно предшествующего ему порядкового числа. Тогда положим

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \Omega_\alpha(f)\ ,$$

в частности, $\Omega_\omega(f) = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n(f)$.

Таким образом, мы получили набор замкнутых инвариантных подмножеств $\{\Omega_\lambda(f)\}_{\lambda\in\Xi}$ пространства X. При этом, по построению, соотношения

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{и} \quad \alpha \leq \beta$$

равносильны. Таким образом, порядок, индуцированный отношением включения на семействе множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$, является полным порядком.

Лемма 2.3. *Существует порядковое число γ такое, что*

$$\Omega_{\gamma+1}(f) = \Omega_\gamma(f)$$

(следовательно, и $\Omega_\alpha(f) = \Omega_\gamma(f)$ для всех $\alpha > \gamma$).

Доказательство. Заметим, что для каждого ординала λ существует порядковое число $(\lambda+1)$, следующее непосредственно за λ. Действительно, пусть $A_\lambda = \{\alpha \in \Xi \mid \alpha > \lambda\}$. Тогда A_λ вполне упорядочено и содержит наименьший элемент $\lambda + 1$. Поэтому для каждого ординала α либо $\alpha \leq \lambda$, либо $\alpha \geq \lambda + 1$.

Предположим, что $\Omega_{\lambda+1}(f) \subsetneqq \Omega_\lambda(f)$ для всех $\lambda \in \Xi$.

Обозначим

$$B_\lambda = \Omega_\lambda(f) \setminus \Omega_{\lambda+1}(f), \qquad \lambda \in \Xi.$$

Тогда $B_\lambda \cap B_{\lambda'} = \varnothing$ для $\lambda \neq \lambda' \in \Xi$. Воспользуемся теоремой Цермело (см. [12, 13]) и выберем из каждого B_λ по точке $x_\lambda \in B_\lambda$, $\lambda \in \Xi$ (напомним, что $B_\lambda \in 2^X$ для всех $\lambda \in \Xi$). Множество всех $\xi < \alpha$, $\xi \in \Xi$, обозначим через $\Gamma(\alpha)$.

Тогда для каждого $\alpha \in \Xi$ получим инъективное отображение $\Phi_\alpha : \Gamma(\alpha) \to X$, заданное формулой: $\Phi_\alpha(\beta) = x_\beta$.

Пусть $\aleph_\mu$ — кардинальное число, соответствующее мощности множества X. По определению,

$$\aleph_\alpha = \mathrm{card}(\Gamma(\omega_\alpha)) \ ,$$

где ω_α — порядковое число, соответствующее предельному порядковому типу.

Напомним (см. [13]), что порядковый тип ξ вполне упорядоченного множества Z называется *предельным*, если он является наименьшим порядковым числом среди всех порядковых чисел, соответствующих всем возможным упорядочениям множества Z, превращающим его во вполне упорядоченное множество. (Предельные порядковые типы принято индексировать по возрастанию элементами Ξ.)

Таким образом получаем неравенство

$$\operatorname{card} X = \aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} = \operatorname{card}(\Gamma(\omega_{\mu+1})) \ ,$$

которое, очевидно, противоречит существованию инъективного отображения

$$\Phi_{\omega_{\mu+1}} : \Gamma(\omega_{\mu+1}) \to X \ .$$

Следовательно, найдется такое $\gamma \in \Xi$, что

$$B_\gamma = \Omega_\gamma(f) \setminus \Omega_{\gamma+1}(f) = \varnothing.$$

Но тогда $\Omega_\gamma(f) = \Omega_{\gamma+1}(f)$. $\square$

Используя лемму, дадим следующее определение.

Определение 2.5. *Пусть $\gamma \in \Xi$ — наименьший ординал, удовлетворяющий утверждению леммы 2.3 (он существует, так как Ξ вполне упорядочено).*

Замкнутое инвариантное подмножество

$$BC(f) = \Omega_\gamma(f)$$

динамической системы (X, f) называется ее ***центром****, порядковое число γ называется* ***глубиной центра*** *динамической системы (X, f).*

Замечание 2.1. Применяя теорему Бэра – Хаусдорфа (см. [1]) для топологических пространств со счетной базой (в частности, для сепарабельных метрических пространств), легко показать, что глубина центра произвольной динамической системы с таким фазовым пространством является счетным трансфинитом.

Заметим, что множество рекуррентных точек всегда содержится в центре Биркгофа. Поэтому, если множество рекуррентных точек всюду плотно в неблуждающем множестве, то стабилизация наступает уже на первом шаге.

2.1.3. *Цепно-рекуррентные множества.* Такие множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Они введены Конли [9] для описания динамики типичных гомеоморфизмов и оказались удобным способом для описания динамики произвольных систем.

Определение 2.6. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение метрического пространства (X, d) в себя и $\varepsilon > 0$. Непустая конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из X называется* ε**-цепью**, *относительно f, если*

$$d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$$

для всех $i = 1, \ldots, n$.

Будем говорить, что такая ε-цепь *начинается* в x_0, *заканчивается* в x_n и имеет длину n.

Обозначим через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ множество концов всевозможных ε-цепей с началом в x. Очевидно, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ каждая ε-цепь от x к y также является ε'-цепью, поэтому $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f) \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$ при $\varepsilon < \varepsilon'$. В действительности верно более сильное утверждение:

Лемма 2.4. *Каждое множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ открыто и*

$$\overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)} \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon < \varepsilon'.$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ и

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}, y$$

— ε-цепь с началом в x и концом в y. Так как

$$d(f(x_{n-1}), y) < \varepsilon,$$

то $d(f(x_{n-1}), y) + \delta < \varepsilon$ для некоторого достаточно малого $\delta > 0$. Поэтому для произвольной точки y' из δ-окрестности точки y последовательность

$$x_0 = x, \;\; x_1, \;\; \ldots, \;\; x_{n-1}, \;\; y'$$

является ε-цепью от x к y', т.е. $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$. Таким образом множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ содержит δ-окрестность точки y и поэтому оно открыто.

Предположим, что $y \in \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$. Тогда найдется такая точка $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$, что $d(y', y) < \varepsilon' - \varepsilon$. Пусть

$$x, \;\; x_1, \;\; \ldots, \;\; x_{n-1}, \;\; y'$$

произвольная ε-цепь с началом в x и концом в y'. Тогда

$$x, \;\; x_1, \;\; \ldots, \;\; x_{n-1}, \;\; y$$

является ε'-цепью между x и y. Действительно,

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon < \varepsilon'$$

и

$$d(f(x_{n-1}), y) < d(f(x_{n-1}), y') + d(y', y) < \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon'.$$

Следовательно, $y \in \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$. $\square$

Обозначим

$$\mathcal{C}(x, f) \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f).$$

Из леммы 2.4 вытекает, что $\mathcal{C}(x, f) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$, а значит $\mathcal{C}(x, f)$ замкнуто в X.

Определение 2.7. *Точка $x \in X$ называется **цепно-рекуррентной** для f, если $x \in \mathcal{C}(x, f)$. Множество цепно-рекуррентных точек f обозначается через $\mathcal{C}(f)$.*

Несложно видеть, что каждая неблуждающая точка является цепно-рекуррентной, поэтому имеют место следующие включения:

$$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f).$$

Лемма 2.5. *Если $f : X \to X$ равномерно непрерывный гомеоморфизм, то $\mathcal{C}(f)$ замкнуто и $\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. В частности, если f^{-1} также равномерно непрерывен, то $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. (1) Вначале докажем, что

$$\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f).$$

Действительно, равномерная непрерывность f означает, что для произвольного $\omega > 0$ найдется такое $\delta(\omega) > 0$, что из $d(x, y) < \delta(\omega)$ вытекает, что $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Пусть $x \in \mathcal{C}(f^{-1})$ и $\omega > 0$. Необходимо найти ω-цепь относительно f с началом и концом в x. По определению, существует $\delta(\omega)$-цепь относительно f^{-1} с началом и концом в x:

$$x = x_0,\ \ x_1,\ \ \ldots,\ \ x_{n-1},\ \ x_n = x,$$

т.е. $d(f^{-1}(x_i), x_{i+1}) < \delta(\omega)$. Но тогда

$$d(f \circ f^{-1}(x_i), f(x_{i+1})) \;=\; d(f(x_{i+1}), x_i) \;<\; \omega.$$

Таким образом, обратная последовательность

$$x = x_n,\ \ x_{n-1},\ \ \ldots,\ \ x_1,\ \ x_0 = x$$

является искомой ω-цепью относительно f.

(2) Покажем теперь, что $\mathcal{C}(f)$ замкнуто. Пусть x — предельная точка $\mathcal{C}(f)$ и $\varepsilon > 0$. Нужно построить ε-цепь относительно f с началом и концом в x.

Выберем произвольным образом три числа $\omega, \delta, \varepsilon' > 0$ так, чтобы

$$\omega + \varepsilon' < \varepsilon, \qquad \varepsilon' + \delta < \varepsilon, \qquad \delta < \delta(\omega),$$

где $\delta(\omega)$ — константа в определении равномерной непрерывности f.

Так как x предельная точка для $\mathcal{C}(f)$, то найдется точка $y \in \mathcal{C}(f)$ такая, что $d(x,y) < \delta$. Тогда $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Так как y цепно-рекуррентна для f, то существует ε'-цепь

$$y,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ y$$

с началом и концом в точке $y \in X$ и $d(x,y) < \omega$. Мы утверждаем, что последовательность

$$x,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x$$

является ε-цепью с началом и концом в x. Действительно

$$d(f(x), y_1) \le d(f(x), f(y)) + d(f(y), y_1) < \omega + \varepsilon' < \varepsilon,$$

$$d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon' < \varepsilon, \text{ для } i = 1, \ldots, k-1,$$

$$d(f(y_k), x) \le d(f(y_k), y) + d(y, x) < \varepsilon' + \delta < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Следствие 2.1. *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм метрического компакта X. Тогда $\mathcal{C}(f)$ — замкнутое непустое множество, причем $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Так как X компактно, то $\mathrm{Lim}(f)$, а значит и $\mathcal{C}(f)$, непусты. Замкнутость $\mathcal{C}(f)$ и равенство

$$\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$$

следует из равномерной непрерывности f и f^{-1} согласно лемме 2.5. □

2.2. **Неблуждающее множество корней гомеоморфизмов.** Заметим, что неблуждающее множество может измениться при переходе от гомеоморфизма к его степени. Покажем, что при таком переходе оно не увеличивается.

Лемма 2.6. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g).$$

Обратное включение, вообще говоря, не верно. Примеры итерационно неустойчивых неблуждающих множеств приведены, например, в [10]. Один из приведенных здесь примеров также будет обладать этим свойством.

В работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Предположим, что пространство X хаусдорфово. Тогда для каждого гомеоморфизма $g : X \to X$ и $n \geq 2$ множество $\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$ нигде не плотно в X.*

Было показано, что отсюда достаточно просто следует итерационная устойчивость центра Биркгофа.

Следствие 2.2. *Если $\Omega(g) = X$, то $\Omega(g^n) = \Omega(g) = X$ для всех $n \geq 2$.*

Доказательство. Так как $\Omega(g^n)$ замкнуто, то множество

$$\Omega(g) \setminus \Omega(g^n) = X \setminus \Omega(g^n)$$

открыто в X. Но по теореме 2.1 оно также нигде не плотно в X. Следовательно, $X \setminus \Omega(g^n) = \varnothing$, т.е. $\Omega(g^n) = X$. $\square$

Более слабая форма этого следствия была ранее опубликована в [15].

Для доказательства теоремы 2.1 была разработана теория K-зацепленных точек динамической системы. По сути, определение зацепленных точек является частным случаем определения точек, соединяемых для произвольно малого ε с помощью ε-цепей (см. определение 2.6), когда все сдвиги между траекториями, кроме двух, равны нулю. K-зацепленные точки также, по сути, являются некоторым специальным классом цепно-рекуррентных точек.

Напомним эти определения, поскольку они существенно понадобятся нам для построения и понимания приведенных здесь примеров.

Определение 2.8. *Скажем, что точка x* ***зацеплена*** *с точкой y под действием гомеоморфизма $g : X \to X$, если для любых сколь угодно малых окрестностей V_x и V_y точек x и y соответственно найдется сколь угодно большое по модулю число $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такое, что*

$$g^t\left(V_x\right) \cap V_y \neq \varnothing.$$

Другими словами, g-орбита любой окрестности точки x пересекается с любой окрестностью точки y.

Если при этом число t всегда можно выбрать положительным (отрицательным), то будем называть точку x ***ω-зацепленной (α-зацепленной)*** *с y.*

Пример 2.2. Неблуждающая точка зацеплена сама с собой.

Пример 2.3. Пусть g — диффеоморфизм Морса-Смейла многообразия M и x, y — две периодические точки g. Напомним, что каждая точка, принадлежащая пересечению неустойчивого многообразия $W^u(x)$ точки x и устойчивого многообразия $W^s(y)$ точки y, называется *гетероклинической*. Пусть $\gamma \in W^u(x) \cap W^s(y)$ — гетероклиническая точка. Тогда γ является ω-зацепленной со всеми точками неустойчивого многообразия $W^u(y)$ и α-зацепленной со всеми точками устойчивого многообразия $W^s(x)$.

Этот пример изображен на рис. 1a).

Лемма 2.7. *Предположим, что пространство X хаусдорфово, $g : X \to X$ — гомеоморфизм и пусть*

$$x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n).$$

Тогда для некоторого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ точка x зацеплена с точкой $g^k(x)$ под действием g^n.

Замечание 2.2. Для зацепленности под действием g точек одной орбиты, например x и $g^k(x)$, достаточно требовать, чтобы для произвольной окрестности U точки x нашлось сколь угодно большое по модулю число N такое, что

$$U \cap g^{k-N}(U) \neq \varnothing.$$

2.3. **K-зацепленность.** Пусть $g : X \to X$ гомеоморфизм, $n \geq 2$ и $K = \{k_1, \dots k_l\}$ — конечная последовательность чисел, таких, что каждое $k_i \in \{0, \dots, n-1\}$. Мы допускаем, что некоторые из k_i, возможно даже все, могут совпадать друг с другом.

Определение 2.9. *Скажем, что точка $x \in X$ — **K-зацеплена** под действием гомеоморфизма g^n, если для произвольно малой окрестности U точки x найдутся как угодно большие по модулю числа $N_1, \dots, N_l \in \mathbb{Z}$ такие, что*

$$U \cap g^{k_1 - nN_1}(U) \cap g^{k_2 - nN_2}(U) \cap \dots \cap g^{k_l - nN_l}(U) \neq \varnothing.$$

Замечание 2.3. Таким образом K-зацепленность точки x под действием g^n означает, что x "одновременно зацеплена" со всеми точками $g^{k_1}(x), \dots, g^l(x)$, см. замечание 2.2. Так как числа N_i можно выбирать сколь угодно большими по модулю, то можно также считать, что если $k_i = k_j$ для некоторых $i \neq j$, то $N_i \neq N_j$ и, поэтому, $g^{k_i - nN_i}(U)$ и

$g^{k_j - nN_j}(U)$ представляют собой разные множества. Другими словами, зацепление точки x с точкой $g^{k_i}(x) = g^{k_j}(x)$ производится разными итерациями гомеоморфизма g^n.

Замечание 2.4. Если $0 \in K$, то x зацеплена под действием g^n с собой и, следовательно, является неблуждающей точкой для g^n, т.е. $x \in \Omega(g^n)$.

Лемма 2.8. *Пусть точка* $x \in \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$ *—* K*-зацеплена под действием* g^n*, где*

$$K = \{k_1, \ldots, k_l\}$$

и каждое $k_i = 0, \ldots, n-1$*. Тогда найдется такое*

$$k' \in \{1, \ldots, n-1\},$$

что x *— также* K'*-зацеплена относительно* g^n*, где*

$$K' = \{k_1, \ldots, k_l,\, k',\, k_1 + k',\, \ldots,\, k_l + k'\} \pmod n$$

и все суммы берутся по модулю n*.*

Подчеркнем, что в формулировке леммы $k' \neq 0 \pmod n$.

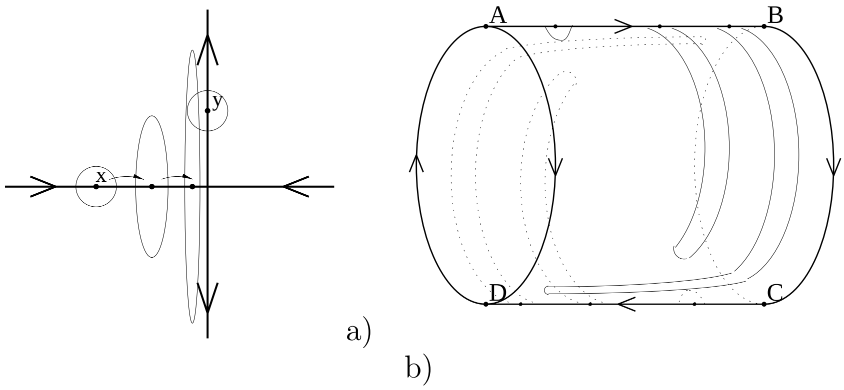


Рис. 1. Примеры зацепленных точек.

На рис. 1b) изображен пример потока на сегменте цилиндра. В этом примере точки отрезка AB зацеплены с точками отрезка CD, и наоборот, точки отрезка CD зацеплены с точками отрезка AB. Появление такого цикла из зацепленных точек приводит к тому, что все точки сегмента являются циклически зацепленными.

Пример 2.4. *Если на рис. 1b) выбросить граничные окружности, то оставшаяся система на открытом цилиндре является простейшим примером потока, у которого нет неблуждающих точек, а все точки цепно-рекуррентны.*

Этот пример является ключом к пониманию дальнейших рассуждений, которые будут использоваться для построения основных примеров данной работы. Именно, из системы можно выделить две части, если разрезать ее по отрезкам AB и CD. Мы получим два диска, один из которых дает зацепление от AB к CD, другой — от CD к AB, см. рис. 2a). На каждом диске отрезки AB и CD зеркально повернуты друг относительно друга, а между ними траектории потока закручены специальным образом, чтобы зацеплять точки соответствующих отрезков. Строго структура потоков на этих дисков описывается с помощью так называемого косого произведение потоков относительно функции на декартовом произведении многообразий, которое вводится в разделе 4.2.

Теперь перекомпонуем эти диски таким образом, чтобы получить пример на другом многообразии. Склеивая диски на рис. 2a), получим большой диск, как на рис. 2b). Если еще дополнительно отождествить противоположные стороны, то получим систему на бутылке Клейна.

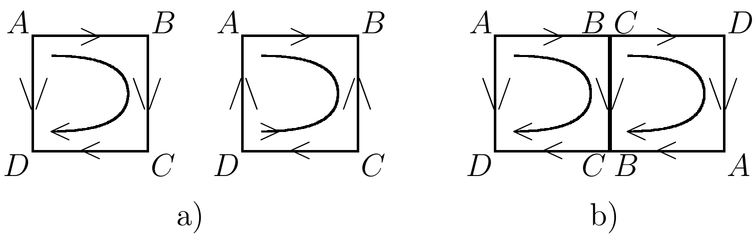


Рис. 2. К описанию примера на цилиндре.

Эту бутылку Клейна можно интерпретировать как результат операции умножения на отрезок с перекручиванием, примененный к окружности ABCD, с последующей склейкой противоположных сторон. (Далее в этой работе выражению “умножение на отрезок с перекручиванием” будет дан точный смысл). При этом цепно-рекуррентные точки окружности ABCD, бывшие ранее не зацепленными, становятся циклически зацепленными.

На рис. 3 изображен следующий шаг: бутылка Клейна умножается на отрезок с перекручиванием, и противоположные бутылки Клейна склеиваются в одну. При этом все точки бутылки Клейна становятся циклически зацепленными, а точки окружности ABCD становятся зацепленными сами с собой, то есть неблуждающими.

Если к полученному многообразию применить эту же конструкцию, то уже его точки станут циклически зацепленными, а все точки бутылки Клейна станут неблуждающими, и т. д. В основных примерах данной работы используется достаточно похожее построение, которое индуктивно продолжается бесконечности. Отличие только в том, что мы получаем неблуждающее множество уже на первом шаге.

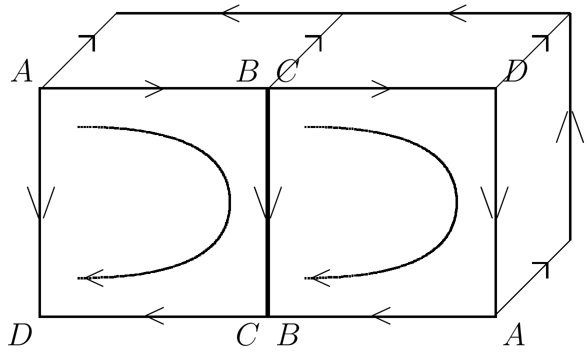


Рис. 3. Надстройка над бутылкой Клейна.

3. Построение примеров.

Наша цель — построить (неполное) метрическое пространство M и гомеоморфизм $F : M \to M$ такие, что $\Omega(F) = M$ и $\mathrm{Rec}(F) = \{a\}$, где $a \in M$ — единственная неподвижная точка динамической системы (M, F).

3.1. **Построение пространства M.** Построим сначала по индукции топологическое пространство M, на котором потом будет задана наша динамическая система.

Построение начнем с единичной окружности комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Зададим на M_1 инволюцию

$$T_1(z) = \bar{z} = \Re(z) - \Im(z), \qquad z \in M_1.$$

Это отображение представляет собой зеркальное отражение окружности относительно вещественной оси. Иначе его можно записать еще и так:

$$T_1(\exp(i\varphi)) = \exp(-i\varphi) \ , \quad \varphi \in [0, 2\pi) \ .$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, на котором задана непрерывная инволюция $T_X : X \to X$.*

Пусть заданы вложение

$$\hat{j} : X \to X \times I \ , \quad \hat{j} : x \mapsto (x, 0) \ , \quad x \in X \ ,$$

и инволюция

$$\widehat{T} : X \times I \to X \times I \ , \quad \widehat{T} : (x, t) \mapsto (x, 1-t) \ , \quad (x, t) \in X \times I \ .$$

Пусть еще заданы разбиение

$$\mathfrak{f} = \bigcup_{\substack{x \in X \\ t \in (0,1)}} \{(x, t)\} \cup \bigcup_{x \in X} \{(x, 1), (T_X(x), 0)\}$$

пространства $X \times I$ и проекция на фактор-пространство

$$\widehat{\mathrm{pr}} : X \times I \to Y = (X \times I)/\mathfrak{f} \ .$$

Тогда корректно определено фактор-отображение

$$T_Y = \mathrm{fact}\, \widehat{T} : Y \to Y \ .$$

Это отображение является инволюцией на пространстве Y и удовлетворяет соотношению

$$T_Y \circ j = j \circ T_X : X \to Y \ , \tag{71}$$

где $j = \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} : X \to Y$.

Отображение j является вложением. Пространство Y хаусдорфово и компактно.

Доказательство. Начнем с того, что отображение j является вложением. Действительно, образ вложения

$$\hat{j}(X) = X \times \{0\}$$

пересекается с каждым элементом разбиения $\mathfrak{f}$ не более чем в одной точке. Следовательно, отображение $\mathrm{pr}\,|_{\hat{j}(X)}$ инъективно, а вместе с ним инъективно и отображение j. Так как пространство X — компактно и хаусдорфово по условию (следовательно, и пространство $X \times I$ — хаусдорфово), то j является гомеоморфизмом на свой образ.

Проверим, что отображение $\widehat{T}$ сохраняет разбиение $\mathfrak{f}$.

a) Пусть $t \in (0,1)$. Тогда $\widehat{T}(x,t) = (x, 1-t) \in \mathfrak{f}$.
b) $\widehat{T}(\{(x,1),(T_X(x),0)\}) = \{(x,0),(T_X(x),1)\} = \{T_X((T_X(x)),0),(T_X(x),1)\} \in \mathfrak{f}$ (напомним, что $T_X \circ T_X = \mathrm{Id}_X$ по условию).

Значит, отображение $T_Y = \mathrm{fact}\,\widehat{T} : Y \to Y$ корректно определено и является инволюцией:

$$T_Y \circ T_Y = \mathrm{fact}(\widehat{T} \circ \widehat{T}) = \mathrm{fact}\,\mathrm{Id}_{X\times I} = \mathrm{Id}_Y\,.$$

Проверим равенство (71).

$$\begin{aligned} T_Y \circ j(x) &= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j}(x) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(x,0) = \\ &= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X^{-1}(x),1) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x),1) = \\ &= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \widehat{T}(T_X(x),1) = \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x),0) = \\ &= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} \circ T_X(x) = j \circ T_X(x)\,. \end{aligned}$$

Пространство Y компактно как фактор-пространство компактного пространства $X \times I$. Хаусдорфовость пространства Y следует из того, что пространство X хаусдорфово и Y есть локально-тривиальное расслоение над окружностью со слоем X (это проверяется непосредственно). $\square$

Пусть для некоторого $n \geq 1$ уже построен компакт M_n, на котором задана инволюция T_n.

Обозначим через $\widehat{T}_{n+1} : M_n \times I \to M_n \times I$ инволюцию

$$\widehat{T}_{n+1}(y,t) = (y, 1-t)\ , \quad (y,t) \in M_n \times I\ .$$

Рассмотрим последовательность пространств и отображений

$$M_n \xrightarrow{\hat{j}_n} M_n \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_{n+1}} M_{n+1} = (M_n \times I)/\mathfrak{f}_{n+1}\ . \tag{72}$$

Здесь $\hat{j}_n : y \mapsto (y,0)$, $y \in M_n$, — вложение. Разбиение $\mathfrak{f}_{n+1}$ задается соотношением

$$\mathfrak{f}_{n+1} = \bigcup_{\substack{x \in M_n \\ t \in (0,1)}} \{(x,t)\} \cup \bigcup_{x \in M_n} \{(x,1), (T_n(x), 0)\}\ , \tag{73}$$

а pr_{n+1} — отображение проекции.

Согласно предложению 3.1 отображение

$$j_n = \mathrm{pr}_{n+1} \circ \hat{j}_n : M_n \to M_{n+1}$$

является вложением, пространство M_{n+1} хаусдорфово и компактно, и на этом пространстве корректно определена инволюция

$$T_{n+1} = \mathrm{fact}\, \widehat{T}_{n+1}$$

такая, что $T_{n+1} \circ j_n = j_n \circ T_n$.

Следовательно, по индукции получаем цепочку пространств и отображений, все пространства в ней компактные и Хаусдорфовы, а все отображения — вложения:

$$S^1 = M_1 \xrightarrow{j_1} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{j_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots\ . \tag{74}$$

Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем коммутативные диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
M_n & \xrightarrow[j_n]{} & M_{n+1} \\
{\scriptstyle T_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{n+1}} \\
M_n & \xrightarrow[j_n]{} & M_{n+1}
\end{array}
\tag{75}
$$

Обозначим

$$M = \varinjlim (M_n, j_n)\ .$$

3.2. **Построение потока f пространства M.** Напомним, что *потоком* (или *однопараметрической группой автоморфизмов*) на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение

$$f : X \times \mathbb{R} \to X,$$

удовлетворяющее свойствам

(i) $f(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_X : X \to X$;
(ii) $f(f(\cdot, t), \tau) = f(\cdot, t+\tau) : X \to X$ для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Наша цель построить
построим по индукции семейство потоков

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n, \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

потребуем, чтобы семейство $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяло следующим требованиям:

(1′) $j_{n-1} \circ f_{n-1} = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, если $n > 1$;
(2′) $\mathrm{Fix}(f_n) = \mathrm{Rec}(f_n) = \{a_n\}$, $a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)$;
(3′) при $n > 1$ для каждого $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$ и для любой открытой окрестности $U = U(x)$ точки x в M_n найдется $T = T(U) > 0$ такое, что $f_n(U, t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$;

(4′) $T_n \circ f_n = f_n^- \circ (T_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, $f_n^-(x,t) = f_n(x,-t)$, $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$;

(5′) $T_n(O_{f_n}(x)) = O_{f_n}(x)$ для каждого $x \in M_n$.

Заметим, что свойство (3′) можно переформулировать в таком виде:

(3″) $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$, если $n > 1$.

3.2.1. *База индукции. Поток f_1 на пространстве M_1.* Наша цель — построить на пространстве M_1 поток f_1, который бы удовлетворял требованиям (2′), (4′) и (5′), которые сформулированы выше.

Начнем построение с потока $h : I \times \mathbb{R} \to I$,

(76)
$$h(x,t) = \begin{cases} 0\,, \quad x = 0\,; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}(t + \mathrm{tg}(\pi(x - \dfrac{1}{2})))\,, \quad x \in (0,1)\,; \\ 1\,, \quad x = 1\,. \end{cases}$$

То, что h задает непрерывное действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ на отрезке, проверяется непосредственно. Простая проверка показывает также, что

(77)
$$h(x,t) + h(1-x,-t) = 1\,.$$

Динамика потока h очень простая: концы отрезка являются положениями равновесия, интервал $(0,1) = O_h(1/2)$ является траекторией, выходящей из 0 и входящей в 1.

Обозначим $\hat{f}_1 = h : I \times \mathbb{R} \to I$.

Очевидно, что пространство M_1 можно представить как фактор-пространство $M_1 = I/\mathfrak{f}_1$, где

$$\mathfrak{f}_1 = \{0,1\} \cup \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\}\,.$$

Пусть $\mathrm{pr}_1 : I \to I/\mathfrak{f}_1 = M_1$ — отображение проекции.

Рассмотрим разбиение

$$\tilde{\mathfrak{f}}_1 = \bigcup_{\substack{x\in(0,1)\\ t\in\mathbb{R}}} \{x,t\} \cup \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{(0,t),(1,t)\}$$

пространства $I\times\mathbb{R}$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_1$ переводит элементы разбиения $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_1$, поэтому определено непрерывное фактор-отображение

$$\operatorname{fact}\hat{f}_1 = f_1 : (I\times\mathbb{R})/\tilde{\mathfrak{f}}_1 \to I/\mathfrak{f}_1 \ .$$

Воспользуемся здесь следующим полезным утверждением о произведении проекций. Доказательство этого утверждения приведено в разделе 4.1.

Утверждение (Утверждение 4.1)**.** *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\mathfrak{f}$ — разбиение пространства X на компактные подмножества, $\mathfrak{i}$ — разбиение пространства Y на одноточечные подмножества.*

Пусть проекция $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ является замкнутым отображением.

Пусть, кроме того, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}$ пространства $X\times Y$ является произведением разбиений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{i}$.

Тогда отображение

$$\pi = \mathrm{pr}_X \times Id_Y : X\times Y \to X/\mathfrak{f}\times Y$$

факторно, и следовательно, пространства $(X\times Y)/\tilde{\mathfrak{f}}$ и $X/\mathfrak{f}\times Y$ канонически гомеоморфны.

Очевидно, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ является произведением разбиения $\mathfrak{f}_1$ и разбиения $\mathfrak{i}$ пространства $\mathbb{R}$ на одноточечные множества. Так как пространство I хаусдорфово и компактно, а пространства $I/\mathfrak{f}_1 \cong S^1$ и $\mathbb{R}$ хаусдорфовы, то мы находимся в условиях предложения 4.1 (см. также замечание 4.1) и можно считать, что отображение f_1 задано на пространстве $I/\mathfrak{f}_1 \times \mathbb{R} = M_1 \times \mathbb{R}$. Пусть

$$\pi = \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : I \times \mathbb{R} \to M_1 \times \mathbb{R}$$

— проекция (см. предложение 4.1). Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}_1} & I \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}_1} \\ M_1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow[f_1]{} & M_1 \end{array}$$

Используя эту диаграмму, для любых $x \in M_1$ и t, $\tau \in \mathbb{R}$ получим соотношения:

$$\begin{aligned} f_1(x,0) &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,0)) = \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),0) = \\ &= \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x)) = x \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(f_1(x,t),\tau) &= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t)),\tau) = \\ &= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau)) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t+\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t+\tau)) = \\ &= f_1(x,t+\tau) \ . \end{aligned}$$

Следовательно, отображение f_1 задает непрерывный поток на M_1.

Представим M_1 как единичную окружность в комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ .$$

Отображение проекции принимает вид

$$\mathrm{pr}_1(x) = \exp(2\pi i x) \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

Ясно, что в таком представлении

$$f_1(\exp(2\pi i x), t) = \exp(2\pi i h(x,t)) \ , \quad x \in I \ .$$

Далее, учитывая соотношения (77), получаем

$$\begin{aligned} T_1 \circ f_1(\exp(2\pi i x), t) &= T_1 \circ \exp(2\pi i h(x,t)) = \\ &= \exp(2\pi i(1 - h(x,t))) = \\ &= \exp(2\pi i h(1-x, -t)) = \\ &= f_1^-(\exp(2\pi i(1-x)), t) = \\ &= f_1^- \circ (T_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\exp(2\pi i x), t) \ . \end{aligned}$$

Здесь $f_1^-(z,t) = f_1(z,-t)$, $(z,t) \in M_1 \times \mathbb{R}$. Поэтому требование ($4'$) для M_1 выполнено.

Обозначим $a = \mathrm{pr}_1(0) = \exp(0)$. Тогда M_1 состоит из неподвижной точки, $\mathrm{Fix}(f_1) = \{a\}$, и блуждающей траектории

$$\{\exp(2\pi i x) \mid x \in (0,1)\} = O_{f_1}(\exp(\pi i)),$$

которая выходит из точки a и входит в эту же точку с другой стороны. Значит, требование ($2'$) для M_1 выполнено.

Динамическая система (M_1, f_1) состоит всего из двух траекторий, мощности которых как множеств различны (одна равна 1, другая — *continuum*). Так как инволюция T_1 переводит траектории динамической системы (M_1, f_1) в траектории (это немедленно следует из свойства ($4'$)), то свойство ($5'$) выполнено.

3.2.2. *Вспомогательное построение.* Для дальнейших построений нам понадобится конструкция "косого произведения" потоков, которая детально рассматривается отдельно в разделе 4.2. Именно, пусть X и Y — топологические пространства, $f : X \times \mathbb{R} \to X$ и $h : Y \times \mathbb{R} \to Y$ — потоки на X и Y соответственно. Пусть $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекции.

В разделе 4.2 вводится отображение

$$\hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y$$

потоков f и h (“косое произведения” потоков f и h), которое задает поток на $X \times Y$ и удовлетворяет таким свойствам.

(1) движение точки $(x, y) \in X \times Y$ под действием $\hat{f}$ проектируется в движение точки $y = \mathrm{pr}_Y(x, y)$ под действием потока h, т. е. выполняется равенство $\mathrm{pr}_Y \circ \hat{f} = h \circ (\mathrm{pr}_Y \times Id_{\mathbb{R}}) : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y$;

(2) траектории потока $\hat{f}$ проектируются в траектории потока f, т. е. выполняется включение $\mathrm{pr}_X(O_{\hat{f}}(x, y)) \subseteq O_f(\mathrm{pr}_X(x, y)) = O_f(x)$;

(3) φ не зависит от выбора x, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\varphi(x_1, y, t) = \varphi(x_2, y, t),$$

где через $\varphi(x, y, t)$ обозначена такая величина, что

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x, y, t) = f(x, \varphi(x, y, t))$$

(эта величина корректно определена в силу предыдущего требования).

3.2.3. *Шаг индукции. Поток f_n на пространстве M_n.* Будем считать, что на пространстве M_{n-1} уже задан непрерывный поток (M_{n-1}, f_{n-1}), удовлетворяющий требованиям $(1')$–$(5')$.

Рассмотрим пространство $(M_{n-1}) \times I$ и функцию

$$\alpha : I \to \mathbb{R} ,$$

$$\alpha(y) = 1 - 2y , \quad y \in I .$$

Воспользуемся леммой 4.1 и построим по динамическим системам (M_{n-1}, f_{n-1}), (I, h) (см. равенство 76) и функции α поток

$$\widehat{f_n} : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I,$$

$$\begin{aligned} \widehat{f_n}(x,y,t) &= \left(f_{n-1}\left(x, \int\limits_0^t (1-2h(y,s)ds) \right),\ h(y,t) \right) = \\ &= \left(f_{n-1}\left(x, t - 2\int\limits_0^t h(y,s)ds \right),\ h(y,t) \right), \end{aligned} \tag{78}$$

$$(x,y,t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R}\ .$$

Так как 0 и 1 — неподвижные точки динамической системы (I, h), то

$$\begin{aligned} &\widehat{f_n}(x,0,t) = (f_{n-1}(x,t), 0)\ , \\ &\widehat{f_n}(x,1,t) = (f_{n-1}(x,-t), 1) = (f^{-}_{n-1}(x,t), 1)\ . \end{aligned} \tag{79}$$

Напомним (см. раздел 3.1), что $M_n = (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n$ и разбиение $\mathfrak{f}_n$ задается при помощи формулы (73). Кроме того (см. предложение 4.1 и замечание 4.1), имеется канонический гомеоморфизм

$$\Psi : (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}) \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n \times \mathbb{R} = M_n \times \mathbb{R}.$$

Здесь $\mathfrak{i}_{\mathbb{R}}$ — разбиение прямой $\mathbb{R}$ на одноточечные множества.

Рассмотрим проекции

$$\begin{aligned} &\widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}), \\ &\pi_n = \Psi \circ \widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_n \times \mathbb{R}, \\ &\mathrm{pr}_n : M_{n-1} \times I \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n = M_n. \end{aligned}$$

Проверим, что отображение $\widehat{f_n}$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer} \pi_n = \mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$. Для этого нам достаточно проверить, что для любых $x \in M_{n-1}$ и

$t \in \mathbb{R}$ пара точек $\{\,(x,1,t)\,,\,(T_{n-1}(x),0,t)\,\}$ переходит под действием $\widehat{f}_n$ в какой-нибудь элемент разбиения $\mathfrak{f}_n$ (инволюция T_{n-1} определена в разделе 3.1).

Справедливы равенства (см. соотношения 79)

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) &= (f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}\circ T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t)),0)\ .\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что T_{n-1} — инволюция ($T_{n-1}^2 = \mathrm{Id}$). Обозначим $x' = T_{n-1}(x)$, очевидно

$$x = T_{n-1}\circ T_{n-1}(x) = T_{n-1}(x').$$

Тогда

$$\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) = (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)),0)\ .$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(x,1,t) &= (f_{n-1}(x,-t),1) = (f_{n-1}^-(x,t),1) = \\ &= (f_{n-1}^-(T_{n-1}(x'),t),1) = (T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t),1)\ .\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из условия ($4'$). Обозначим $\widehat{x} = T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)$. Тогда

$$\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) = (T_{n-1}(\widehat{x}),0)\ ,$$
$$\widehat{f}_n(x,1,t) = (\widehat{x},1)\ .$$

Из произвольности выбора точек $x \in M_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$ заключаем, что отображение $\widehat{f}_n$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer}\pi_n$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$, следовательно, корректно определено непрерывное фактор-отображение

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n\ ,$$

которое замыкает коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccc}
M_n \times I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\widehat{f}_n} & M_n \times I \\
{\scriptstyle \pi_n}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_n} \\
M_n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{f_n} & M_n
\end{array}
\tag{80}
$$

Утверждение 3.2. *Для каждого* $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n(x,t)\ .$$

Доказательство. Из предложения 4.1 вытекает, что

$$\pi_n = \mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\ , \tag{81}$$

Поэтому

$$\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n \circ \pi_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = \\ = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)), t) = f_n(x,t)$$

для любого $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$. □

Применяя это утверждение, установим групповые свойства отображения f_n. Пусть $x \in M_n$. Тогда

$$f_n(x,0) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), 0) = \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = x\ ,$$

значит, $f_n(\cdot, 0) = \mathrm{Id} : M_n \to M_n$.

Пусть, кроме того, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
f_n(f_n(x,t),\tau) &= f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) \\
&= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) \\
&= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t+\tau) = f_n(x, t+\tau).
\end{aligned}
$$

Итак, из того, что $\widehat{f}_n$ является потоком, следует, что f_n является непрерывным потоком с фазовым пространством M_n.

Проверим, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойствам $(1')$ – $(5')$ (см. начало раздела 3.2).

Для проверки требования $(1')$ покажем сначала, что

$$\widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1} = \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ . \tag{82}$$

Напомним, что отображение $\widehat{j}_{n-1} : M_{n-1} \to M_{n-1} \times I$ задается формулой $\widehat{j}_{n-1}(y) = (y, 0)$, $y \in M_{n-1}$ (см. раздел 3.1).

Пусть $y \in M_{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y, t) = (f_{n-1}(y, t), 0) \ .$$

С другой стороны, из соотношения (79) получим

$$\widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(y, t) = \widehat{f}_n(y, 0, t) = \\ = (f_{n-1}(y, t), 0) = \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y, t) \ .$$

Вспомним теперь, что по определению $j_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}$. Это вместе с формулой (82) приводит нас к цепочке равенств

$$\begin{aligned} j_{n-1} \circ f_{n-1} &= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ &= f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ &= f_n \circ ((\mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ . \end{aligned}$$

И значит, f_n удовлетворяет требованию $(1')$.

Приступим к проверке свойства $(2')$.

Согласно предложению 3.1 пространство M_{n-1} — компакт, и отображение $j_{n-1} : M_{n-1} \to M_n$ — вложение. Из этого замечания и свойства $(1')$ заключаем, что $j_{n-1}(M_{n-1})$ — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M_n, f_n), и потоки (M_{n-1}, f_{n-1}) и

$(j_{n-1}(M_{n-1}), f_n|_{j_{n-1}(M_{n-1})})$ топологически сопряжены. Поэтому для каждой точки $x \in M_{n-1}$ справедливо следующее утверждение: α-предельное (ω-предельное) множество точки $j_{n-1}(x)$ относительно потока f_n совпадает с образом α-предельного (ω-предельного) множества точки x относительно потока f_{n-1} под действием j_{n-1}. Следовательно,

$$\mathrm{Rec} f_n \cap j_{n-1}(M_{n-1}) = j_{n-1}(\mathrm{Rec} f_{n-1}) = \\ = j_{n-1}(j_{n-2} \circ \ldots \circ j_1(a)) = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a) \ .$$

Для завершения проверки на выполнимость свойства $(2')$ докажем, что каждая точка множества

$$U_n = M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$$

является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Мы уже установили, что U_n — открытое подмножество пространства M_n.

По построению, $j_{n-1}(M_{n-1}) = \mathrm{pr}_n(M_{n-1} \times \{0\})$, поэтому $\mathrm{pr}_n^{-1}(j_{n-1}(M_{n-1})) = M_n \times \{0, 1\}$ и

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(U_n) = \mathrm{pr}_n^{-1}(M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})) = M_{n-1} \times (0, 1) = \widehat{U}_n \ .$$

Заметим, что проекция pr_n взаимно-однозначно отображает открытое подмножество $\widehat{U}_n$ пространства $M_{n-1} \times I$ на открытое подмножество U_n пространства M_n. Так как, по определению отображения проекции, открытые множества в образе — это в точности те множества, полный прообраз которых открыт, то отображение

$$\widehat{\mathrm{pr}}_n = \mathrm{pr}_n |_{\widehat{U}_n} : \widehat{U}_n \to U_n$$

открыто и является гомеоморфизмом.

Пусть $x \in U_n$, $\widehat{x} = \mathrm{pr}_n^{-1}(x) \in \widehat{U}_n$. Тогда

$$\widehat{x} = (y, \tau), \qquad y \in M_{n-1}, \qquad \tau \in (0, 1).$$

Фиксируем $a, b \in (0,1)$ так, чтобы

$$0 < a < \tau < b < 1 \ .$$

Множество $\widehat{V}_{a,b} = M_{n-1} \times (a,b)$ является открытой окрестностью точки $\widehat{x}$ в пространстве $M_{n-1} \times I$.

Найдем теперь такое $T > 0$, чтобы

$$\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (0,a)$$

при всех $t < -T$ и

$$\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (b,1)$$

— при всех $t > T$.

Пусть $\mathrm{pr}_I : M_{n-1} \times I \to I$ — проекция на второй сомножитель. Тогда по построению

$$\mathrm{pr}_I \circ \widehat{f}_n = h \circ (\mathrm{pr}_I \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to I$$

(см. лемму 4.1). Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times h((a,b),t)$ и нам достаточно найти такое $T > 0$, что $h((a,b),t) \subseteq (0,a)$ при любом $t < -T$, и $h((a,b),t) \subseteq (b,1)$ для всех $t > T$.

Найдем сначала такое $t_\alpha \in \mathbb{R}$, что $h(b, t_\alpha) < a$.

Предположим, что

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) = h(b, t_\alpha) < a \ ,$$

то есть

$$\operatorname{arctg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) < \pi(a - \tfrac{1}{2}) \ .$$

Так как по условию $a \in (0,1)$, то обе части неравенства лежат в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. В этом интервале функция tg определена и монотонно возрастает. Поэтому последнее неравенство равносильно такому:

$$t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) < \operatorname{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2})) \ .$$

Значит, неравенство $h(b, t_\alpha) < a$ эквивалентно следующему:
$$t_\alpha < \left[\operatorname{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))\right] .$$
Аналогично устанавливается эквивалентность неравенств $b < h(a, t_\omega)$ и
$$\left[\operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2}))\right] < t_\omega .$$

Заметим, что функция $h(\cdot, t) : I \to I$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ монотонно возрастает. Поэтому,
$$h((a, b), t) \subseteq (0, a), \qquad \text{если } t < -T,$$
и
$$h((a, b), t) \subseteq (b, 1), \qquad \text{если } t > T,$$
где
$$T = \left|\operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2}))\right| .$$
Из этого вытекает, что $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \cap \widehat{V}_{a,b} = \varnothing$, если $t \notin [-T, T]$.

Множество $\widehat{U}_n$ является инвариантным подмножеством потока $\widehat{f}_n$, поэтому $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq \widehat{U}_n$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b})$. Тогда множество $V_{a,b}$ является открытой окрестностью точки $x = \mathrm{pr}_n(\widehat{x})$, так как отображение $\widehat{\mathrm{pr}}_n = \mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ открыто (см. выше); кроме того, для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство
$$f_n(V_{a,b}, t) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t).$$
Напомним, что отображение $\mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ взаимно-однозначно, поэтому
$$f_n(V_{a,b}, t) \cap V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t)) \cap \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b}) = \\ = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \cap \widehat{V}_{a,b}) = \varnothing$$
при $t \notin [-T, T]$ и точка x является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Из произвольности выбора точки $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$ заключаем, что $M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq W(f_n)$, и требование $(2')$ выполнено.

Приступим к проверке требования $(3')$.

Заметим сначала, что если свойство $(3')$ выполняется в какой-нибудь точке $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$, то этому свойству удовлетворяют и все точки траектории $O_{f_n}(x) \subseteq j_{n-1}(M_{n-1})$. Действительно, пусть $x' \in O_{f_n}(x)$. Тогда $x' = f_n(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Пусть $V' \ni x'$ — открытая окрестность точки x'. Тогда $V = f_n(V', -\tau)$ — открытая окрестность точки x (напомним, что из определения потока следует, что отображение $f_n(\cdot, t) : M_n \to M_n$ является гомеоморфизмом при каждом $t \in \mathbb{R}$). Существует $T = T(V) > 0$ такое, что $f_n(V, t) \cap V \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Значит,

$$
\begin{aligned}
f_n(V', t) \cap V' = f_n(f_n(V, \tau), t) \cap f_n(V, \tau) = \\
f_n(V, \tau + t) \cap f_n(V, \tau) = f_n(f_n(V, t), \tau) \cap f_n(V, \tau) \supseteq \\
\supseteq f_n(f_n(V, t) \cap V, \tau) \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

при $t > T$.

Докажем, что каждая траектория потока (M_{n-1}, f_{n-1}) содержит неподвижную точку инволюции T_{n-1}. Действительно, пусть $x \in M_{n-1}$. Из свойства $(5')$ для потока (M_{n-1}, f_{n-1}) вытекает, что $T_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Обозначим $x' = f_{n-1}(x, \tau/2)$. Воспользуемся свойством $(4')$ для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и тогда получим следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
T_{n-1}(x') = T_{n-1} \circ f_{n-1}(x, \tau/2) = f_{n-1}(T_{n-1}(x), -\tau/2) = \\
= f_{n-1}(f_{n-1}(x, \tau), -\tau/2) = f_{n-1}(x, \tau/2) = x' \,.
\end{aligned}
$$

Итак, из свойства $(1')$ (которое мы уже проверили) и из сказанного выше следует, что нам достаточно установить свойство ($3'$) только для тех точек из $j_{n-1}(M_{n-1})$, которые являются образами под действием j_{n-1} неподвижных точек инволюции T_{n-1}.

Пусть $x_0 \in j_{n-1}(M_{n-1})$, $z_0 = j_{n-1}^{-1}(x_0) \in M_{n-1}$ и пусть $T_{n-1}(z_0) = z_0$. Тогда

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(T_{n-1}(z_0), 0), (z_0, 1)\} = \\ = \{(z_0, 0), (z_0, 1)\} \subseteq M_{n-1} \times I \ .$$

Чтобы проверить справедливость свойства ($3'$) в точке x_0, нам достаточно доказать, что для каждой окрестности W множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ существует $T = T(W)$ такое, что $\widehat{f}_n(W, t) \cap W \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Действительно, если мы это установим, то отсюда будет вытекать, что для любой окрестности V точки $x_0 \in M_n$ найдется $T > 0$ такое, что $\mathrm{pr}_n^{-1}(V) \cap \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \neq \varnothing$ для любого $t > T$. Следовательно (см. соотношения (80) и (81)),

$$f_n(V, t) \cap V = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)), t) \cap V = \\ = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \cap \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)) \supseteq \\ \supseteq \mathrm{pr}_n \left[\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \cap \mathrm{pr}_n^{-1}(V) \right] \neq \varnothing$$

для всех $t > T$.

Докажем, что для множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ выполняется свойство ($3'$). Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть* $(x, y) \in M_{n-1} \times (0, 1)$. *Тогда за время*

$$\tau = 2 \operatorname{tg}(\pi(1/2 - y)) \tag{83}$$

точка (x, y) *сместится под действием потока* $\widehat{f}_n$ *в точку* $(x, 1 - y)$, *то есть*

$$\widehat{f}_n((x, y), \tau) = (x, 1 - y) \ . \tag{84}$$

Доказательство. Как показывает формула (78), соотношение (84) справедливо, если одновременно выполняются два следующих равенства:

$$h(y,\tau) = 1 - y \ , \tag{85}$$

$$\int_0^\tau (1 - 2h(y,s))ds = 0 \ . \tag{86}$$

Простая непосредственная проверка показывает, что формула (83) дает решение уравнения

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\tau + \operatorname{tg}(\pi(y - \tfrac{1}{2}))) = 1 - y \ ,$$

которое эквивалентно уравнению (85), так как по условию леммы $y \in (0,1)$.

Покажем, что полученное решение удовлетворяет равенству (86).

Сначала заметим, что согласно равенству (77)

$$1 - y = h(y,\tau) = 1 - h(1-y,-\tau) \ ,$$

поэтому $h(1-y,-\tau) = y$. Далее,

$$\begin{aligned} h(y,\tau - s) &= 1 - h(1-y,-\tau+s) = \\ &= 1 - h(h(1-y,-\tau),s) = 1 - h(y,s) \end{aligned}$$

для каждого $s \in \mathbb{R}$. Значит

$$\int_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,s))ds = \int_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2 + 2h(y,\tau - s))ds =$$

$$= -\int_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,\tau - s))ds =$$

$$= -\int_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,u))d(\tau - u) = -\int_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y,u))du \ .$$

Здесь осуществлена замена параметра $u = \tau - s$.

Окончательно,

$$\int_0^{\tau}(1-2h(y,s))ds =$$

$$= \int_0^{\tau/2}(1-2h(y,s))ds + \int_{\tau/2}^{\tau}(1-2h(y,s))ds =$$

$$= \int_0^{\tau/2}(1-2h(y,s))ds - \int_0^{\tau/2}(1-2h(y,u))du = 0\ .$$

Лемма полностью доказана. $\square$

Итак, пусть W — открытая окрестность множества

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(z_0,0),(z_0,1)\}$$

в пространстве $M_{n-1}\times I$.

Так как произведения открытых множеств составляют базу топологии пространства-произведения, то найдутся такие $\delta > 0$ и открытое $V \subseteq M_{n-1}$, что

$$V \times ([0,\delta) \cup (1-\delta,1]) \subseteq W.$$

Для нас здесь важно то, что

$$\{z_0\} \times ((0,\delta) \cup (1-\delta,1)) \subseteq W\ .$$

Далее мы будем считать, что $\delta < 1/2$.

Рассмотрим функцию

$$\xi : \mathbb{R} \to I\ ,$$
$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{t}{2}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ . \tag{87}$$

Функция ξ непрерывна, монотонно убывает и $\xi(t) \to +0$ при $t \to +\infty$.

Легко видеть, что эта функция подобрана так (см. лемму 3.1 выше), чтобы для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\widehat{f_n}((z,\xi(t)),t) = (z, 1-\xi(t)) \ , \quad z \in M_{n-1} \ .$$

Пусть $T = 2\operatorname{tg}(\pi(1/2-\delta))$. Тогда $\xi(T) = \delta$. Так как функция ξ монотонно убывает, то для каждого $t > T$ выполняется неравенство $\xi(t) \in (0,\delta)$. Следовательно,

$$\widehat{f_n}((z_0,\xi(t)),t) = (z_0, 1-\xi(t)) \in \{z_0\} \times (1-\delta, 1) \subseteq W \ ,$$

и $\widehat{f_n}(W,t) \cap W \neq \varnothing$.

В силу произвольности выбора окрестности W, свойство $(3')$ выполняется в точке x_0.

Таким образом, доказано, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойству $(3')$.

Пусть

$$\widehat{f_n^-} : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I \ ,$$

$$\widehat{f_n^-}(z,y,t) = \widehat{f_n}(z,y,-t) \ , \quad (z,y,t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \ .$$

Перед тем, как доказывать, что свойство $(4')$ выполнено, проверим равенство

$$\widehat{T_n} \circ \widehat{f_n} = \widehat{f_n^-} \circ (\widehat{T_n} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ .$$

Действительно, производя замену параметра $u = -s$, получаем

$$\int\limits_0^{-t} (1-2h(1-y,s))ds = \int\limits_0^{-t} (1-2h(1-y,-u))d(-u) =$$

$$= -\int\limits_0^{t} (1-2h(1-y,-u))du = -\int\limits_0^{t} (1-2+2h(y,u))du =$$

$$= \int\limits_0^{t} (1-2h(y,u))du$$

для всех $y \in I$ и $t \in \mathbb{R}$. Это следует из равенства (77).

Пусть теперь $z \in M_{n-1}$, $y \in I$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(z, y, t) = \widehat{T}_n \left(f_{n-1} \left(z, \int\limits_0^t (1 - 2h(y,s))ds \right), h(y,t) \right) =$$
$$= \left(f_{n-1} \left(z, \int\limits_0^t (1 - 2h(y,s))ds \right), 1 - h(y,t) \right) =$$
$$= \left(f_{n-1} \left(z, \int\limits_0^{-t} (1 - 2h(1-y,s))ds \right), h(1-y,-t) \right) =$$
$$= \widehat{f}_n(z, 1-y, -t) = \widehat{f_n^-}(z, 1-y, t) =$$
$$= \widehat{f_n^-} \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(z, y, t)\ .$$

Пусть, наконец, $x \in M_n$ и $t \in \mathbb{R}$. Используя коммутативную диаграмму (80) и следующее за ней утверждение 3.2, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
T_n \circ f_n(x,t) &= T_n \circ \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) \\
&= pr_n \circ \widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) \\
&= pr_n \circ \widehat{f_n^-} \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) \\
&= pr_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)), -t) \\
&= f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)), -t) \\
&= f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)), -t) \\
&= f_n(T_n(x), -t) \\
&= f_n^- \circ (T_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(x, t).
\end{aligned}$$

Из произвольности выбора точки $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ заключаем, что свойство $(4')$ выполнено.

Приступим к проверке свойства $(5')$ для потока (M_n, f_n).

Пусть сначала $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Из свойства $(1')$ заключаем, что

$$O_{f_n}(x) = j_{n-1}\left(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))\right) \ .$$

Используем коммутативную диаграмму 75 и тот факт, что свойство $(5')$ справедливо для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} T_n(O_{f_n}(x)) = T_n \circ j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1} \circ T_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = O_{f_n}(x) \ . \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$. Тогда $\mathrm{pr}_n^{-1}(x) = (z, y)$ для некоторых $z \in M_{n-1}$ и $y \in (0,1)$. Как следует из свойства $(4')$, которое мы уже проверили, потоки (M_n, f_n) и (M_n, f_n^-) топологически сопряжены посредством инволюции T_n. Эти потоки имеют одинаковые траектории, поэтому инволюция T_n отображает траектории потока f_n на целые траектории этого же потока. Таким образом, для завершения доказательства нам осталось только проверить, что $T_n(x) \in O_{f_n}(x)$.

Из леммы 3.1 вытекает, что

$$(z, 1-y) = \widehat{T}_n(z, y) \in O_{\widehat{f}_n}(z, y) \ .$$

Однако из формул (80) и (81) следует, что поток (M_n, f_n) является фактор-системой потока $(M_{n-1} \times I, \widehat{f}_n)$, поэтому

$$O_{f_n}(x) = O_{f_n}(\mathrm{pr}_n(z, y)) = \mathrm{pr}_n\left(O_{\widehat{f}_n}(z, y)\right).$$

И значит,

$$\begin{aligned} T_n(x) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(z, y) = \\ = \mathrm{pr}_n(z, 1-y) \ \in \ \mathrm{pr}_n(O_{\widehat{f}_n}(z, y)) = O_{f_n}(x) \ . \end{aligned}$$

Таким образом, полностью доказана справедливость свойства ($5'$) для потока (M_n, f_n).

3.2.4. *Поток f пространства M.* Далее будем рассматривать пространство M как объединение подпространств M_n, $n \in \mathbb{N}$. В частности, в последующих выкладках будем опускать отображения вложения j_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность потоков, построенная в предыдущем подразделе. Из свойства ($1'$) (см. начало раздела 3.2) следует, что отображение

$$f = \varinjlim f_n : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R} \ ,$$
$$f(x) = f_n(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ ,$$

определено корректно. Непрерывность отображений f и f^{-1} следует непосредственно из их определения. И так как все отображения f_n являются потоками, то и f — поток.

Итак, мы построили поток f пространства M.

Найдем теперь множество неблуждающих точек динамической системы (M, f).

Пусть $x \in M_n$. Тогда $x \in \Omega(f_{n+1})$ согласно условию ($3''$). Следовательно, $x \in \Omega(f)$ (см. утверждение 2.1). Так как по определению для любого $x \in M$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in M_n$, то $M = \Omega(f)$.

Подсчитаем теперь множество рекуррентных точек динамической системы (M, f).

Пусть $x \in M_n$. По построению M_n — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M, f), поэтому$\overline{O_f(x)} = \overline{O_{f_n}(x)} \subseteq M_n$, и точка x является α-рекуррентной (ω-рекуррентной) точкой динамической системы (M, f) тогда и только тогда, когда она лежит в множестве α-рекуррентных (ω-рекуррентных) точек динамической системы $(M_n, f_n) = (M_n, f|_{M_n})$.

Из свойства $(2')$ теперь следует, что если $x \in \mathrm{Rec}(f)$, то $x = a$.

Итак построен пример динамической системы (M, f) на бесконечномерном неполном пространстве M. Она удовлетворяет одновременно следующим свойствам:

(i) $M = \Omega(f)$;
(ii) $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Per}(f) = \{a\}$.

Пример 3.1. *Выбрасывая из пространства M неподвижную точку a потока (M, f), получим новое бесконечномерное неполное пространство M' и поток (M', f') на нем, у которого все траектории неблуждающие, но множество предельных, а тем более рекуррентных точек пусто.*

Получаем искомый пример.

3.3. **Построение каскада F на пространстве M.** Построим теперь пример 3.1 для динамической системы с дискретным временем на M (каскада).

В качестве искомого примера можно было бы взять отображение последования $F = f(\,\cdot\,, 1) : M \to M$ потока f из предыдущего примера. Однако мы слегка усложним этот пример, чтобы он дополнительно обладал свойством, невозможным для потоков, именно, чтобы последовательность каскадов имела итерационно неустойчивое неблуждающее множество.

Начнем построение.

3.3.1. *Последовательность* $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Наша цель построить последовательность автоморфизмов

$$F_n : M_n \to M_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

которые бы удовлетворяли некоторому дискретному аналогу требований $(1')$–$(5')$ для последовательности потоков (см. начало раздела 3.2).

Таким образом, по индукции построено семейство потоков (M_n, f_n), $n \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют требованиям $(1')$–$(5')$.

Возьмем единичные сдвиги вдоль траекторий этих потоков

$$F_n = f_n(\,\cdot\,, 1) : M_n \to M_n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Так как все f_n — непрерывные потоки, то все отображения F_n являются гомеоморфизмами ($F_n^{-1} = f_n(\cdot\,, -1)$, $n \in \mathbb{N}$).

Убедимся, что для всех $n \in \mathbb{N}$ отображения F_n удовлетворяют требованиям

(1°) $j_{n-1} \circ F_{n-1} = F_n \circ j_{n-1}$, если $n > 1$;

(2°) существует точка $a \in M_1$, такая что

$$\{a_n\} = \mathrm{Rec}(F_n) = \mathrm{Fix}(F_n), \qquad a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a);$$

(3°) $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$, если $n > 1$.

Доказательство.

(1°) Пусть $n > 1$ и $x \in M_{n-1}$. Тогда из свойства $(1')$ получаем

$$j_{n-1} \circ F_{n-1}(x) = j_{n-1} \circ f_{n-1}(x, 1) = \\ = f_n(j_{n-1}(x), 1) = F_n \circ j_{n-1}(x) \ ,$$

и так как x — произвольная точка, то свойство (1°) выполнено.

(2°) Заметим, что для любого $x \in M_n$ имеет место неравенство

$$O_{F_n}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_n(x, k) \subseteq O_{f_n}(x) \ ,$$

поэтому $\alpha_{F_n}(x) \subseteq \alpha_{f_n}(x)$ и $\omega_{F_n}(x) \subseteq \omega_{f_n}(x)$. Отсюда немедленно следует, что

$$\operatorname{Rec}(F_n) \subseteq \operatorname{Rec}(f_n) \ .$$

С другой стороны, так как M_n — компактное хаусдорфово топологическое пространство, то по теореме Биркгофа динамическая система (M_n, F_n) имеет по крайней мере одно непустое минимальное множество. Следовательно, $\operatorname{Rec}(F_n) \neq \varnothing$.

Так как согласно свойству $(2')$ мощность $\operatorname{Rec}(f_n)$ равна единице, то

$$\operatorname{Rec}(F_n) = \operatorname{Rec}(f_n) = \{a_n\} = \{j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)\} \ .$$

Кроме того, очевидно, что

$$\{a_n\} = \operatorname{Fix}(f_n) \subseteq \operatorname{Fix}(F_n) \subseteq \operatorname{Rec}(F_n),$$

поэтому $\operatorname{Fix}(F_n) = \{a_n\}$.

(3°) Пусть $n > 1$ и $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Пусть $U \subseteq M_n$ — открытая окрестность точки x. Согласно свойству $(3')$ существует $T > 0$ такое, что $f_n(U,t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Найдем $N > T$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$F_n^k(U) \cap U = f_n(U,k) \cap U \neq \varnothing$$

для каждого $k > N$ и $x \in \Omega(F_n)$, так как окрестность $U \ni x$ выбрана произвольно.

Значит, $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$. $\square$

3.3.2. *Автоморфизм F пространства M.* Будем рассматривать пространство M как объединение подпространств M_n, $n \in \mathbb{N}$. В частности, в последующих выкладках будем опускать отображения вложения j_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность автоморфизмов, построенная в предыдущем подразделе. Из свойства

(1°) (см. начало раздела 3.3.1) следует, что отображение

$$F = \varinjlim F_n : M \to M \ ,$$
$$F(x) = F_n(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ ,$$

определено корректно. И так как все отображения F_n обратимы, то и F — обратимое отображение . Обратное отображение задается формулой

$$F^{-1} = \varinjlim F_n^{-1} : M \to M \ ,$$
$$F^{-1}(x) = F_n^{-1}(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ .$$

Непрерывность отображений F и F^{-1} следует непосредственно из их определения.

Итак, мы построили автоморфизм F пространства M.

Найдем теперь множество неблуждающих точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. Тогда $x \in \Omega(F_{n+1})$ согласно условию (3°). Следовательно, $x \in \Omega(F)$ (см. утверждение 2.1). Так как по определению для любого $x \in M$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in M_n$, то $M = \Omega(F)$.

Подсчитаем теперь множество рекуррентных точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. По построению M_n — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M, F), поэтому $\overline{O_F(x)} = \overline{O_{F_n}(x)} \subseteq M_n$, и точка x является α-рекуррентной (ω-рекуррентной) точкой динамической системы (M, F) тогда и только тогда, когда она лежит в множестве α-рекуррентных (ω-рекуррентных) точек динамической системы $(M_n, F_n) = (M_n, F|_{M_n})$.

Из свойства (2°) теперь следует, что если $x \in \mathrm{Rec}(F)$, то $x = a$.

Итак построен пример динамической системы (M, F) на бесконечномерном неполном пространстве M. Она удовлетворяет одновременно следующим свойствам:

(i) $M = \Omega(F)$;
(ii) $\mathrm{Rec}(F) = \mathrm{Per}(F) = \{pt\}$.

4. Дополнения.

4.1. **Одно полезное утверждение о произведении проекций.**

Утверждение 4.1. *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\mathfrak{f}$ — разбиение пространства X на компактные подмножества, $\mathfrak{i}$ — разбиение пространства Y на одноточечные подмножества.*

Пусть проекция $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ является замкнутым отображением.

Пусть, кроме того, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}$ пространства $X \times Y$ является произведением разбиений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{i}$.

Тогда отображение

$$\pi = \mathrm{pr}_X \times Id_Y : X \times Y \to X/\mathfrak{f} \times Y$$

факторно, и следовательно, пространства $(X \times Y)/\tilde{\mathfrak{f}}$ и $X/\mathfrak{f} \times Y$ канонически гомеоморфны.

Для доказательства этого предложения нам будет нужен ряд приведенных ниже определений и результатов (см. [5]).

Определение 4.1 (см. [6]). *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X в пространство Y. Если его взаимно-однозначный фактор*

$$\mathrm{fact}\, f : X/\operatorname{zer} f \to Y$$

является гомеоморфизмом, то f называется факторным *($\operatorname{zer} f$ — разбиение пространства X, элементами которого являются прообразы точек пространства Y под действием отображения f).*

Равносильно можно сказать, что отображение f факторно*, если $f(X) = Y$ и для произвольного подмножества $B \subseteq Y$ его прообраз $f^{-1}(B)$ открыт в X тогда и только тогда, когда само множество B открыто в Y.*

Определение 4.2. *Разбиение $\mathfrak{f}$ топологического пространства X называется* непрерывным*, если и только если для каждого F из $\mathfrak{f}$ и любого открытого множества U, содержащего F, существует такое открытое множество V, что $F \subseteq V \subseteq U$ и V — объединение некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{f}$.*

Теорема 4.1 (Александров, Хопф)**.** *Разбиение $\mathfrak{f}$ топологического пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда проектирование $\mathrm{pr} : X \to X/\mathfrak{f}$ замкнуто.*

Теорема 4.2 (Уоллес)**.** *Пусть X и Y — топологические пространства, A и B — компактные подмножества из X и Y соответственно. Пусть, далее, W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$.*

Тогда найдутся такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \times V \subseteq W$.

Доказательство предложения 4.1. Пусть

$$B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y, \qquad B' = \pi^{-1}(B) \subseteq X \times Y.$$

Если B открыто, то и B' открыто, так как отображение π, очевидно, непрерывно.

Обратно, предположим, что множество B' открыто в $X \times Y$.

Пусть $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 : X/\mathfrak{f} \times Y \to X/\mathfrak{f}$ — проекция на первый сомножитель. Очевидно,

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{y\in Y} (B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \left[\widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \times \{y\}\right] = \bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\} \,. \end{aligned}$$

Мы здесь обозначили $B_y = \widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \subseteq X/\mathfrak{f}$, $y \in Y$.

Пусть еще $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ — проекция на первый сомножитель. Аналогично предыдущему, обозначим

$$B'_y = \mathrm{pr}_1(B' \cap (X \times \{y\})) \subseteq X, \qquad y \in Y.$$

Тогда

$$B' = \bigcup_{y\in Y} B'_y \times \{y\} \,.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} B' &= \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\}\right) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \pi^{-1}(B_y \times \{y\}) = \bigcup_{y\in Y} \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y) \times \{y\} \,, \end{aligned}$$

поэтому $B'_y = \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y)$ для каждого $y \in Y$. Заметим, кроме того, что для любого $y \in Y$ множество B'_y открыто в X, так как B' открыто по условию и отображение $in_y : X \to X \times Y$, $in_y(x) = (x, y)$, $x \in X$, является вложением при любом фиксированном $y \in Y$.

Пусть $(x_0, y_0) \in B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$. Тогда для компактных подмножеств $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq X$ и $\{y_0\} \in Y$ найдутся согласно теореме 4.2 открытые окрестности $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, для

которых
$$\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \times \{y_0\} \subseteq U \times V \subseteq B'.$$
Далее, по теореме 4.1 для элемента $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0)$ разбиения $\mathfrak{f}$ и открытого множества U найдется *насыщенное* (являющееся объединением некоторого семейства элементов разбиения $\mathfrak{f}$) открытое множество W' такое, что
$$\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq W' \subseteq U.$$
Очевидно, $W' = \mathrm{pr}_X^{-1}(W)$ для некоторого подмножества $W \subseteq X/\mathfrak{f}$, содержащего точку x_0. По определению фактор-топологии, так как множество W' открыто в X, то и W открыто в $X/\mathfrak{f}$.

Легко видеть, что
$$W' \times V = \pi^{-1}(W \times V),$$
а множество $W \times V$ является открытой окрестностью точки (x_0, y_0). Кроме того, по построению $W' \times V \subseteq B'$, следовательно $W \times V \subseteq B$ и точка (x_0, y_0) — внутренняя для B.

Из произвольности выбора точки $(x_0, y_0) \in B$ следует, что B открыто в $X/\mathfrak{f} \times Y$.

Теперь из произвольности выбора множества
$$B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$$
и его прообраза $B' = \pi^{-1}(B)$ следует, что отображение π факторно. □

Замечание 4.1. *Легко видеть, что если пространство X компактно и хаусдорфово, а фактор-пространство $X/\mathfrak{f}$ хаусдорфово, то все элементы разбиения $\mathfrak{f}$ компактны а отображение проекции $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ замкнуто.*

Таким образом, в этом случае для любого хаусдорфового пространства Y выполнены условия предложения 4.1.

4.2. **Косое произведение потоков относительно функции на декартовом произведении многообразий.** Пусть X и Y — топологические пространства,

$$f : X \times \mathbb{R} \to X \qquad \text{и} \qquad h : Y \times \mathbb{R} \to Y$$

— потоки на X и Y соответственно.

Наша цель — построить "косое произведение"

$$\hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y$$

потоков f и h, которое удовлетворяло бы таким свойствам.

Пусть $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекции. Мы хотим,

(0) чтобы отображение $\hat{f}$ задавало поток на $X \times Y$;

(1) чтобы движение точки $(x, y) \in X \times Y$ под действием $\hat{f}$ проектировалось в движение точки $y = \mathrm{pr}_Y(x, y)$ под действием потока h, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\mathrm{pr}_Y \circ \hat{f} = h \circ (\mathrm{pr}_Y \times Id_{\mathbb{R}}) : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y;$$

(2) чтобы траектории потока $\hat{f}$ проектировались в траектории потока f, т. е. чтобы выполнялось включение

$$\mathrm{pr}_X(O_{\hat{f}}(x, y)) \subseteq O_f(\mathrm{pr}_X(x, y)) = O_f(x);$$

(3) чтобы φ не зависела от выбора x, т. е. чтобы для любых x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\varphi(x_1, y, t) = \varphi(x_2, y, t),$$

где через $\varphi(x, y, t)$ обозначена такая величина, что

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x, y, t) = f(x, \varphi(x, y, t))$$

(эта величина корректно определена в силу предыдущего требования).

Приведем наводящие соображения, которые позволяют нам "угадать" поток $\hat{f}$.

Предположим, что X и Y — "хорошие" пространства (например, конечномерные многообразия) и потоки f и h — гладкие. Тогда определены векторные поля $\{\vec{u}(x)\}_{x\in X}$ и $\{\vec{v}(y)\}_{y\in Y}$ на соответствующих касательных пространствах такие, что траектории потоков f и h являются интегральными для этих векторных полей.

Допустим, определён поток $\hat{f}$ на пространстве $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3) и найдено соответствующее ему поле скоростей $\{\vec{w}(x,y)\}_{(x,y)\in X\times Y}$.

В силу требований (1) и (2) в каждой точке $(x,y) \in X \times Y$ должны выполняться равенства

$$\vec{w}(x,y) = \alpha(x,y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y)$$

(коэффициент при $\vec{v}$ всегда равен единице). Из требования (3) следует, что коэффициент α не зависит от x, и значит,

$$\alpha : Y \to \mathbb{R} \tag{88}$$

есть некоторая функция от y, и

$$\vec{w}(x,y) = \alpha(y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y)\ . \tag{89}$$

Пусть мы стартуем из точки (x_0, y_0) и хотим найти в какой точке траектории $O_f(x_0)$ окажется в момент времени t проекция образа нашей начальной точки $\mathrm{pr}_x \circ \hat{f}(x_0, y_0, t)$.

Если бы функция α была константой, можно было бы написать

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f(x_0, \alpha t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \cdot 1\, ds\right).$$

Однако в произвольный момент времени s параметр α равен $\alpha(y(s)) = \alpha \circ h(y_0, s)$, поэтому

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y_0, s)\, ds\right).$$

Пусть теперь поток $\hat{f}$ не задан. Фиксируем "хорошую" интегрируемую функцию (88) и построим векторное поле (89), интегральные траектории которого задает поток

$$\begin{gathered} \hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y\,, \\ \hat{f}(x, y, t) = \left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y, s)\, ds\right),\ h(y, t)\right)\,. \end{gathered} \tag{90}$$

Лемма 4.1. *Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, f и h — непрерывные потоки на X и Y, соответственно.*

Пусть $\alpha : Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

Тогда формула (90) задает непрерывный поток $\hat{f}$ на $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3).

Доказательство. Нужно показать, что отображение $\hat{f}$ задает действие аддитивной группы вещественных чисел на пространстве $X \times Y$. Действительно, во-первых,

$$\hat{f}(x, y, 0) = (f(x, 0), h(y, 0)) = (x, y)\,,$$

и во-вторых

$$\hat{f}(\hat{f}(x,y,t),\tau) = \hat{f}\left(f\left(x, \int_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t)\ ,\ \tau\right) =$$

$$= \left(f\left(f\left(x, \int_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds\right),\ \int_0^\tau \alpha \circ h(h(y,t),\rho)\,d\rho\right),\ h(h(y,t),\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds + \int_0^\tau \alpha \circ h(y,t+\rho)\,d\rho\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds + \int_t^{t+\tau} \alpha \circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^{t+\tau} \alpha \circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \hat{f}(x,y,t+\tau)$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$ и t, $\tau \in \mathbb{R}$.

В этой цепочке равенств мы воспользовались следующими обстоятельствами:

- f и h — потоки, т. е. для всех

$$x \in X, \qquad y \in Y, \qquad t, \tau \in \mathbb{R}$$

  выполняются равенства

$$f(x,t+\tau) = f(f(x,t),\tau) \qquad \text{и} \qquad h(y,t+\tau) = h(h(y,t),\tau).$$

- Функция $\alpha \circ h(y,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывна для любого фиксированного $y \in Y$, так как является композицией непрерывных отображений (напомним, что отображение α непрерывно по условию). Следовательно, интеграл

$$\int_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds$$

  существует при любых $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$.

- После замены $s = t + \rho$ получаем

$$\int_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d\rho = \int_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d(t+\rho) = \int_t^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds.$$

Заметим, что справедливость требований (1)–(3) вытекает непосредственно из формулы (90).

При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ отображение

$$\hat{f}_t = \hat{f}(\cdot,\cdot,t) : X \times Y \to X \times Y$$

является биекцией. Действительно, как показано выше, существует обратное отображение $(\hat{f}_t)^{-1} = \hat{f}_{-t}$. Таким образом, для завершения доказательства нам остается проверить непрерывность отображения $\hat{f}$.

Предположим сначала, что отображение

$$\varphi : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

(91) $$\varphi : (y,t) \mapsto \int\limits_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds\,, \quad (y,t) \in Y \times \mathbb{R}\,,$$

непрерывно.

Пусть $Q \subseteq X \times Y$ — открытое множество, содержащее точку $\hat{f}(x,y,t)$. Найдем открытые множества $Q_X \subseteq X$ и $Q_Y \subseteq Y$ такие, что

$$\hat{f}(x,y,t) = (f(x,\varphi(y,t)), h(y,t)) \ \in \ Q_X \times Q_Y \subseteq Q.$$

Так как отображение h непрерывно, найдутся открытые множества $V_1 \subseteq Y$ и $W_1 \subseteq \mathbb{R}$ такие, что

$$(y,t) \in V_1 \times W_1 \subseteq Y \times \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad h(V_1 \times W_1) \subseteq Q_Y.$$

Аналогично, найдутся открытые множества $U \subseteq X$ и $W_2 \subseteq \mathbb{R}$, для которых

$$(x,\varphi(y,t)) \in U \times W_2 \subseteq X \times \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad f(U \times W_2) \subseteq Q_X.$$

Наконец, найдем открытые множества $V_2 \subseteq Y$ и $W_3 \subseteq \mathbb{R}$ такие, что

$$(y,t) \in V_2 \times W_3 \qquad \text{и} \qquad \varphi(V_2 \times W_3) \subseteq W_2.$$

Обозначим $V = V_1 \cap V_2 \subseteq Y$ и $W = W_1 \cap W_3 \subseteq \mathbb{R}$. Заметим, что V и W — непустые открытые множества, так как $y \in V$ и $t \in W$ по построению. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\hat{f}(U \times V \times W) &= f(U, \varphi(V \times W)) \times h(V \times W) \subseteq \\ &\subseteq f(U, \varphi(V_2 \times W_3)) \times h(V_1 \times W_1) \subseteq \\ &\subseteq f(U, W_2) \times Q_Y \subseteq Q_X \times Q_Y \subseteq Q\ .\end{aligned}$$

Так как точка $(x, y, t) \in X \times Y \times \mathbb{R}$ и открытое множество $Q \ni \hat{f}(x, y, t)$ произвольны, то отображение $\hat{f}$ непрерывно.

Следовательно, из непрерывности отображения (91) вытекает непрерывность $\hat{f}$.

Докажем непрерывность отображения φ.

Пусть $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,t)| &= \left|\int_0^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds - \int_0^t \alpha \circ h(y,s)\, ds\right| \leq \\ &\leq \left|\int_0^t (\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s))\, ds\right| + \left|\int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds\right| = \\ &= |\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| + \left|\int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds\right|\ .\end{aligned}$$

Функция $\alpha \circ h : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, и значит найдутся такие открытое множество $V' \subseteq Y$ и $\delta' > 0$, что $y \in V'$ и

$$\alpha \circ h(V' \times (t - \delta', t + \delta')) \subseteq (\alpha \circ h(y,t) - \varepsilon/2, \alpha \circ h(y,t) + \varepsilon/2)\ .$$

Обозначим

$$M = \max\{|\alpha \circ h(y,t) - \varepsilon/2|, |\alpha \circ h(y,t) + \varepsilon/2|\}.$$

Ясно, что $M > 0$. Пусть, кроме того,

$$\delta = \min\{\delta', \varepsilon/(2M)\}.$$

Тогда для любого $(z,\tau) \in V' \times (t-\delta, t+\delta)$ имеем

$$\left|\int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\,ds\right| \leq \left|\int_t^\tau |\alpha \circ h(z,s)|\,ds\right| =$$
$$= \left|\int_t^\tau M\,ds\right| \leq |\tau - t| M \leq \delta M \leq \varepsilon/2\ .$$

Таким образом, при $t = 0$ получим, что при любом

$$(z,\tau) \in V' \times (-\delta, \delta)$$

выполняются неравенства

$$|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,0)| \leq |\varphi(z,0) - \varphi(y,0)| +$$
$$+ \left|\int_0^\tau \alpha \circ h(z,s)\,ds\right| = 0 + \varepsilon/2 < \varepsilon\ .$$

Из произвольности выбора ε следует, что для любого $y \in Y$ функция φ непрерывна в точке $(y,0) \in Y \times \mathbb{R}$.

Пусть теперь $t \neq 0$. Снова из непрерывности функции $\alpha \circ h : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следует, что для любого $s \in [0,t]$ существуют открытое множество $V_s \subseteq Y$ и $\delta_s > 0$ такие, что $y \in V_s$ и

$$\alpha \circ h(V_s \times (s-\delta_s, s+\delta_s)) \subseteq (\alpha \circ h(y,s) - \varepsilon/(4t), \alpha \circ h(y,s) + \varepsilon/(4t))\ .$$

Обозначим $W_s = (s - \delta_s, s + \delta_s) \subseteq \mathbb{R}, \qquad s \in [0,t]$.

Множество $\{y\} \times [0,t] \subseteq Y \times \mathbb{R}$ является компактом как образ компакта $[0,t]$ в хаусдорфовом пространстве $Y \times \mathbb{R}$ (напомним, что пространство Y хаусдорфово по условию). Значит, найдется конечный набор значений $s_1, \ldots, s_n$ такой, что

$$[0,t] = \bigcup_{i=1}^n W_{s_i}.$$

Далее для простоты будем обозначать $W_i = W_{s_i}$ и $V_i = V_{s_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим также

$$V'' = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

Пусть $z \in V''$. Для каждого $s \in [0,t]$ найдется $i \in \{1,\dots,n\}$ такое, что $s \in W_i$. Тогда $V'' \times \{s\} \subseteq V_i \times W_i$ из чего вытекает оценка

$$|\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)| \le \\ \le |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s_i)| + |\alpha \circ h(y,s_i) - \alpha \circ h(y,s)| < \\ < \varepsilon/(4t) + \varepsilon/(4t) = \varepsilon/(2t) \ .$$

Таким образом,

$$|\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| \le \left| \int_0^t (\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s))\, ds \right| \le \\ \le \left| \int_0^t |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)|\, ds \right| < \left| \int_0^t \varepsilon/(2t)\, ds \right| = \varepsilon/2 \ .$$

Обозначим $V = V' \cap V''$. Открытое множество V не пусто, так как $y \in V$. Тогда для любого $(z,\tau) \in V \times (t-\delta, t+\delta)$ получим оценку

$$|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,t)| \le |\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| + \left| \int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds \right| < \\ < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Следовательно,

$$\varphi(V \times (t-\delta, t+\delta)) \subseteq (\varphi(y,t) - \varepsilon, \varphi(y,t) + \varepsilon) \ .$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, то отображение φ непрерывно в каждой точке $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$. □

Замечание 4.2. *Смысл параметра $\alpha(y,t)$ можно описать словами: при малых $t \in \mathbb{R}$ отображение*

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(\cdot, y, \cdot) : X \times \mathbb{R} \to X$$

ведет себя так, как поток f_α, $f_\alpha(x,t) = f(x, \alpha t)$, $\alpha = \alpha(y,0)$.

Список литературы

[1] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.

[2] *Алексеев В. М.* Символическая динамика. — Киев.: Издание Института математики АН УССР, 1976. — С. 212.

[3] *Власенко И. Ю., Максименко С. И., Полулях Е. А.* Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2006.

[4] *Власенко И. Ю., Полулях Е. А.* Об итерационной устойчивости центра Биркгофа // *Препринт 2005.7.* — 2005.

[5] *Келли Д. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — С. 432.

[6] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии, геометрические главы. — Москва, Наука, 1977.

[7] *Сибирский К. С.* Введение в топологическую динамику. — Кишинев, 1970.

[8] *Birkhoff G.* Dynamical systems // *Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI.* — 1927.

[9] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. — Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978. — Vol. 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* — Pp. iii+89.

[10] *Coven E., Nitecki Z.* Nonwandering sets of the powers of maps of the interval // *Ergodic Theory & Dynamical Systems.* — 1981. — Vol. 1. — Pp. 9–31.

[11] *Hirsch M. W.* Differential topology. — Springer-Verlag, 1976. — Vol. 33.

[12] *Kuratowski K.* Topology. Vol. I. New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski. — New York: Academic Press, 1966. — Pp. xx+560.

[13] *Kuratowski K., Mostowski A.* Set theory. — revised edition. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1976. — Pp. xiv+514. — With an introduction to descriptive set theory, Translated from the 1966 Polish original, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 86.

[14] *Polulyakh E., Vlasenko I.* On iteration stability of the Birkhoff center against the power 2 // *U. M. G.* — 2006. — Vol. 58, no. 4.

[15] *Vlasenko I., Polulyakh E.* On iteration stability of the birkhoff center against the power 2 // *U. M. G.* — 2006. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 705–707.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 107-114

М. Гургенидзе

Запорожский национальный университет

О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

В статті вивчається грасманів многовид неізотопних двовимірних площин псевдоевклідового простору за допомогою його занурення у вигляді алгебраїчної поверхні у шестивимірний простір.

В статье изучается грассманово многообразие неизотропных двумерных плоскостей псевдоевклидова пространства посредством его погружения в виде алгебраической поверхности в шестимерное пространство. Найден вид компонент тензора кривизны и получены формулы для вычисления секционной кривизны.

Грассманово многообразие плоскостей евклидова пространства изучалось многими геометрами. Основные результаты можно найти в обзорной статье А.А. Борисенко [2]. В работе [1] Ю.А. Аминова изучается само грассманово многообразие и его подмногообразие - грассманов образ поверхности. В представленной статье аналогичное исследование проведено для грассманова многообразия неизотропных 2-плоскостей псевдоевклидова четырехмерного пространства индекса 1 - ${}^1R_4$. С помощью плюккеровых координат это многообразие погружается в псевдоевклидово шестимерное пространство индекса 3, находится его тензор кривизны и секционная кривизна. Эти свойства грассманова многообразия можно будет использовать для изучения грассманова образа неизотропной поверхности в пространстве ${}^1R_4$.

1. Подмногообразия грассманова многообразия неизотропных плоскостей псевдоевклидова пространства $^1R_4$

В псевдоевклидовом пространстве $^1R_4$ (с метрикой сигнатуры $-+++$) будем рассматривать множество всех неизотропных 2-плоскостей (далее плоскостей), проходящих через фиксированную точку пространства. Каждая плоскость множества является псевдоевклидовой или евклидовой [3]. В этом множестве можно ввести гладкую структуру и, следовательно, по аналогии с евклидовым пространством, указанное множество плоскостей будем называть грассмановым многообразием и обозначать $G(2,4)$. Многообразие является объединением двух непересекающихся подмногообразий - псевдоевклидовых и евклидовых плоскостей. Будем обозначать их соответственно $^PG(2,4)$ и $^EG(2,4)$.

Каждую плоскость π, проходящую через фиксированную точку, можно задать плюккеровыми координатами. Для этого рассмотрим ортонормированный базис плоскости π, состоящий из векторов

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4),$$

заданных своими координатами относительно ортонормированного базиса пространства $^1R_4$. Составим миноры второго порядка 2×4-матрицы, строками которой есть координаты базисных векторов плоскости π, и обозначим их символами p_{ij}

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, i, j = 1, ..., 4, i < j.$$

Упорядоченный набор p_{ij} называют плюккеровыми координатами плоскости. Плюккеровы координаты кососимметричны и удовлетворяют соотношению Плюккера

$$p_{i[j}p_{kl]} = 0. \tag{92}$$

Если плоскость π псевдоевклидова, то координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют условиям:

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = -1,$$

$$-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1,$$

$$-a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 0. \tag{93}$$

Найдем сумму квадратов всех плюккеровых координат p_{ij} плоскости π. Полученное выражение будет зависеть от $a_i, b_i, i = 1, ..., 4$. Используя соотношения (2), можно привести его к виду

$$p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 1 + 2(p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2).$$

Из последнего равенства следует, что плюккеровы координаты псевдоевклидовой плоскости удовлетворяют соотношению

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = -1. \tag{94}$$

Для плюккеровых координат p_{ij} евклидовой плоскости в ${}^1R_4$ нетрудно получить следующее соотношение:

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 1. \tag{95}$$

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ плоскость задается шестью плюккеровыми координатами $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$, которые можно считать координатами точки в аффинном пространстве A_6, в котором определим скалярное произведение векторов

$\bar{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ и $\bar{q} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34})$ формулой

$$(\bar{p}, \bar{q}) = -(p_{12}q_{12} + p_{13}q_{13} + p_{14}q_{14}) + p_{23}q_{23} + p_{24}q_{24} + p_{34}q_{34}.$$

Это равносильно введению в A_6 структуры псевдоевклидова пространства ${}^3R_6$ с матрицей Грамма ортонормированного базиса $diag(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$ [4]. Набор $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ будет являться декартовыми координатами в ${}^3R_6$.

Погружение подмногообразия ${}^PG(2,4)$ в ${}^3R_6$ задается двумя уравнениями

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = -1, \tag{96}$$

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{97}$$

Нормалями к подмногообразию являются, в частности, линейно независимые векторы

$$\bar{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}),$$

$$\bar{q} = (-p_{34}, p_{24}, -p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}).$$

Непосредственно проверяется, что эти нормали ортогональны и $\bar{p}^2 = -1, \bar{q}^2 = 1$. Уравнение (5) означает, что ${}^PG(2,4)$ лежит в пятимерной сфере S^5 мнимого радиуса пространства ${}^3R_6$, а из (6) следует, что $\bar{q}$ является нормалью к подмногообразию ${}^PG(2,4)$.

Для подмногообразия ${}^EG(2,4)$ уравнения погружения в ${}^3R_6$ имеют вид (4) и (6). Векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ являются нормалями к этому подмногообразию, но теперь $\bar{p}^2 = 1, \bar{q}^2 = -1$. Таким образом, подмногообразие ${}^EG(2,4)$ принадлежит сфере действительного радиуса пространства ${}^3R_6$.

2. Тензор кривизны подмногообразий ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$

Рассмотрим четырехмерное подмногообразие ${}^PG(2,4)$. Его можно задать вектор-функцией $\bar{p} = \bar{p}(y^1, y^2, y^3, y^4)$. Пусть

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \,, \alpha, \beta = 1, ..., 4 \,,$$

— метрика на ${}^PG(2,4)$, индуцированная метрикой объемлющего пространства ${}^3R_6$. Коэффициенты этой метрики $a_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\beta})$. Так как нормальное пространство к ${}^PG(2,4)$ определяется евклидовым и псевдоевклидовым векторами, то метрика ${}^PG(2,4)$ имеет сигнатуру $(--++)$. Для подмногообразия ${}^PG(2,4)$ рассмотрим вторые квадратичные формы
$II^\lambda = \Omega^\lambda_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \lambda = 1, 2$, соответствующие нормалям $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Коэффициенты $\Omega^\sigma_{\alpha\beta}$ будем определять равенствами

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}, \bar{p}), \Omega^2_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}, \bar{q}),$$

которые можно переписать в виде

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\beta}) = -a_{\alpha\beta}, \Omega^2_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial y^\beta}).$$

В каждой регулярной точке $p \in^P G(2,4)$ рассмотрим базис пространства ${}^3R_6$, состоящий из касательных векторов $\bar{p_\alpha} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}$ и нормалей $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Разложение Гаусса [1] ковариантных производных для подмногообразия ${}^PG(2,4)$ запишется в виде

$$\bar{p}_{,\alpha\beta} = -\Omega^1_{\alpha\beta}\bar{p} + \Omega^2_{\alpha\beta}\bar{q}.$$

Для получения уравнения Гаусса [1] погружения многообразия ${}^PG(2,4)$ в ${}^3R_6$ найдем ковариантные производные $\bar{p}_{,\alpha\beta\gamma}$ и $\bar{p}_{,\alpha\gamma\beta}$ и их разность разложим по векторам $\bar{p}_{,\alpha}, \bar{p}, \bar{q}$.

Воспользуемся условием ортогональности векторов $\bar{p}_\alpha$ векторам $\bar{p}$ и $\bar{q}$ и запишем уравнение Гаусса в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} + \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} + \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} - \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma}.$$

Найденный вид коэффициентов вторых квадратичных форм позволяет переписать эти уравнения следующим образом

$$(98)\quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} + (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta}) - \\ - (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})$$

Рассуждения, изложенные в этом пункте, справедливы и для подмногообразия ${}^EG(2,4)$. Разложение Гаусса для ${}^EG(2,4)$ можно получить в виде

$$\bar{p}_{,\alpha\beta} = \Omega^1_{\alpha\beta}\bar{p} - \Omega^2_{\alpha\beta}\bar{q},$$

а уравнения Гаусса

$$(99)\quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} - \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} - \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} + \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma} = \\ = a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} - \\ - (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta}) + (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma}).$$

3. Секционная кривизна подмногообразий ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$

Для нахождения секционной кривизны в касательном пространстве к многообразию выбирается двумерная площадка. Обозначим через σ двумерную площадку, определяемую ортонормированным базисом $\bar{X} = (X^\alpha)$ и $\bar{Y} =$

(Y^α). Секционная кривизна определяется формулой

$$K(\sigma) = R_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\alpha Y^\beta X^\gamma Y^\delta.$$

В касательных пространствах к подмногообразиям ${}^P G(2,4)$ и ${}^E G(2,4)$ возможны три типа двумерных площадок с сигнатурами $(-+), (++), (--)$. Рассмотрим их по порядку.

Для подмногообразия ${}^P G(2,4)$ для площадки с сигнатурой $(-+)$ $\bar{X}^2 = -1$, $\bar{Y}^2 = 1$ и, с учетом (7), получим

$$K(\sigma) = 1 + (\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - \\ - (\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}),$$

где $\nabla_{\bar{X}}\bar{p} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha} X^\alpha$, а

$$-X^\alpha a_{\alpha\gamma} X^\gamma Y^\beta a_{\beta\delta} Y^\delta + X^\alpha a_{\alpha\delta} Y^\delta Y^\beta a_{\beta\gamma} X^\gamma = 1.$$

Из вида координат векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ следует равенство $(\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) = (\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})$.

Напомним, что подмногообразие ${}^P G(2,4)$ лежит на сфере S^5 мнимого радиуса пространства ${}^3R_6$ и $\bar{p}$ - нормаль к этой сфере. Как и в евклидовом случае любое направление в касательном пространстве к сферам псевдоевклидова пространства является главным и в каждом из них нормальная кривизна равна -1. Поэтому, в соответствии с теоремой Родрига, $\nabla_{\bar{X}}\bar{p} = \bar{X}$, $\nabla_{\bar{Y}}\bar{p} = \bar{Y}$. Тогда формулу кривизны подмногообразия ${}^P G(2,4)$ можно записать в виде

$$K(\sigma) = 1 + (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}). \tag{100}$$

Пусть теперь двумерная площадка σ в касательном пространстве подмногообразия ${}^P G(2,4)$ определяется двумя ортогональными единичными или двумя ортогональными мнимоединичными векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. В каждом из этих случаев секционная кривизна вычисляется по формуле

$$K(\sigma) = -1 + (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}).$$

Для подмногообразия ${}^{E}G(2,4)$ формула секционной кривизны для площадки σ , определяемой векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, $\bar{X}^2 = -1$ и $\bar{Y}^2 = 1$ имеет вид

$$K(\sigma) = -1 - (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) + (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}),$$

а для площадки σ, определяемой двумя единичными или двумя мнимоединичными векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$

$$K(\sigma) = 1 - (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) + (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}).$$

В работе [1] получена оценка секционной кривизны грассманова многообразия евклидова пространства. Полученные в этой статье результаты планируется использовать для оценки секционной кривизны подмногообразий ${}^{P}G(2,4)$ и ${}^{E}G(2,4)$ псевдоевклидова пространства ${}^{1}R_4$.

Список литературы

[1] *Аминов Ю.А.* Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 467с.

[2] *Борисенко А.А., Николаевский Ю.А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий //УМН - 1991. - Т.46. Вып.2(278). - С.41-80

[3] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967. - 664с.

[4] *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969. - 547с.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 115-131

УДК 512.64

С. М. Дяченко

Київський нац. ун-т ім Тараса Шевченка

Ручні алгебри відносно односторонньої еквівалентності матриць

У цій роботі ми розглядаємо задачу про односторонню еквівалентність матриць над скінченновимірними алгебрами, і описуємо всі ручні випадки.

В этой работе мы рассматриваем задачу про одностороннюю эквивалентность матриц над конечномерными алгебрами и описываем все ручные случаи.

In this paper we consider the problem of one-sided equivalence of matrices over a finite dimensional algebra, and describe all tame cases.

1. Вступ. Нехай k — поле і Λ — скінченновимірна алгебра над k. Розглянемо наступну матричну задачу. На множині всіх (прямокутних) матриць з елементами із Λ введемо таке відношення еквівалентності: $A \sim A'$ тоді і лише тоді, коли існують оборотна матриця S над k та оборотна матриця T над Λ, такі що

$$A' = SAT \tag{101}$$

Потрібно описати такі матриці A з точністю до вказаної еквівалентності.

Цю задачу можна сформулювати як задачу про опис класів ізоморфних об'єктів наступної категорії $\mathcal{C}$. $Ob\,\mathcal{C} = \{f : k^m \to \Lambda^n\}$, морфізмом між двома об'єктами $(f : k^m \to \Lambda^n)$ і $(f' : k^{m'} \to \Lambda^{n'})$ є пара відображень (ϕ, Φ), що складається з k-лінійного відображення $\phi : k^m \to k^{m'}$ і Λ-лінійного відображення $\Phi : \Lambda^n \to \Lambda^{n'}$, таких що $\phi f' = f\Phi$. Оскільки ця категорія не є категорією Крулля-Шмідта, ми замість неї будемо розглядати її "замикання Крулля-Шмідта". А саме ми розглянемо задачу про опис класів ізоморфних об'єктів категорії $\mathcal{B}$, такої що $Ob\,\mathcal{B} = \{f : k^m \to P\}$, де P — проективний модуль над алгеброю Λ (морфізмом між двома об'єктами $(f : k^m \to P)$ і $(f' : k^{m'} \to P')$ є пара відображень(ϕ, Φ), що складається з k-лінійного відображення $\phi : k^m \to k^{m'}$ і Λ-лінійного відображення $\Phi : \Lambda^n \to \Lambda^{n'}$, таких що $\phi f' = f\Phi$). У цій статті описані скінченновимірні алгебри для яких вказана задача є ручною. Такі алгебри ми називаємо OSE-ручними або алгебрами OSE-ручного типу; якщо задача має скінченний (відповідно нескінченний) тип, алгебру називатимемо алгеброю OSE-скінченного (відповідно OSE-нескінченного) типу. Очевидно, що алгебра OSE-скінченного типу є OSE-ручною.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук Бондаренку Віталію Михайловичу за постановку задачі і корисні поради.

2. Попередні пояснення та приклади. Ми розглядаємо лише базисні алгебри, тобто алгебри Λ, для яких $\Lambda/Rad\Lambda \cong k \oplus k \oplus \ldots \oplus k$; такі алгебри можна задати графом зі співвідношеннями наступним чином ([1]).

Нехай $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ — орієнтований граф. Γ_0 — множина його вершин, Γ_1 — множина його стрілок. Для кожної стрілки $e \in \Gamma_1$ позначимо через $\alpha(e) \in \Gamma_0$ її початок, і через $\beta(e) \in \Gamma_0$ її кінець.

Шляхом в орієнтованому графі будемо називати послідовність стрілок $w = e_1 e_2 \ldots e_n$, таку, що

$$\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Початок та кінець шляху визначаються так: $\alpha(w) = \alpha(e_1)$, $\beta(w) = \beta(e_n)$.

У подальшому граф Γ вважаємо скінченним, тобто $|\Gamma_0| = s < \infty$, $|\Gamma_1| < \infty$. Із таким графом асоціюється k-алгебра шляхів (яка може бути нескінченновимірною). Її базисом є множина шляхів графа скінченної довжини (включаючи вершини як шляхи довжини нуль: $\{\varepsilon_j \mid j \in \Gamma_0\}$) $B = \{w \mid w = e_1 e_2 \dots e_n,\ n \geq 0\}$. Множення в алгебрі задається на елементах базису як приписування шляхів, якщо це можливо і нульовим чином в іншому разі, тобто, якщо $w_1 = e_1 e_2 \dots e_n$ і $w_2 = e_{n+1} e_{n+2} \dots e_{n+m}$, то

$$w_1 w_2 = \begin{cases} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1} e_{n+2} \dots e_{n+m}, & \text{при } \beta(w_1) = \alpha(w_2); \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

При цьому

$$\varepsilon_j w = \begin{cases} w, & \text{якщо } \alpha(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі;} \end{cases}$$

$$w \varepsilon_j = \begin{cases} w, & \text{якщо } \beta(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Позначимо так означену алгебру $\Lambda(\Gamma)$.

Алгебра, задана графом зі співвідношеннями, — це факторалгебра алгебри $\Lambda(\Gamma)$ за ідеалом I таким, що $I \subset J^2$, де J — ідеал, породжений всіма стрілками графа.

Переходимо до розгляду нашої задачі.

Нехай $A \in M_{m \times n}(\Lambda)$. Розпишемо її за базисом у наступному вигляді:

$$A = \sum_{j=1}^{s} A_j \varepsilon_j + \sum_{w} A_w w \tag{102}$$

Лема 1. *Квадратна матриця A, що записана у вигляді* (102)*, є оборотною тоді і лише тоді, коли оборотними є всі матриці A_j.*

Доведення випливає з рівності $AX = E$, де X також записана у вигляді (102) (E — одинична матриця).

Наш перший крок до розв'язання сформульованої матричної задачі полягає в зведенні її (за допомогою розкладу матриць за базисом алгебри) до матричної задачі над полем.

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Нехай $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$, де граф Γ має такий вигляд:

$$\underset{\varepsilon_1}{\circ} \xrightarrow{\quad a \quad} \underset{\varepsilon_2}{\circ}$$

Розглянемо рівність (101): $A' = SAT$. Нехай

$A = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba$;

$A' = A_1'\varepsilon_1 + A_2'\varepsilon_2 + B'a$;

$T = T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va$;

$A_1, A_2, B, A_1', A_2', B' \in M_{m\times n}(k)$,

$S \in GL_m(k)$, $T_1, T_2 \in GL_n(k)$, $V \in M_n(k)$.

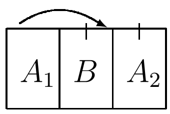
Тоді

$$A_1'\varepsilon_1 + A_2'\varepsilon_2 + B'a = S(A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba)(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va).$$

Перемноживши елементи базису за правилами множення в алгебрі та прирівнявши коефіцієнти при елементах базису, отримаємо наступні рівності:

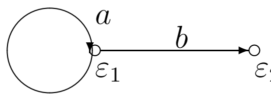
$A_1' = SA_1T_1$, $A_2' = SA_2T_2$, $B' = SBT_2 + SA_1V$.

Отже, ми отримали наступну матричну задачу: є три матриці A_1, A_2, B. Дозволено робити елементарні перетворення рядків одночасно в усіх матрицях (задаються множенням на матрицю S), одночасні елементарні перетворення стовпців матриць A_2 та B (задаються множенням на матрицю T_2), елементарні перетворення стовпців матриці A_1 (задаються множенням на матрицю T_1) і стовпці матриці A_1 можна додавати до стовпців матриці B (матриця V). Схематично можна наступним чином зобразити отриману задачу:



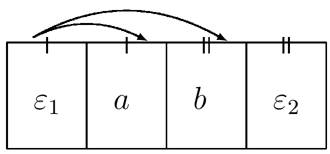
.

Приклад 2.



,

$I = \{a^2, ab\}$. Матрична задача має наступний вигляд:



.

У загальному випадку маємо наступну матричну задачу, яку будемо позначати $M(\Lambda)$. Нехай базис алгебри Λ складається із шляхів $\{w_i \mid i = 1 \dots l\}$, тоді ми маємо набір матриць $\{A_i,\ i = 1 \dots l\}$. Допустимими перетвореннями є наступні перетворення:

1) можна робити будь-яке елементарне перетворення рядків одночасно у всіх матрицях;

2) можна робити будь-яке елементарне перетворення із стовпцями матриці A_i, причому, якщо $\beta(w_j) = \beta(w_i)$ то

таке ж саме елементарне перетворення треба зробити із стовпцями матриці A_j;

3) можна додавати стовпець матриці A_i, помножений на елемент поля, до стовпця матриці A_j, якщо $w_i w_m = w_j$ — добуток елементів базису, причому у випадку $w_{i'} w_m = w_{j'}$ таке ж саме додавання треба зробити для відповідних стовпців матриць $A_{i'}$ та $A_{j'}$.

3. Формулювання основного результату. В подальшому $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ позначає орієнтований граф, $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$ — алгебра побудована за графом зі співвідношеннями I.

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

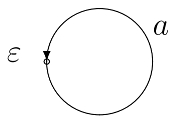
Теорема 1. *OSE-ручними алгебрами є (з точністю до ізоморфізму) такі і лише такі алгебри $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$.*

1. $\overset{\varepsilon}{\circ}$, $I = \{0\}$.

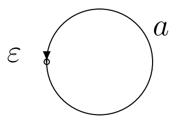
2. $\overset{\varepsilon_1}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_2}{\circ}$, $I = \{0\}$.

3. $\overset{\varepsilon_1}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_2}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_3}{\circ}$, $I = \{0\}$.

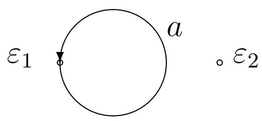
4. $\overset{\varepsilon_1}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_2}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_3}{\circ}$ $\overset{\varepsilon_4}{\circ}$, $I = \{0\}$.

5. 

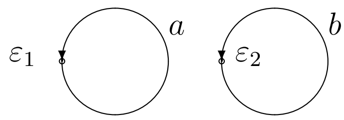
, $I =< a^2 >$.

6. 

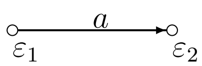
, $I =< a^3 >$.

7. 

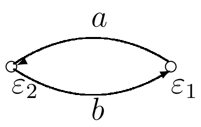
, $I =< a^2 >$.

8. 

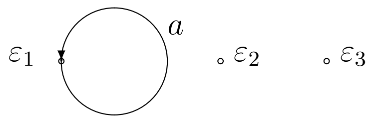
, $I =< a^2, b^2 >$.

9. 

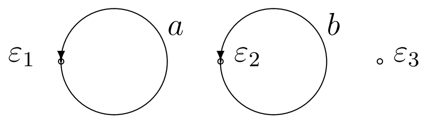
, $I = \{0\}$.

10. 

, $I =< ab, ba >$.

11. 

, $I =< a^2 >$.

12. 

, $I =< a^2, b^2 >$.

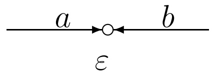
Серед них алгебрами OSE-скінченного типу є алгебри 1), 2), 3), 5),6), 7).

4. Допоміжні леми. Розглянемо дві леми, які ми будемо використовувати нижче.

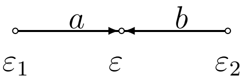
Лема 2. *Якщо Λ — алгебра OSE-ручного типу, то* $|\Gamma_0| < 5$.

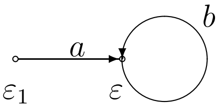
Доведення. Якщо граф Γ має принаймні 5 вершини, то матриці, які відповідають вершинам графа, утворюють зображення частково впорядкованої множини, яка складається з п'яти непорівняльних точок. Добре відомо, що така задача є дикою (див [3]). □

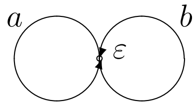
Лема 3. *Якщо* Λ *— алгебра* OSE*-ручного типу, то* Γ *не містить підграф вигляду*



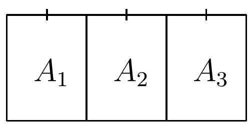
Доведення. Можливі такі випадки:

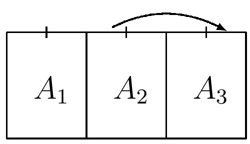
a)  ;

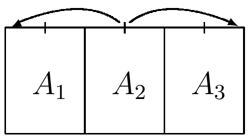
b)  ;

c)  .

Якщо ми розглянемо підзадачі, що відповідає матрицям a, ε, b, то ми отримаємо відповідно наступні матричні задачі :

a)  ,

b)  ,

c) 

.

Всі ці задачі є дикими згідно [4, 5].

□

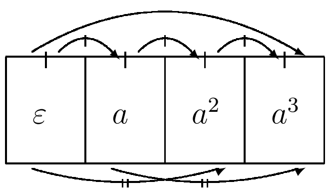
5. Доведення теореми 1. Нагадаємо, що петлею називається стрілка початкова і кінцева вершини якої збігаються. З формальних причин надалі під стрілкою ми розуміємо будь яку стрілку, що не є петлею.

Розглянемо спочатку графи, які складаються лише з точок і не мають петель або стрілок. Згідно леми 2 кількість точок менша, або рівна чотирьом. Це відповідає першим чотирьом пунктам в теоремі. Перші три задачі будуть скінченного типу [2], а остання ручного [3] (вони співпадають з матричними задачами, які пов'язані з зображенням частково-впорядкованих множин, які складаються відповідно з однієї, двох, трьох та чотирьох непорівняльних точок).

Розглянемо графи, які мають хоча б одну петлю або стрілку.

1) *Випадок однієї вершини.*

В силу леми 3 нам потрібно розглядати лише графи з однією петлею (граф пункту 5 з умови теореми). Доведемо, що задача буде дикою, якщо $I =< a^4 >$. Дійсно, в цьому випадку задача отримає наступний вигляд:



.

Розглянемо четвірки матриць такого вигляду:

$$T(B,C,D) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 & E & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & E & & & E & & & & & & & \\
 & & & E & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & E & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & E & E & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & B & C & D
\end{array}\right],$$

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці. Легко бачити, що $T(B,C,D)$ і $T(B',C',D')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли трійки матриць B,C,D і B',C',D' є подібними в наступній матричній задачі:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B & C & D \\
\hline
\end{array},$$

а це дика задача (див. [4, 5]).

Задача буде дикою і у випадку $I =< a^l >$, $l > 4$.

Якщо граф має одну вершину, нам залишилося розглянути випадки, коли $l = 2$ і $l = 3$.

У першому випадку маємо задачу про зображення лінійно впорядкованої множини з двох елементів, яка має скінченний тип [2]. У другому випадку маємо три матриці A_1, A_2, A_3, для яких одночасними є елементарні перетворення як рядків так і стовпчиків та одночасні зовнішні додавання стовпчиків $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, а також допустимі додавання стовпчиків $A_1 \to A_3$. Відомо, що це задача скінченного типу [3] (у цьому легко переконатися за допомогою методу послідовного зведення матриць).

2) *Випадок двох вершин.*

2.1) Граф має одну петлю (пункт 7 з формулювання теореми).

Якщо $I =< a^3 >$, ми отримаємо задачу $M(\Lambda)$ з чотирма матрицями:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \varepsilon_1 & a & a^2 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}\ .$$

Приведемо спочатку матрицю ε_2:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & & 0 & E \\ \hline & & & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ .$$

Тоді для перших трьох матриць отримаємо задачу:

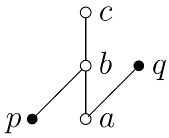
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A' & B' & C' \\ \hline A & B & C \\ \hline \end{array}\ .$$

Розглянемо наступне часткове зображення:

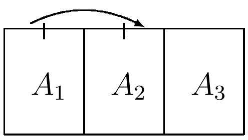
$$T(A,B,C,P,Q) = \begin{array}{|c|c|c||c|c|c||c|c|c|}\hline 0 & A & 0 & P & 0 & B & Q & C & 0 \\ \hline\hline E & & & & & & & & \\ \hline & & E & & & & & & \\ \hline & & & & E & & & & \\ \hline & & & & & & & E & E \\ \hline \end{array}\ .$$

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці.

Тоді для матриць (A, B, C, P, Q) буде задача про зображення наступної частково впорядкованої множини з відношенням еквівалентності:



$a \sim b \sim c$, $p \sim q$ відомо, що це дика задача [4,5]. Отже, для графа вигляду 7 єдиним можливим варіантом залишається $I =< a^2 >= J^2$. У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

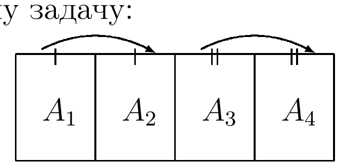


.

Відомо, що це задача скінченного типу [3].

2.2) Граф має дві петлі (пункт 8 з формулювання теореми).

Враховуючи розглянуте вище для того, щоб задача мала ручний тип необхідно, щоб $a^2 \in I$, $b^2 \in I$. Розглянемо випадок $I =< a^2, b^2 >$, помітимо, що при цьому $I = J^2$. Отримуємо наступну задачу:

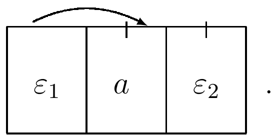


.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

За лемою 3 у випадку трьох петель задача буде дикою, бо дві з них мають спільну вершину.

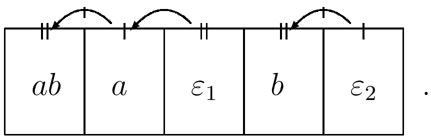
2.3) Граф має одну стрілку (пункт 9 з формулювання теореми). У цьому випадку отримаємо наступну задачу:



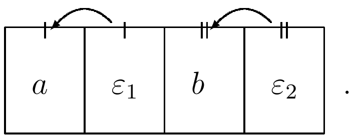
Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

2.4) Граф має дві стрілки. За лемою 3 граф з пункту 9 — єдиний можливий.

Припустимо, що $ab \notin I$, тоді ми отримаємо наступну задачу:

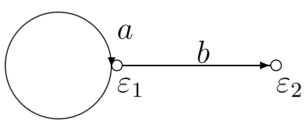


Матриці ab, b, ε_1 утворюють дику підзадачу (лема 3а). Тому необхідно, щоб $ab \in I$. Аналогічно $ba \in I$. Отже, $I \supset < ab, ba >= J^2$, тому $I =< ab, ba >= J^2$

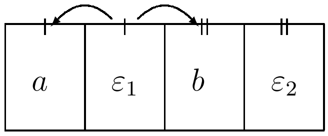


Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

2.5) Граф має одну стрілку і одну петлю. В силу леми 3 граф може мати лише наступний вигляд

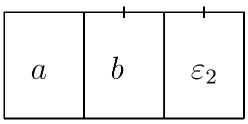


розглянемо випадок $I =< a^2, ab >= J^2$:



.

Ця задача із класу містить підзадачу



,

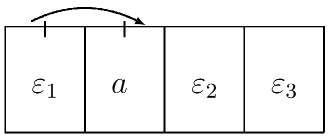
а це дика задача (див. [4, 5]).

Згідно з лемою 3 випадок, коли сума стрілок і петель більша двох розглядати не потрібно, отже випадок графа з двома вершинами повністю розглянуто.

3) *Випадок трьох вершин.*

3.1) Граф має одну петлю (пункт 11 з формулювання теореми). За доведеним для графа вигляду 7 випливає, що $a^2 \in I$, тому $I \supset < a^2 >= J^2$ тому $I =< a^2 >= J^2$.

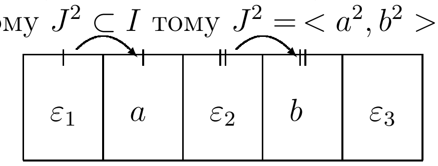
Ось матрична задача, пов'язана з такою алгеброю:



.

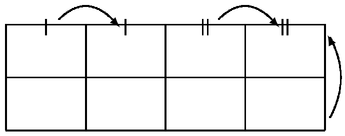
Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

3.2) Граф має дві петлі (пункт 12 з формулювання теореми). За розглянутим для випадку 7, необхідно, щоб $\{a^2, b^2\} \subset I$, тому $J^2 \subset I$ тому $J^2 =< a^2, b^2 >= I$:



.

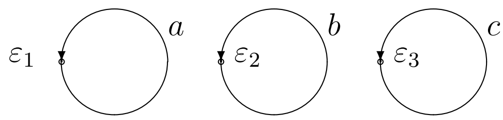
Приведемо матрицю ε_3 і отримаємо наступну матричну задачу:



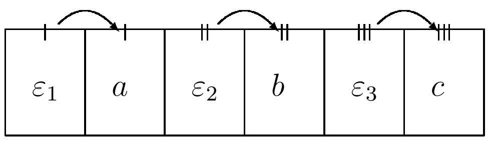
.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

3.3) Граф має три петлі , тому (за лемою 3) має вигляд:



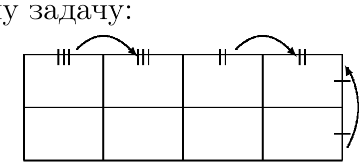
За розглянутим для випадку 7: $I =< a^2, b^2, c^2 >$:



.

Якщо розглянути частинний випадок, коли матриці ε_1 та a мають наступний вигляд:

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$, то для матриць ε_2, b, ε_3, c отримаємо наступну задачу:



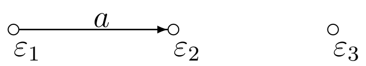
.

Розглянемо часткове зображення:

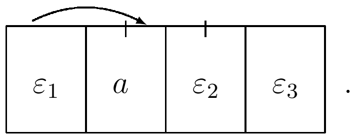
$$H(A,B,C) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & A & B & C \\ \hline E & 0 & E & 0 \\ \hline \end{array} .$$

Для матриць (A, B, C) буде задача з леми 3 пункт а), яка є дикою.

3.4) Випадок однієї стрілки. Граф має вигляд



Задача має наступний вигляд:

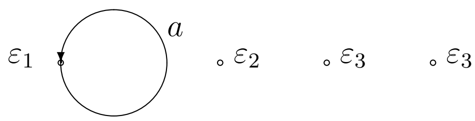


Матриці a, ε_2, ε_3 утворюють дику задачу (див. [4, 5]).

Отже, у випадку трьох точок граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох.

4) *Випадок чотирьох точок.* Граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох, згідно з розглянутим вище.

У випадку, коли немає петель, задача буде ручною (це вже розглядалося). Розглянемо випадок однієї петлі. Граф має вигляд:



Задача буде задачею про зображення частково-впорядкованої множини з інволюцією:

Це дика задача (див. [4, 5]).

Отже, у випадку чотирьох точок єдиним можливим графом є граф, у якого немає ні петель ні стрілок.

Твердження стосовно ручних випадків доведено в [7] Теорема 1 доведена.

Література

[1] *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры // "Вища школа".- 1980, 200 с.

[2] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записи научных семинаров ЛОМИ. т. 28. - С. 32-41.

[3] *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трелла // препринт 73.9. Киев: Наукова думка - 1973. 100 с.

[4] *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth// Canad. Math. Soc. Conf. Proc. — 1991. — **11**. — P. 67 – 88.

[5] *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Tame posets with equivalence relation// Contem. Math. — 1992. — **131** (part 2). — P. 237 – 251.

[6] *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения// Алгебра и анализ — 1991. — Том**3** (вып. 5). — С. 38 – 67.

[7] *Дяченко С. М.* Алгебри скінченного типу відносно односторонньої еквівалентності матриць // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. – 2006. – вип. 12-13. – С. 65–70.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 132-162

К. М. Зубрилин

Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова, Институт Математики, Экономики, Механики
E-mail: `zubrilin@rambler.ru`

p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений, индуцированные голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств

Дана робота присвячена вивченню спощуючих властивостей дифеоморфізмов дотичних розшарувань першого порядку, які індуковані голоморфно-проективними дифеоморфізмами баз. Базисними многовидами є келерови простори, а дотичні розшарування розглядаються як афіннозв'язні простори із зв'язністю повного ліфта.

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, которые индуцированы голоморфно-проективными диффеоморфизмами баз. Базисными многообразиями являются келеровы пространства, а касательные расслоения рассматриваются как аффинно-связные пространства со связностью полного лифта.

The given paper is devoted to studying of flattening properties of diffeomorphisms of tangent bundles of the first order which are induced by holomorphically projective diffeomorphisms of bases. Basic manifolds are Kählerian spaces, and tangent bundles are considered as affine connection spaces with connection of the complete lift.

1. Введение

Изучению уплощающих свойств дифференцируемых отображений посвящено несколько работ.

В работе [1] с точки зрения теории p-геодезических отображений исследованы диффеоморфизмы касательных расслоений первого и второго порядка, индуцированые геодезическими (проективными) диффеоморфизмами базисных многообразий. Расслоения наделенны полными лифтами аффинных связностей на базах. Группы Ли таких преобразований рассмотрены в работе [2] .

В работе [3] изучены уплощающие свойства преобразований касательного расслоения первого порядка, индуцированые концикулярными преобразованиями базы. Базисным многообразием является (псевдо)риманово пространство, а касательное расслоение наделено полным лифтом аффинной связности. Здесь же обнаружены определенные геометрические особенности групп Ли таких преобразований в рамках теории p-геодезических отображений.

Уплощающие свойства сечений касательного расслоения первого порядка относительно связности полного лифта выявлены в работе [4].

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, которые индуцированы голоморфно-проективными диффеоморфизмами баз. Базисными многообразиями являются келеровы пространства, а касательные расслоения рассматриваются как аффинно-связные пространства со связностью полного лифта.

Основные определения второго пункта взяты из [2] и [3]. Теорема этого пункта показывает, что изучение уплощающих свойств диффеоморфизмов сводится к изучению уплощающих свойств произвольной геодезической кривой относительно специальной связности-захвата аффинной связности.

В третьем пункте рассматриваются голоморфно-проективные диффеоморфизмы келеровых пространств. Определения и основные результаты взяты из [5]. Рассмотрены геометрические свойства аналитически- планарных кривых с точки зрения теории p-геодезических кривых. Изучены уплощающие свойства голоморфно-проективных диффеоморфизмов.

Четвертый пункт является ключевым. Здесь приводится вспомогательная лемма, которая используется для нахождения кривизн произвольной геодезической кривой в касательном расслоении первого порядка относительно захвата аффинной связности. Отсюда уже получается основная теорема об уплощающих свойствах диффеоморфизма касательных расслоений со связностью горизонтального лифта, который индуцирован голоморфно-проективным диффеоморфизмом баз. Определения и основные свойства лифтов взяты из [7].

2. P-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Приведем необходимые сведения из теории p-геодезических отображений.

Рассмотрим гладкое многообразие M с аффинной связностью ∇ без кручений. Пусть $\mathscr{C}$ гладкая кривая в M и $\gamma\colon (a,b) \to M$ ее параметризация, причём ξ — поле касательных векторов вдоль $\mathscr{C}$, $\xi_1 = \nabla_\gamma \xi$ — поле векторов 1-ой кривизны вдоль $\mathscr{C}$, $\xi_q = \nabla_\gamma \xi_{q-1}$ — поле векторов q-ой кривизны вдоль $\mathscr{C}$.

Определение 1. *Говорят, что кривая $\mathscr{C}$ в точке $x = \gamma(t_0)$ имеет уплощение q-го порядка, если в точке x векторы $\xi, \xi_1, ..., \xi_{q-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi, \xi_1, ..., \xi_{q-1}, \xi_q$ линейно зависимы.*

Если кривая $\mathscr{C}$ в каждой своей точке имеет уплощение p-го порядка, то она называется *p-геодезической* кривой.

Точка $x = \gamma(t_0)$ кривой $\mathscr{C}$ называется *граничной точкой уплощения*, если в каждой окрестности точки x есть хотя бы одна точка кривой $\mathscr{C}$, в которой порядок уплощения отличается от порядка уплощения в точке x. Учитывая свойства внешнего произведения, получим, что точка x кривой $\mathscr{C}$ имеет уплощение p-го порядка тогда и только тогда, когда в точке x выполняются условия:

$$(103) \quad \xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{p-1} \neq 0, \qquad \xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{p-1} \wedge \xi_p = 0.$$

Значит, что бы кривая $\mathscr{C}$ была p-геодезической необходимо и достаточно выполнения условий (103) вдоль кривой $\mathscr{C}$.

С другой стороны, из свойств линейной зависимости и линейной независимости векторов следует, что вдоль p-геодезической кривой $\mathscr{C}$ должно выполнятся равенство:

$$(104) \qquad \xi_p = \alpha_0 \xi + \alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_{p-1} \xi_{p-1}$$

где α_0, α_1, ... , α_{p-1} — некоторые функции, определённые вдоль кривой $\mathscr{C}$.

Рассматривая ξ, ξ_1, ... , ξ_{p-1}, ξ_p - как дифференциальные операторы от параметра t, а функции α_0, α_1, ... , α_{p-1} — как функции от параметра t, равенство (104) представляет собой дифференциальное уравнение p-геодезической кривой $\mathscr{C}$.

Пусть (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ аффинно-связные пространства.

Определение 2. *Диффеоморфизм $\mu \colon M \to \bar{M}$ двух аффинно-связных пространств без кручения называется p-геодезическим, если для каждой геодезической кривой $\mathscr{C}$*

в M, её образ $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ является кривой, каждая точка которой имеет уплощение порядка $q \leqslant p$. Число q зависит как от выбора кривой $\mathscr{C}$, так и от выбора точки на ней, а число p фиксировано и является наибольшим из всех q.

p-геодезический диффеоморфизм (на себя) $\pi\colon M \to M$ называется p-геодезическим конечным преобразованием аффинно-связного пространства (M, ∇).

Исходя из определения 1, следует, что геометрически p-геодезические диффеоморфизмы характеризуются тем, что они геодезические кривые преобразуют в кривые, которые на отдельных участках (дугах) являются q-геодезическими кривыми, причём $q \leqslant p$.

Чтобы определить порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ по определению, необходимо для каждой геодезической кривой $\mathscr{C}$ в M найти наибольший из порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$. Затем из найденных чисел выбрать наибольшее. Это и будет порядок уплощения диффеоморфизма μ.

Нахождение порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\mathscr{C}}$ можно свести к нахождению порядков уплощения соответствующих точек геодезической кривой $\mathscr{C}$ относительно специальной связности на многообразии M — захвата аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1} (см. [6] стр. 189, §30, роз 3).

Захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ диффеоморфизмом μ^{-1} определяется как аффинная связность $\widetilde{\nabla}$ на многообразии M правилом

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right),$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\mu\colon M \to \bar{M}$ *диффеоморфизм многообразий,* $\bar{\nabla}$ *— аффинная связность на* $\bar{M}$*,* $\widetilde{\nabla}$ *— захват связности* $\bar{\nabla}$ *диффеоморфизмом* μ^{-1}*,* $\mathscr{C}$ *— гладкая кривая в* M*, и* $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ *— кривая образ в* $\bar{M}$*.*

Для того, чтобы кривая $\mathscr{C}$ *в произвольной точке* $x \in \mathscr{C}$ *имела уплощение порядка* k *относительно захвата* $\widetilde{\nabla}$*, необходимо и достаточно, что бы порядок уплощения кривой образа* $\bar{\mathscr{C}}$ *в соответствующей точке* $\mu(x)$ *был равен* k*.*

Таким образом, порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ равен наибольшему из порядков уплощения точек всех геодезических кривых в M. Эти порядки уплощения находятся относительно аффинной связности захвата.

Нетрудно показать, что правило $P(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, определяет тензорное поле $P \in \mathfrak{T}^0_2(M)$. Это тензорное поле тесно связано с тензором аффинной деформации H диффеоморфизма μ (см. [6] стр. 153, §23, роз. 3) равенством $\mu_*(P(X,Y)) = H(X,Y)$. По этой причине, тензорное поле P так же будем называть тензором аффинной деформации диффеоморфизма μ.

Тогда для произвольного гладкого векторного поля χ, заданного вдоль гладкой кривой $\mathscr{C}$, справедливо равенство

$$\widetilde{\nabla}_t \chi = \nabla_t \chi + P(\xi, \chi), \tag{105}$$

где ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$. Это равенство можно использовать для нахождения кривизн $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$, ... геодезической кривой $\mathscr{C}$ относительно аффинной связности захвата $\widetilde{\nabla}$. Если геодезическая кривая отнесена к каноническому параметру, то $\nabla_t \xi = 0$. С учетом этого получим

$$\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\nabla}_t \xi = \nabla_t \xi + P(\xi, \xi) = P(\xi, \xi),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_2 =&\widetilde{\nabla}_t\widetilde{\xi}_1 = \nabla_t\widetilde{\xi}_1 + P(\xi,\widetilde{\xi}_1) = \nabla_t P(\xi,\xi) + P(\xi, P(\xi,\xi)) = \\ =&\nabla P(\xi,\xi,\xi) + P(\nabla_t\xi,\xi) + P(\xi,\nabla_t\xi) + P(\xi,P(\xi,\xi)) = \\ =&\nabla P(\xi,\xi,\xi) + P(\xi,P(\xi,\xi)),\end{aligned}$$

и так дальше.

3. Голоморфно - проективные диффеоморфизмы

Определение 3. *Структурой келерова пространства на многообразии M называется пара (g,F) состоящая из метрического тензора g на M, и аффинора F на M, удовлетворяющего условиям*

(1) *Выполняется равенство*

$$F^2 = \varepsilon\delta,$$

где δ — единичный аффинор на M и $\varepsilon = \pm 1$.

(2) *Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется равенство*

$$g(X,FY) + g(FX,Y) = 0.$$

(3) *Выполняется равенство*

$$\nabla F = 0,$$

где ∇ — аффинная связность метрического тензора g.

Многообразие M с фиксированной структурой келерова пространства (g,F) называется *келеровым пространством*. Ясно, что (M,g) является римановым пространством. При $\varepsilon = -1$ келерово пространство называется *эллиптическим*, а при $\varepsilon = 1$ — *гиперболическим*.

Определение 4. *Кривая $\mathscr{C}$ келерова пространства (M, g, F) называется аналитически-планарной* (Т. Отсуки, Я. Таширо)*, если при параллельном перенесении касательного вектора вдоль этой кривой, он лежит в двумерной площадке, образованной этим вектором и сопряженным с ним.*

С точки зрения теории p-геодезический кривых, аналитически - планарная кривая характеризуется как кривая, которая в каждой своей точке имеет уплощение порядка не выше второго.

Определение 5. *Диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ келерова пространства (M, g, F) на келерово пространство $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$ называется голоморфно- проективным, если все аналитически-планарные кривые пространства M переходят в аналитически-планарные кривые пространства $\bar{M}$.*

В [5] найдены необходимые и достаточные условия голоморфно-проективного диффеоморфизма келеровых пространств. Именно, в общей по диффеоморфизму системе координат, в соответствующих точках выполняются условия

$$\begin{gathered}\bar{F}^h_i = F^h_i,\\ \bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \beta_i\delta^h_j + \beta_j\delta^h_i + \varepsilon\beta_{\bar{i}}\delta^h_{\bar{j}} + \varepsilon\beta_{\bar{j}}\delta^h_{\bar{i}},\end{gathered} \tag{106}$$

где β — некоторый ковектор на M,

$$\beta_{\bar{i}} = \beta_\alpha F^\alpha_i, \quad \delta^h_{\bar{i}} = F^h_i,$$

Γ^h_{ij} (соотв. $\bar{\Gamma}^h_{ij}$) — компоненты связности Леви-Чивитты ∇ (соотв. $\bar{\nabla}$) отвечающей метрике g (соотв. $\bar{g}$).

Пусть $\widetilde{\nabla}$ — захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1} (см. [6]). Тогда равенство (106) можно записать в инвариантной форме

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \tag{107}$$

где $\bar{\beta} = \beta \circ F$ — ковекторное поле, сопряженное ковекторному полю β, X и Y произвольные векторные поля на M.

Отсюда получим тензор аффинной деформации P голоморфно- проективного диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$

$$P(X, Y) = \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X). \tag{108}$$

Выясним уплощающие свойства голоморфно-проективного диффеоморфизма.

Теорема 2. *Голоморфно-проективный диффеоморфизм келеровых пространств, описываемый уравнением*

$$\begin{aligned} \mu_* F &= \bar{F}, \\ P(X, Y) &= \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \end{aligned}$$

обладает следующими уплощающими свойствами:

(1) *При $\beta = 0$ голоморфно-проективный диффеоморфизм является аффинным диффеоморфизмом.*
(2) *В общем случае, при $\beta \neq 0$, голоморфно-проективный диффеоморфизм является 2-геодезическим диффеоморфизмом.*

Доказательство. Возьмем в келеровом пространстве M произвольную геодезическую кривую $\mathscr{C}$ отнесенную к каноническому параметру t. Тогда $\nabla_t \xi = 0$, где ξ —

поле касательных векторов геодезической кривой $\mathscr{C}$. Найдем кривизны кривой $\mathscr{C}$ относительно аффинной связности $\widetilde{\nabla}$. Поле первой кривизны

$$\widetilde{\xi}_1 = 2\beta(\xi)\delta(\xi) + 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)F(\xi).$$

Находим поле второй кривизны

$$\widetilde{\xi}_2 = \widetilde{\nabla}_t\widetilde{\xi}_1 = \nabla_t\widetilde{\xi}_1 + P(\xi, \widetilde{\xi}_1).$$

Поскольку $\beta(F(\xi)) = (\beta \circ F)(\xi) = \bar{\beta}(\xi)$, $F(F(\xi)) = F^2(\xi) = \varepsilon\delta(\xi)$ и $\bar{\beta}(F(\xi)) = (\beta \circ F)(F(\xi)) = \beta(F^2(\xi)) = \varepsilon\beta(\xi)$, то

$$P(\xi, \widetilde{\xi}_1) = \left(4\beta(\xi)^2 + 4\varepsilon\bar{\beta}(\xi)^2\right)\delta(\xi) + 8\varepsilon\beta(\xi)\bar{\beta}(\xi)F(\xi).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_2 =& 2\left((\nabla\beta)(\xi,\xi) + 2\beta(\xi)^2 + 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)^2\right)\delta(\xi) + \\ &+ 2\varepsilon\left((\nabla\bar{\beta})(\xi,\xi) + 4\beta(\xi)\bar{\beta}(\xi)\right)F(\xi).\end{aligned}$$

Из полученных выражений для векторов кривизн, будем иметь

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)\,\delta(\xi) \wedge F(\xi), \qquad \xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 = 0. \tag{109}$$

Равенства (109) завершают доказательство теоремы.

4. Диффеоморфизмы, индуцированные голоморфно -проективными диффеоморфизмами баз

Будем предпологать, что касательные расслоения являются аффинно связными пространствами $(T(M), \nabla^C)$ и $(T(\bar{M}), \bar{\nabla}^C)$ со связностями полных лифтов ∇^C и $\bar{\nabla}^C$ соответственно (см. [7]).

Теорема 3. *Пусть* $\mu\colon M \to \bar{M}$ *диффеоморфизм многообразия* M *на аффинно-связное пространство* $(\bar{M}, \bar{\nabla})$, $\widetilde{\nabla}$

— захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1}, и $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$ индуцированный диффеоморфизм касательных расслоений.

Тогда захват $\widetilde{\bar{\nabla}^C}$ полного лифта $\bar{\nabla}^C$ индуцированным диффеоморфизмом μ_*^{-1} совпадает с лифтом $\widetilde{\nabla}^C$ захвата $\widetilde{\nabla}$.

Доказательство. По определению захвата, для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, выполняются равенства

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right),$$

и

$$\widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C = (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}^C_{(\mu_*)_* X^C}(\mu_*)_* Y^C\right).$$

По свойствам полного лифта для произвольных векторных полей X, Y, Z на M выполняются равенства

$$(\mu_*)_* X^C = (\mu_* X)^C,$$
$$(\mu_*)_* Y^C = (\mu_* Y)^C,$$
$$(\mu_*)_*^{-1} Z^C = (\mu_*^{-1} Z)^C.$$

Учитывая это, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C &= (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}^C_{(\mu_* X)^C}(\mu_* Y)^C\right) = \\ &= (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right)^C = \\ &= \left(\mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right)\right)^C = \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^C = \widetilde{\nabla}^C_{X^C} Y^C,\end{aligned}$$

что влечет равенство $\widetilde{\bar{\nabla}^C} = \widetilde{\nabla}^C$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Полный лифт P^C тензора аффинной деформации P диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ является тензором аффинной деформации $\widetilde{P}$ индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается непосредственно из определений и предыдущей теоремы. Для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ получим

$$\begin{aligned}\widetilde{P}\left(X^C, Y^C\right) =& \widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C - \nabla^C_{X^C} Y^C = \widetilde{\nabla}^C_{X^C} Y^C - \nabla^C_{X^C} Y^C = \\ &= \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^C - (\nabla_X Y)^C = \left(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right)^C = \\ &= (P(X,Y))^C = P^C\left(X^C, Y^C\right),\end{aligned}$$

что влечет требуемое.

Теперь перейдем к изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, индуцированных голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств.

Пусть всюду в этом пункте $\mu\colon M \to \bar{M}$ голоморфно-проективный диффеоморфизм келеровых пространств (M, g, F) и $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$, P — тензор аффинной деформации диффеоморфизма μ. Тогда, в силу теоремы 4, полный лифт P^C является тензором аффинной деформации $\widetilde{P}$ индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$. Для произвольных векторных полей X и Y на M, используя свойства лифтов, находим

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(X^C, Y^C) =& P^C(X^C, Y^C) = P(X,Y)^C = \\ &= \beta^C(X^C)\delta^V(Y^C) + \beta^V(X^C)\delta(Y^C) + \\ &\quad + \beta^C(Y^C)\delta^V(X^C) + \beta^V(Y^C)\delta(X^C) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}^C(X^C)F^V(Y^C) + \varepsilon\bar{\beta}^V(X^C)F^C(Y^C) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}^C(Y^C)F^V(X^C) + \varepsilon\bar{\beta}^V(Y^C)F^C(X^C).\end{aligned}$$

Для нахождения кривизн нам понадобиться следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть вдоль геодезической кривой $\mathscr{C}$, отнесенной к каноническому параметру t, задано векторное поле χ вида*

$$\chi = a \cdot \delta(\xi) + b \cdot \delta^V(\xi) + c \cdot F^C(\xi) + d \cdot F^V(\xi),$$

где ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$, а функции a, b, c и d определяются правилом: существуют такие тензорные поля $R, \bar{R} \in \mathfrak{T}^0_r(M)$, что

$$a = 2R^V(\xi, ..., \xi), \quad b = 2R^C(\xi, ..., \xi),$$
$$c = 2\varepsilon \bar{R}^V(\xi, ..., \xi), \quad d = 2\varepsilon \bar{R}^C(\xi, ..., \xi).$$

Тогда ковариантная производная $\widetilde{\nabla}^C_t \chi$ имеет вид

$$\widetilde{\nabla}^C_t \chi = a' \cdot \delta(\xi) + b' \cdot \delta^V(\xi) + c' \cdot F^C(\xi) + d' \cdot F^V(\xi),$$

где функции a', b', c' и d' определяются правилом:

$$a' = 2R'^V(\xi, ..., \xi), \quad b' = 2R'^C(\xi, ..., \xi),$$
$$c' = 2\varepsilon \bar{R}'^V(\xi, ..., \xi), \quad d' = 2\varepsilon \bar{R}'^C(\xi, ..., \xi),$$

а тензорные поля $R', \bar{R}' \in \mathfrak{T}^0_{r+1}(M)$ имеют вид

$$R' = \nabla R + 2R \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{R} \otimes \bar{\beta}, \quad \bar{R}' = \nabla \bar{R} + 2\bar{R} \otimes \beta + 2R \otimes \bar{\beta}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3, если $\widetilde{\nabla}$ захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1}, то полный лифт $\widetilde{\nabla}^C$ является захватом полного лифта $\bar{\nabla}^C$ индуцированным диффеоморфизмом μ_*^{-1}. Тогда, ковариантная производная векторного поля χ, относительно связности полного лифта $\widetilde{\nabla}^C$, определяется равенством

$$\widetilde{\nabla}^C_t \chi = \nabla^C_t + \widetilde{P}(\xi, \chi),$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\xi,\chi) = \beta^C(\xi)\delta^V(\chi) + \beta^V(\xi)\delta(\chi) + \beta^C(\chi)\delta^V(\xi) +\\ + \beta^V(\chi)\delta(\xi) + \varepsilon\bar{\beta}^C(\xi)F^V(\chi) + \varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)F^C(\chi) +\\ + \varepsilon\bar{\beta}^C(\chi)F^V(\xi) + \varepsilon\bar{\beta}^V(\chi)F^C(\xi).\end{aligned}$$

Тогда с одной стороны

$$\begin{aligned}\nabla_t^C\chi =& \nabla_t^C a\cdot\delta(\xi) + a\cdot\nabla^C\delta(\xi,\xi) + a\cdot\delta(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C b\cdot\delta^V(\xi) + b\cdot\nabla^C\delta^V(\xi,\xi) + b\cdot\delta^V(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C c\cdot F^C(\xi) + c\cdot\nabla^C F^C(\xi,\xi) + c\cdot F^C(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C d\cdot F^V(\xi) + d\cdot\nabla^C F^V(\xi,\xi) + d\cdot F^V(\nabla_t^C\xi).\end{aligned}$$

Поскольку геодезическая кривая $\mathscr{C}$ отнесена к каноническому параметру t, то $\nabla_t^C\xi = 0$. Кроме того, в силу свойств лифтов, получим

$$\nabla^C\delta = 0, \qquad \nabla^C\delta^V = (\nabla\delta)^V = 0,$$
$$\nabla^C F^C = (\nabla F)^C = 0, \qquad \nabla^C F^V = (\nabla F)^V = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\nabla_t^C\chi = \nabla_t^C a\cdot\delta(\xi) + \nabla_t^C b\cdot\delta^V(\xi) +\\ + \nabla_t^C c\cdot F^C(\xi) + \nabla_t^C d\cdot F^V(\xi).\end{aligned}\tag{110}$$

С другой стороны, поскольку

$$\delta^V\delta = \delta^V, \quad \delta^V\delta^V = 0, \quad \delta^V F^C = (\delta F)^V = F^V, \quad \delta^V F^V = 0$$

то

$$\delta^V(\chi) = a\delta^V(\xi) + cF^V(\xi).\tag{111}$$

Аналогично

$$\delta(\chi) = a\delta(\xi) + b\delta^V(\xi) + cF^C(\xi) + dF^V(\xi).\tag{112}$$

По свойству лифтов

$$\beta^V \circ \delta^V = 0, \quad \beta^V \circ F^C = (\beta \circ F)^V = \bar{\beta}^V = 0, \quad \beta^V \circ F^V = 0,$$

имеем

$$\beta^V(\chi) = a\beta^V(\xi) + c\bar{\beta}^V(\xi). \tag{113}$$

По свойству лифтов

$$\beta^C \circ \delta^V = \beta^V, \quad \beta^C \circ F^C = (\beta \circ F)^C = \bar{\beta}^C,$$
$$\beta^C \circ F^V = (\beta \circ F)^V = \bar{\beta}^V,$$

имеем

$$\beta^C(\chi) = a\beta^C(\xi) + b\beta^V(\xi) + c\bar{\beta}^C(\xi) + d\bar{\beta}^V(\xi). \tag{114}$$

По свойствам лифтов

$$F^V\delta^V = 0, \quad F^V F^C = (F\ F)^V = \varepsilon\delta^V, \quad F^V F^V = 0,$$

имеем

$$F^V(\chi) = aF^V(\xi) + c\varepsilon\delta^V(\xi). \tag{115}$$

По свойствам лифтов

$$F^C\delta^V = (F\delta)^V = F^V, \quad F^C F^C = (F\ F)^C = \varepsilon\delta,$$
$$F^C F^V = (F\ F)^V = \varepsilon\delta^V,$$

имеем

$$F^C(\chi) = aF^C(\xi) + bF^V(\xi) + c\varepsilon\delta(\xi) + d\varepsilon\delta^V(\xi). \tag{116}$$

Учитывая свойства лифтов

$$\bar{\beta}^C \circ \delta^V = \bar{\beta}^V, \quad \bar{\beta}^C \circ F^C = (\bar{\beta} \circ F)^C = \varepsilon\beta^C,$$
$$\bar{\beta}^C \circ F^V = (\bar{\beta} \circ F)^V = \varepsilon\beta^V,$$

получим

$$\bar{\beta}^C(\chi) = a\bar{\beta}^C(\xi) + b\bar{\beta}^V(\xi) + c\varepsilon\beta^C(\xi) + d\varepsilon\beta^V(\xi). \tag{117}$$

По свойствам лифтов

$$\bar{\beta}^V \circ \delta^V = 0, \qquad \bar{\beta}^V \circ F^C = (\bar{\beta} \circ F)^V = \varepsilon \beta^V, \qquad \bar{\beta}^V \circ F^V = 0,$$

имеем

$$\bar{\beta}^V(\chi) = a\bar{\beta}^V(\xi) + c\varepsilon\beta^V(\xi). \tag{118}$$

Из равенств (111), (112), (113), (114), (115), (116), (117) и (118), будем иметь

$$\begin{gathered}\widetilde{P}(\xi,\chi) = \big(2a\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^V(\xi)\big)\,\delta(\xi) + \\ + \big(2a\beta^C(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^C(\xi) + 2d\bar{\beta}^V(\xi)\big)\,\delta^V(\xi) + \\ + \big(2c\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)\big)\,F^C(\xi) + \\ + \big(2c\beta^C(\xi) + 2d\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^C(\xi) + 2b\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)\big)\,F^V(\xi).\end{gathered} \tag{119}$$

Из равенств (110) и (119) получим

$$\widetilde{\nabla}_t^C \chi = a' \cdot \delta(\xi) + b' \cdot \delta^V(\xi) + c' \cdot F^C(\xi) + d' \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a' &= \nabla_t^C a + 2a\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^V(\xi), \\ b' &= \nabla_t^C b + 2a\beta^C(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^C(\xi) + 2d\bar{\beta}^V(\xi), \\ c' &= \nabla_t^C c + 2c\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi), \\ d' &= \nabla_t^C d + 2c\beta^C(\xi) + 2d\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^C(\xi) + 2b\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi). \end{aligned} \tag{120}$$

Учитывая условие леммы, будем иметь для функции a'

$$\begin{aligned}a' &= \nabla_t^C\left(2R^V(\xi,...,\xi)\right)+4R^V(\xi,...,\xi)\beta^V(\xi)+\\&\quad+4\varepsilon\bar{R}^V(\xi,...,\xi)\bar{\beta}^V(\xi)=\\&=2\left(\nabla^C R^V\right)(\xi,...,\xi,\xi)+\\&\quad+\ 2R^V\left(\nabla_t^C\xi,...,\xi\right)+...+2R^V\left(\xi,...,\nabla_t^C\xi\right)+\\&\quad+\ 4\left(R^V\otimes\beta^V\right)(\xi,...,\xi,\xi)+4\varepsilon\left(\bar{R}^V\otimes\bar{\beta}^V\right)(\xi,...,\xi,\xi)=\\&=2\left(\nabla R+2R\otimes\beta+2\varepsilon\bar{R}\otimes\bar{\beta}\right)^V(\xi,...,\xi,\xi)=\\&=2R'^V(\xi,...,\xi,\xi).\end{aligned}$$

Проводя подобные рассуждения, получим выражение для функции b'

$$\begin{aligned}b' &= 2\left(\nabla R+2R\otimes\beta+2\varepsilon\bar{R}\otimes\bar{\beta}\right)^C(\xi,...,\xi,\xi)=\\&=2R'^C(\xi,...,\xi,\xi).\end{aligned}$$

Аналогично находим выражение для функции c'

$$\begin{aligned}c' &= 2\varepsilon\left(\nabla\bar{R}+2\bar{R}\otimes\beta+2R\otimes\bar{\beta}\right)^V(\xi,...,\xi,\xi)=\\&=2\varepsilon\bar{R}'^V(\xi,...,\xi,\xi),\end{aligned}$$

и для функции d'

$$\begin{aligned}d' &= 2\varepsilon\left(\nabla\bar{R}+2\bar{R}\otimes\beta+2R\otimes\bar{\beta}\right)^C(\xi,...,\xi,\xi)=\\&=2\varepsilon\bar{R}'^C(\xi,...,\xi,\xi),\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

З а м е ч а н и е. Тензорные поля R, $\bar{R}\in\mathfrak{T}_r^0(M)$ и R', $\bar{R}'\in\mathfrak{T}_{r+1}^0(M)$ между собой тесно связаны. Именно, *если для любых векторных полей X_1, X_2, ..., X_r из $\mathfrak{X}(M)$ выполняется равенство,*

$$\bar{R}\left(X_1,X_2,...,X_r\right)=R\left(F\left(X_1\right),X_2,...,X_r\right),$$

то для произвольных векторных полей $X_1, X_2, ..., X_{r+1}$ *из* $\mathfrak{X}(M)$ *выполняется равенство*

$$\bar{R}'\left(X_1, X_2, ..., X_{r+1}\right) = R'\left(F\left(X_1\right), X_2, ..., X_{r+1}\right).$$

Для доказательства основной теоремы нам понадобиться следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $T \in \mathfrak{T}_r^0(E)$ *и* $P \in \mathfrak{T}_s^0(E)$ *симметрические тензоры, причем* $T \neq 0$. *Пусть для тензора* R *через* $S(R)$ *обозначается симметрирование. Тогда из равенства* $S(T \otimes P) = 0$ *следует равенство* $P = 0$.

Доказательство. Поскольку симметричный тензор T не равен нулю, то найдется такой вектор $Y \in E$, что $T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \neq 0$. Возьмем произвольный вектор $X \in E$. Из определения симметрирования и равенства $S(T \otimes P) = 0$ будем иметь

$$0 = S(T \otimes P)(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}, \underbrace{Y, ..., Y}_{s}) = T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \cdot P(\underbrace{Y, ..., Y}_{s}).$$

Поскольку $T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \neq 0$, то

$$P(\underbrace{Y, ..., Y}_{s}) = 0. \tag{121}$$

Учитывая равенство (121), получим

$$\begin{aligned}
0 = S\,(T\otimes P)\,(\underbrace{Y,...,Y}_{r},X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}) = \\
= s\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1})+ \\
+\,r\cdot T(X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-1})\cdot P(\underbrace{Y,...,Y}_{s}) = \\
= s\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}).
\end{aligned}$$

Поскольку $s\neq 0$ и $T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\neq 0$, то

$$P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}) = 0. \tag{122}$$

Учитывая равенства (121) и (122), будем иметь

$$\begin{aligned}
0 =& S\,(T\otimes P)\,(\underbrace{Y,...,Y}_{r},X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2}) = \\
=& C_s^2\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2})+ \\
&+C_r^1\cdot C_s^1\cdot T(X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-1})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1})+ \\
&+C_r^2\cdot T(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-2})\cdot P(\underbrace{Y,...,Y}_{s}) = \\
=& C_s^2\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2}).
\end{aligned}$$

Поскольку $C_s^2 \neq 0$ и $T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \neq 0$, то

$$P(X, X, \underbrace{Y, ..., Y}_{s-2}) = 0. \tag{123}$$

Продолжая так дальше, на шаге $k \leqslant s$ получим

$$P(\underbrace{X, ..., X}_{k}, \underbrace{Y, ..., Y}_{s-k}) = 0. \tag{k}$$

При $k = s$, получим $P(\underbrace{X, ..., X}_{s}) = 0$. Из симметричности тензора P и произвольности вектора $X \in E$, находим $P = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть голоморфно-проективный диффеоморфизм* $\mu\colon M \to \bar{M}$ *келеровых пространств* (M, g, F) *и* $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$ *описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \mu_* F &= \bar{F}, \\ P(X, Y) &= \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \end{aligned}$$

где β *— некоторый ковектор на* M, $\bar{\beta} = \beta \circ F$, *и* X, Y *произвольные векторные поля на* M.

Тогда индуцированный диффеоморфизм

$$\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$$

касательных расслоений со связностями полных лифтов ∇^C *и* $\bar{\nabla}^C$ *имеет линейный тип и обладает следующими уплощающими свойствами.*

(1) *Индуцированный диффеоморфизм* μ_* *является 1–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$\beta = 0,$$

то есть когда диффеоморфизм μ является аффинным. При этом и диффеоморфизм μ_* будет аффинным.

(2) *Индуцированный диффеоморфизм μ_* является 2–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\beta \neq 0, \quad \nabla\beta + 2\beta \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{\beta} \otimes \bar{\beta} = 0.$$

(3) *Индуцированный диффеоморфизм μ_* является 3–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\beta \neq 0, \quad T_2 \neq 0, \quad S\left(\begin{vmatrix} \beta^C & \bar{\beta}^V & \bar{\beta}^C \\ {T_2}^C & {\bar{T}_2}^V & {\bar{T}_2}^C \\ {T_3}^C & {\bar{T}_3}^V & {\bar{T}_3}^C \end{vmatrix}\right) = 0.$$

(4) *В общем случае, индуцированный диффеоморфизм μ_* является 4–геодезическим диффеоморфизмом линейного типа.*

Доказательство. Возьмем в M произвольным образом геодезическую кривую $\mathscr{C}$ отнесенную к каноническому параметру t, и найдем кривизны этой кривой относительно связности полного лифта $\widetilde{\nabla}^C$.

Пусть ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$. Рассмотрим две функции $T_0, \bar{T}_0 \in \mathfrak{T}^0_0(M)$ определяемые правилом $T_0 = \frac{1}{2}$, $\bar{T}_0 = 0$. Тогда очевидно $T_0^V = \frac{1}{2}$, $T_0^C = 0$, $\bar{T}_0^V = 0$, $\bar{T}_0^C = 0$. С учетом этого, поле касательных векторов ξ представляется в виде

$$\xi = a_0 \cdot \delta(\xi) + b_0 \cdot \delta^V(\xi) + c_0 \cdot F^C(\xi) + d_0 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$a_0 = 2T_0^V, \quad b_0 = 2T_0^C, \quad c_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^V, \quad d_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^C.$$

Это показывает, что поле касательных векторов ξ удовлетворят условию леммы 1. Применяя ее, получим первую кривизну $\widetilde{\xi}_1$

$$\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\nabla}_t^C \xi = a_1 \cdot \delta(\xi) + b_1 \cdot \delta^V(\xi) + c_1 \cdot F^C(\xi) + d_1 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2T_1^V(\xi), & b_1 &= 2T_1^C(\xi), \\ c_1 &= 2\varepsilon \bar{T}_1^V(\xi), & d_1 &= 2\varepsilon \bar{T}_1^C(\xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_1, \bar{T}_1 \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_1 &= \nabla T_0 + 2T_0 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_0 \otimes \bar{\beta} = \beta, \\ \bar{T}_1 &= \nabla \bar{T}_0 + 2\bar{T}_0 \otimes \beta + 2T_0 \otimes \bar{\beta} = \bar{\beta}. \end{aligned}$$

К векторному полю $\widetilde{\xi}_1$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для второй кривизны

$$\widetilde{\xi}_2 = \widetilde{\nabla}_t^C \widetilde{\xi}_1 = a_2 \cdot \delta(\xi) + b_2 \cdot \delta^V(\xi) + c_2 \cdot F^C(\xi) + d_2 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= 2T_2^V(\xi, \xi), & b_2 &= 2T_2^C(\xi, \xi), \\ c_2 &= 2\varepsilon \bar{T}_2^V(\xi, \xi), & d_2 &= 2\varepsilon \bar{T}_2^C(\xi, \xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_2, \bar{T}_2 \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_2 &= \nabla T_1 + 2T_1 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_1 \otimes \bar{\beta} = \nabla \beta + 2\beta \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{\beta} \otimes \bar{\beta}, \\ \bar{T}_2 &= \nabla \bar{T}_1 + 2\bar{T}_1 \otimes \beta + 2T_1 \otimes \bar{\beta} = \nabla \bar{\beta} + 2\bar{\beta} \otimes \beta + 2\beta \otimes \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Согласно замечанию к лемме 1 из определения $\bar{\beta}(X) = \beta(F(X))$, получим равенство $\bar{T}_2(X, Y) = T_2(F(X), Y)$. Кроме того, тензорное поле T_2 является симметрическим. Это получается из следующих соображений. Ковекторное поле β, которое входит в уравнения голоморфно-проективного диффеоморфизма, является градиентным (см. [5]). Из определения тензорного поля T_2 получим требуемое.

К векторному полю $\widetilde{\xi}_2$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для третьей кривизны

$$\widetilde{\xi}_3 = \widetilde{\nabla}^C_t \widetilde{\xi}_2 = a_3 \cdot \delta(\xi) + b_3 \cdot \delta^V(\xi) + c_3 \cdot F^C(\xi) + d_3 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$a_3 = 2T_3^V(\xi,\xi,\xi), \quad b_3 = 2T_3^C(\xi,\xi,\xi),$$
$$c_3 = 2\varepsilon\bar{T}_3^V(\xi,\xi,\xi), \quad d_3 = 2\varepsilon\bar{T}_3^C(\xi,\xi,\xi).$$

а тензорные поля $T_3, \bar{T}_3 \in \mathfrak{T}_3^0(M)$ определяются правилом

$$T_3 = \nabla T_2 + 2T_2 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_2 \otimes \bar{\beta},$$
$$\bar{T}_3 = \nabla \bar{T}_2 + 2\bar{T}_2 \otimes \beta + 2T_2 \otimes \bar{\beta}.$$

К векторному полю $\widetilde{\xi}_3$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для четвертой кривизны $\widetilde{\xi}_4$.

$$\widetilde{\xi}_4 = \widetilde{\nabla}^C_t \widetilde{\xi}_3 = a_4 \cdot \delta(\xi) + b_4 \cdot \delta^V(\xi) + c_4 \cdot F^C(\xi) + d_4 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$a_4 = 2T_4^V(\xi,\xi,\xi,\xi), \quad b_4 = 2T_4^C(\xi,\xi,\xi,\xi),$$
$$c_4 = 2\varepsilon\bar{T}_4^V(\xi,\xi,\xi,\xi), \quad d_4 = 2\varepsilon\bar{T}_4^C(\xi,\xi,\xi,\xi).$$

а тензорные поля $T_4, \bar{T}_4 \in \mathfrak{T}_4^0(M)$ определяются правилом

$$T_4 = \nabla T_3 + 2T_3 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_3 \otimes \bar{\beta},$$
$$\bar{T}_4 = \nabla \bar{T}_3 + 2\bar{T}_3 \otimes \beta + 2T_3 \otimes \bar{\beta}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению уплощающих свойств.

1). Очевидно

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = b_1 \cdot \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) + \\ + c_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^C(\xi) + d_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = 0 \tag{124}$$

равносильно равенствам

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 0. \tag{124$'$}$$

Равенство $c_1 = 0$ равносильно равенству $\bar{\beta}^V(\xi) = 0$. Поскольку геодезическая кривая $\mathscr{C}$ выбирается произвольным образом, последнее равенство выполняться для любого ξ, что влечет равенство $\bar{\beta}^V = 0$. Последнее равенство эквивалентно условию

$$\beta = 0. \tag{124$''$}$$

С другой стороны, равенство (124$''$) обеспечивает выполнение всех равенств в условии (124$'$). Значит, равенство (124) равносильно равенству (124$''$) .

Таким образом, индуцированный диффеоморфизм μ_* является 1–геодезическим диффеоморфизмом для касательных расслоений тогда и только тогда, когда $\beta = 0$. Отсюда получим равенство $P = 0$, которое показывает, что голоморфно-проективный диффеоморфизм μ является аффинным. При этом выполняются равенства $\beta^V = 0$, $\beta^C = 0$, $\bar{\beta}^V = 0$, $\bar{\beta}^C = 0$, из которых следует $\widetilde{P} = 0$. Это показывает, что индуцированный диффеоморфизм так же является аффинным.

2). Очевидно

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) \wedge F^C(\xi) + \\ + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) \wedge F^V(\xi) + \\ + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \delta(\xi) \wedge F^C(\xi) \wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 = 0, \tag{125}$$

равносильно условиям

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{125$'$}$$

Равенства (125′) равносильны соответственно равенствам

$$\begin{vmatrix} \beta^C(\xi) & \bar{\beta}^V(\xi) \\ {T_2}^C(\xi,\xi) & \bar{T}_2^V(\xi,\xi) \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \beta^C(\xi) & \bar{\beta}^C(\xi) \\ {T_2}^C(\xi,\xi) & \bar{T}_2^V(\xi,\xi) \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}^V(\xi) & \bar{\beta}^C(\xi) \\ \bar{T}_2^V(\xi,\xi) & \bar{T}_2^C(\xi,\xi) \end{vmatrix} = 0,$$

которые выполняются для любой геодезической кривой $\mathscr{C}$. Для произвольной точки $\widetilde{p} \in \mathscr{C}$ будем иметь

$$\begin{vmatrix} \beta^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^V(\xi)\big|_{\widetilde{p}} \\ {T_2}^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \beta^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} \\ {T_2}^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} \end{vmatrix} = 0, \tag{126}$$
$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}^V(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} \\ \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем произвольную точку $p \in M$, и векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Пусть $\left(U; u^h\right)$ координатная окрестность в точке p, и $\left(\pi^{-1}(U); x^h, y^h\right)$ ее индуцированная координатная окрестность в касательном расслоении $T(M)$ $(x^h = u^h, y^h = u^{\bar{h}})$. Пусть ковекторные поля β, $\bar{\beta}$ и тензорные поля T_2, $\bar{T}_2$ в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$ имеют компоненты β_k, $\bar{\beta}_k$ и $T_{2\,ij}$, $\bar{T}_{2\,ij}$ соответственно. Тогда в индуцированной координатной окрестности лифты β^C, $\bar{\beta}^V$, $\bar{\beta}^C$ и T_2^C, $\bar{T}_2^V$, $\bar{T}_2^C$ будут иметь соответственно компоненты

$$\beta^C : \left(\partial\beta_k, \beta_k\right), \quad \bar{\beta}^V : \left(\bar{\beta}_k, 0\right), \quad \bar{\beta}^C : \left(\partial\bar{\beta}_k, \bar{\beta}_k\right),$$
$$T_2{}^C : \begin{pmatrix} \partial T_{2\,ij} & T_{2\,ij} \\ T_{2\,ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_2^V : \begin{pmatrix} \bar{T}_{2\,ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\bar{T}_2^C : \begin{pmatrix} \partial\bar{T}_{2\,ij} & \bar{T}_{2\,ij} \\ \bar{T}_{2\,ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем точку $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ так, чтобы $\pi\left(\widetilde{p}\right) = p$ и $\widetilde{p} = (p, y)$, где $y^s = 0$. Возьмем некоторый касательный вектор $\tau \in T_{\widetilde{p}}\left(T(M)\right)$ с компонентами $\tau = \left(X_p^h, X_p^h\right)$. Проведем через точку $\widetilde{p}$ в направлении вектора τ геодезическую кривую $\mathscr{C}$. Если ξ поле касательных векторов вдоль кривой $\mathscr{C}$, то $\xi\big|_{\widetilde{p}} = \tau$. В таком случае, равенства (126) примут вид

$$\begin{vmatrix} \beta(X)\big|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ 2\,T_2(X,X)\big|_p & \bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \beta(X)\big|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ 2\,T_2(X,X)\big|_p & 2\,\bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}(X)\big|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ \bar{T}_2(X,X)\big|_p & 2\,\bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$

из которых получим

$$\bar{\beta}(X)\Big|_p \cdot T_2(X,X)|_p = 0,\ \beta(X)|_p \cdot \bar{T}_2(X,X)\Big|_p = 0,$$
$$\bar{\beta}(X)\Big|_p \cdot \bar{T}_2(X,X)\Big|_p = 0.$$

Поскольку точка $p \in M$ была взята произвольно, мы приходим к равенству

$$\bar{\beta}(X) \cdot T_2(X,X) = 0, \quad \beta(X) \cdot \bar{T}_2(X,X) = 0,$$
$$\bar{\beta}(X) \cdot \bar{T}_2(X,X) = 0,$$

которое выполняется для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$. Последнее означает, что

$$S\left(\bar{\beta} \otimes T_2\right) = 0, \quad S\left(\beta \otimes \bar{T}_2\right) = 0, \quad S\left(\bar{\beta} \otimes \bar{T}_2\right) = 0, \tag{127}$$

где $S\,(R)$ обозначает симметрирование тензорного поля $R \in \mathfrak{T}_r^0(M)$.

Возможны два случая: $\bar{\beta}_p \neq 0$ и $\bar{\beta}_p = 0$.

С л у ч а й $\bar{\beta}_p \neq 0$. Первое равенство в (127) в точке p примет вид

$$S\left(\bar{\beta}\Big|_p \otimes T_2|_p\right) = 0.$$

Поскольку $T_2|_p$ симметрический тензор, то из леммы 2 получим

$$T_2|_p = 0.$$

С л у ч а й $\bar{\beta}_p = 0$. Очевидно, что и $\beta_p = 0$. Возможны два варианта: $\nabla\bar{\beta}\Big|_p = 0$ и $\nabla\bar{\beta}\Big|_p \neq 0$.

В а р и а н т $\nabla\bar{\beta}\Big|_p \neq 0$. Пусть Γ_{ij}^h — компоненты аффинной связности ∇ в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$. Тогда компоненты $\nabla_j\bar{\beta}_i$ ковариантного дифференциала $\nabla\bar{\beta}$ ковекторного поля $\bar{\beta}$ в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$

имеют вид

$$\nabla_j \bar{\beta}_i = \partial_j \bar{\beta}_i - \Gamma^{\alpha}_{ji} \bar{\beta}_{\alpha}.$$

Отсюда в точке p получим

$$\nabla_j \bar{\beta}_i \big|_p = \partial_j \bar{\beta}_i \big|_p - \Gamma^{\alpha}_{ji} \big|_p \cdot \bar{\beta}_{\alpha} \big|_p = \partial_j \bar{\beta}_i \big|_p .$$

Найдутся такой вектор $y = (y^s) \in \mathbb{R}^n$ и такое векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$, что

$$y^s \, \partial_s \bar{\beta}_i \big|_p \cdot Y^i_p = y^s \, \nabla_s \bar{\beta}_i \big|_p \cdot Y^i_p \neq 0.$$

Рассмотрим точку $\widetilde{p} = (p, y) \in T(M)$. Тогда в индуцированной координатной окрестности

$$\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} = \left(\bar{\beta}_k \big|_p , 0 \right) = 0,$$

и

$$\bar{\beta}^C \left(Y^C \right) \big|_{\widetilde{p}} = \partial \bar{\beta}_k \big|_{\widetilde{p}} \cdot Y^k_p + \bar{\beta}_k \big|_p \cdot \partial Y^{\bar{k}}_{\widetilde{p}} = y^s \, \partial_s \bar{\beta}_k \big|_p \cdot Y^k_p \neq 0,$$

что показывает $\bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \neq 0$.

Нетрудно показать, что для произвольного тензорного поля $R \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ выполняются равенства

$$S\,(R)^V = S\left(R^V\right), \quad S\,(R)^C = S\left(R^C\right).$$

Из последнего равенства и первого равенства в (127) получим равенство

$$S\left(\bar{\beta}^V \otimes {T_2}^C + \bar{\beta}^C \otimes {T_2}^V\right) = 0,$$

которое в точке $\widetilde{p}$ примет вид

$$S\left(\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^C \big|_{\widetilde{p}} + \bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^V \big|_{\widetilde{p}} \right) = 0.$$

Поскольку $\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} = 0$, то из последнего равенства будем иметь

$$S\left(\bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^V \big|_{\widetilde{p}} \right) = 0.$$

Учитывая неравенство $\bar{\beta}^C\big|_{\widetilde{p}} \neq 0$ и симметричность тензора ${T_2}^V\big|_{\widetilde{p}}$, из леммы 2 получим ${T_2}^V\big|_{\widetilde{p}} = 0$, что влечет равенство (4).

Вариант $\nabla\bar{\beta}\big|_p = 0$. По определению тензорного поля $\bar{T}_2$ получим

$$\bar{T}_2\big|_p = \nabla\bar{\beta}\big|_p + 2\,\bar{\beta}\big|_p \otimes \beta\big|_p + 2\,\beta\big|_p \otimes \bar{\beta}\big|_p = 0.$$

Учитывая связь тензорных полей $\bar{T}_2$ и T_2, отсюда снова приходим к равенству (4). Поскольку последнее равенство выполняется в каждой точке $p \in M$, получаем равенство

$$(125'') \qquad T_2 = 0.$$

С другой стороны, из условия (125″) получим $\bar{T}_2 = 0$, и значит

$$T_2^V = 0, \quad T_2^C = 0, \quad \bar{T}_2^V = 0, \quad \bar{T}_2^C = 0,$$

что в свою очередь, ведет к выполнению условия (125′).

Таким образом, для того что бы индуцированный диффеоморфизм μ_* был 2-геодезическим диффеоморфизмом необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$ и $T_2 = 0$.

3). Очевидно

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 \wedge \widetilde{\xi}_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) \wedge F^C(\xi) \wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$(128) \qquad \xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 \wedge \widetilde{\xi}_3 = 0,$$

равносильно условию

$$(128') \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее выполняется для произвольного векторного поля ξ. Поэтому оно равносильно равенству

$$(128'') \qquad S\left(\begin{vmatrix} \beta^C & \bar{\beta}^V & \bar{\beta}^C \\ T_2{}^C & \bar{T}_2{}^V & \bar{T}_2{}^C \\ T_3{}^C & \bar{T}_3{}^V & \bar{T}_3{}^C \end{vmatrix}\right) = 0.$$

Таким образом, для того, что бы индуцированный диффеоморфизм μ_* был 3-геодезическим диффеоморфизмом необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$, $\bar{T}_2 \neq 0$ и $(128'')$.

4). Очевидно выполняется равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi_1} \wedge \widetilde{\xi_2} \wedge \widetilde{\xi_3} \wedge \widetilde{\xi_4} = 0.$$

Оно показывает, что в общем случае, индуцированный диффеоморфизм является 4-геодезическим. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . Нетрудно заметить, что равенство $T_3 = 0$ обеспечивает выполнение условия $(128'')$. Таким образом, для того, что бы индуцированный диффеоморфизм являлся 3–геодезическим диффеоморфизмом, достаточно, чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$, $T_2 \neq 0$ и $T_3 = 0$.

Список литературы

[1] С. Г. Лейко, *Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней.* - Тр. Геометрич. семин. - Казань (1982), вып. 14, с. 34-46.

[2] С. Г. Лейко, *P - геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия.* - Изв. вузов. Математика. (1992), №2, с. 62-71.

[3] С. Г. Лейко, *P - геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия.* - Изв. вузов. Математика. (1998), №6, с. 35-45.

[4] С. Г. Лейко, *P - геодезические сечения касательного расслоения.* - Изв. вузов. Математикав. (1994), №3, с. 32-42.

[5] Н. С. Синюков, И. Н. Курбатова, Й. Микеш. *Голоморфно - проективные отображения келеровых пространств.* Учеб. пособие. - Одесса: ОГУ, 1985 - 69с.

[6] С. Г. Лейко, *Рiманова геометрiя*: Навчальний посiбник. Одеса: Астропринт (2000)

[7] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles.* Differential geometry. - New York: Marcel Dekker (1973)

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 163-179

О. А. Кадубовський

Інститут математики НАН України
E-mail: `kadubovs@imath.kiev.ua`

Топологічна класифікація градіієнтноподібних векторних полів з одніею сідловою особливістю

За допомогою гладких функцій на замкненій орієнтованій поверхні, у яких крім локальних максимумів і мінімумів є лише одна вироджена критична точка типу сідла встановлено критерій топологічної еквівалентності гладких векторних полів без замкнених і гомоклінічних траєкторій, множина критичних елементів яких складається з джерел, стоків та однієї сідлової особливості. В залежності від роду орієнтованої поверхні наведено точне значення числа топологічно нееквівалентних полів з вказаного класу, у яких лише одне джерело та один стік.

By means of smooth functions that possess only one saddle critical point in addition to local maxima and minima we give a necessary and sufficient condition for topological equivalence of smooth vector fields which satisfies the following conditions: 1) it has a finite number of critical elements (there are only one saddle, sources and sinks), 2) the α-limit and ω-limit sets of any trajectory are critical elements, 3) there are no saddle connections and closed trajectory. We also calculated the number of non equivalent such fields with one source and one sink on closed oriented surfaces of genus $g \geq 2$.

Ключові слова: *Векторне поле, функція Ляпунова, топологічна класифікація*

Вступ

Відомо, що для топологічної класифікації полів Морса–Смейла без замкнених траєкторій (полів Морса) на орієнтованих поверхнях ефективно використовуються функції

Ляпунова з трьома критичними значеннями [4]. Більше того, класичним результатом є той факт, що кожне поле Морса є полем градієнта деякої функції Морса.

Для градієнтноподібних векторних полів з ізольованими особливостями існує функція Ляпунова. І тому для топологічної класифікації таких полів виникає потреба в дослідженні гладких функцій відповідного класу на поверхнях. Серед робіт, присвячених класифікації гладких функцій на поверхнях, слід відмітити роботи А.В.Болсінова, Е.В.Кулініча, А.О.Ошемкова, О.О.Пришляка, В.В.Шарка та ін. Зокрема, в роботі Шарка [6] досліджено питання топологічної класифікації гладких функцій з класу $C^{\infty}(N)$ з трьома критичними значеннями на поверхні N, всі критичні точки яких є ізольованими і лежать у внутрішності N на одній лінії рівня.

Як було зазначено вище, виникає потреба в класифікації більш широкого класу $L(N)$ "градієнтноподібних" векторних полів без замкнених траєкторій, множина критичних елементів яких складається з джерел, стоків та (складних) сідел — особливих точок цілого від'ємного індексу.

Очевидно, що поле градієнта кожної функції з класу $C^{\infty}(N)$ належить множині $L(N)$. І тому для класифікації таких полів доцільно використовувати функції з класу $C^{\infty}(N)$.

В загальному випадку питання топологічної класифікації таких полів *залишається відкритим.*

В даній роботі за допомогою гладких функцій, у яких крім локальних максимумів і мінімумів є лише одна вироджена критична точка типу сідла, отримана топологічна класифікація векторних полів з класу $L_{M,m}\left(N_g^2\right)$ на орієнтованій поверхні N_g^2, які задовольняють умови:

1) поле $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ має скінченне число критичних елементів, 2) відсутні замкнені траєкторії, а множина особливих точок поля X складається з m джерел, M стоків та однієї сідлової особливості (складне сідло), 3) відсутні траєкторії, $\omega-$ і $\alpha-$граничною множинами яких є сідло (відсутні гомоклінічні траєкторії), 4) для кожної траєкторії поля її ω- і α-граничні множини є особливими точками поля.

1. Необхідні означення та зауваження

Нехай N_g^2 — замкнена, гладка, орієнтована поверхня роду g, а $X \in L_{m,M}(N_g^2)$. Тоді, як наслідок з теореми Пуанкаре-Хопфа, індекс Пуанкаре поля X єдиної сідлової особливості s_0 дорівнює $\mathrm{ind}(X, s_0) = 2 - 2g - m - M$, де g — рід поверхні N_g^2. Останнє означає, що в сідло s_0 входить (виходить) точно $n = 2g + m + M - 1$ сепаратрис.

Означення 1. *Векторні поля $X, Y \in L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : N_g^2 \longrightarrow N_g^2$ (що зберігає орієнтацію), який переводить траєкторії поля X в траєкторії поля Y зі збереженням орієнтації на них.*

Означення 2. *Дві гладкі функції f і g на поверхні N_g^2 називають топологічно еквівалентними, якщо існують такі гомеоморфізми $k : N_g^2 \to N_g^2$ і $l : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, що $f = l \circ g \circ k^{-1}$. В подальшому будемо вважати, що гомеоморфізми k і l зберігають орієнтацію.*

Через $C_{m,M}(N_g^2)$ позначимо клас гладких функцій з M максимумами, m мінімумами та однією виродженою критичною точкою типу сідла на замкненій орієнтованій поверхні N_g^2.

2. Основна частина

Нижче покажемо, що кожному векторному полю X з класу $L_{m,M}(N_g^2)$ можна поставити у відповідність функцію *Ляпунова*, тобто, таку гладку функцію $f_X : N_g^2 \longrightarrow \mathrm{R}$, яка задовольняє наступні умови:
1) функція f_X строго спадає вздовж інтегральних траєкторій поля X,
2) критичні точки функції f_X співпадають з особливими точками поля X: мінімуми функції f_X співпадають з джерелами $r_1, r_2, ..., r_m$ поля X, максимуми f_X — зі стоками $p_1, p_2, ..., p_M$ поля X, а (вироджена) критична точка типу сідла функції f_X — з сідловою особливістю s_0 поля.

Лема 1. *Для кожного векторного поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ існує функція Ляпунова.*

Доведення. Доведення цього твердження проведемо за схемою, запропонованою Мейєром в роботі [2] при встановлені аналогічного результату для полів Морса–Смейла.

Нехай $\beta_i = r_i$, $i = 1, ..., m$ джерела поля X, $\beta_{m+j} = p_j$, $j = 1, ..., M$ — стоки, а $\beta_0 = s_0$ — сідло поля X. Розглянемо дискові околи D_k критичних елементів $\beta_k, k = 0, ..., m+M$. Через скінченність числа особливих точок поля X вказані околи можна обрати так, щоб вони не перетинались.

Оскільки поле X в околах джерел (рис. 4 A) топологічно еквівалентне полю $X_r = \mathrm{grad}(x^2 + y^2)$, то, локально, в околах D_k $(k = m+1, ..., m+M)$ функцію f_X можна задати у вигляді $f_X = x^2 + y^2$.

Аналогічно, з того що поле X в околах стоків (рис. 4 B) топологічно еквівалентне полю $X_p = \mathrm{grad}(-x^2 - y^2)$, то, локально, функцію f_X в околах D_k $(k = 1, ..., m)$ можна задати у вигляді $f_X = -x^2 - y^2$.

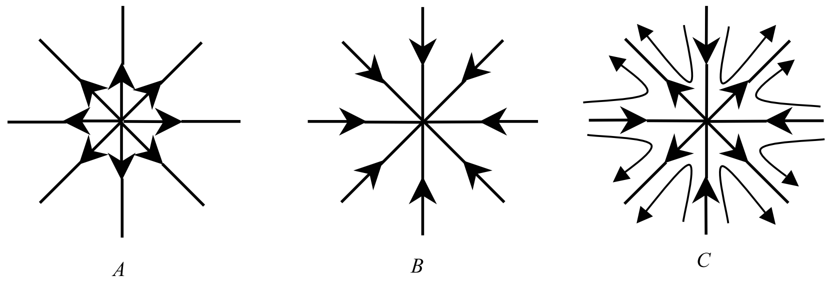


Рис. 4. Джерело, сток і складне сідло

Добре відомо (див. напр. [5]), що векторне поле X в околі складного сідла (рис. 4 C) є топологічно еквівалентним полю $X_s = \mathrm{grad}(\mathrm{Re} z^n)$, де $\mathrm{Re} z^n$ — дійсна частина комплексного числа $z^n = (x+iy)^n$. Тоді, локально, в околі D_0 складного сідла s_0 функцію f_X задамо як $f_X = \mathrm{Re} z^n$, де n – число сепаратрис які входять (або виходять) в сідло. Отже, функцію f_X визначено в околах усіх особливих точок поля X.

Продовження функції f_X на всю поверхню N_g^2 можна задати так, як описано в роботі Смейла [1]. *Основна ідея полягає в наступному.* Оскільки для кожної траєкторії поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ її α- і ω-граничні множини є особливими точками — джерелом, стоком або сідлом, то функцію f_X можна продовжити (визначити) на сепаратрисах сідла.

Наступним кроком є продовження функції f_X вздовж трубчастих околів V_j $(j = 1, ..., 2n)$ сепаратрис.

Нехай $U = D_i \bigcup_{i,j} V_j,\ \ i = 0, ..., m + M, j = 1, ..., 2n$. Ясно, що доповнення U до N_g^2 складається з незв'язного об'єднання скінченного числа q двомірних клітин — дисків $D'_j, j = 1, ..., q$. Границею кожного такого диску є коло, яке складається з дуг граничних кіл дисків D_i та границь смуг V_j. Тому функцію f_X можна продовжити на кожен з дисків D'_j.

Таким чином, функцію f_X, побудовану за полем X, визначено на всій поверхні N_g^2 і вона задовольняла умови визначення функції Ляпунова. $\square$

Означення 3. *Функцію Ляпунова f_X для поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати L-функцією і позначати $\widehat{f}_X$, якщо $f_X : N_g^2 \longrightarrow [-1,1]$ має три критичні значення. А саме: лінія рівня $f_X^{-1}(-1)$ містить джерела $r_1, r_2, ..., r_m$ поля X, $f_X^{-1}(0)$ містить сідлову особливість s_0, а $f_X^{-1}(1)$ — всі стоки $p_1, p_2, ..., p_M$ поля X.*

Означення 4. *Векторні поля X, Y з класу $L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати L-еквівалентними, якщо відповідні їм L-функції $\widehat{f}_X, \widehat{f}_Y : N_g^2 \to \mathrm{R}$ є топологічно еквівалентними.*

Теорема 1. *Два поля $X, X' \in L_{m,M}(N_g^2)$ топологічно еквівалентні тоді і лише тоді, коли вони L-еквівалентні.*

Доведення. Нехай $h : N_g^2 \longrightarrow N_g^2$ — топологічна еквівалентність між полями $X, X' \in L_{m,M}(N_g^2)$, а $f = \widehat{f}_X$ і $f' = \widehat{f}_{X'}$ відповідні цим полям L-функції. Для доведення необхідності достатньо показати, що якщо функції f і f' топологічно еквівалентні в околах сингулярних точок, то вони є топологічно еквівалентними.

Спочатку покажемо, що для топологічно еквівалентних полів X і X' функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах критичних точок. Припустимо, що особливі точки β_i, β'_i полів X і X' занумеровано так, що $h(\beta_i) = \beta'_i$ $\forall i = 0, ..., m+M$. Позначимо через δ_i, δ'_i критичні точки функцій f і f'. Без обмеження загальності, можна вважати, що $\beta_i = \delta_i$, а $\beta'_i = \delta'_i$ при всіх $i = 0, ..., m+M$.

Розглянемо малі дискові околи D_i, D'_i джерел β_i, β'_i, які співпадають з мінімумами δ_i, δ'_i функцій f і f'. Оскільки поля X і X' в цих околах є топологічно еквівалентними полю $X_r = \mathrm{grad}(x^2+y^2)$, а лінії рівня функцій f і f' трансверсально перетинають інтегральні траєкторії (полів X і X' відповідно), що виходять з β_i і β'_i, то функції f і f' є топологічно еквівалентними в указаних околах — рис. 5.

З аналогічних міркувань випливає справедливість того, що функції f і f' є топологічно еквівалентними і в деяких дискових околах D_i, D'_i максимумів δ_i, δ'_i, які співпадають зі стоками полів X і X'.

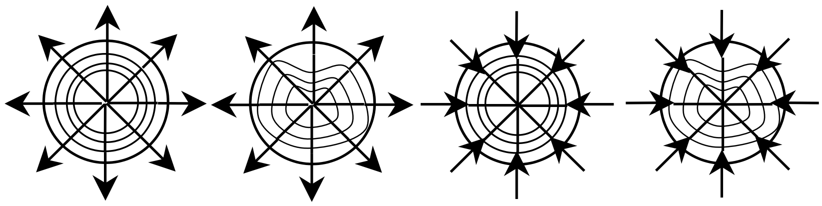


Рис. 5. Дискові околи джерел і стоків полів X і X'

Слід відмітити, що топологічна еквівалентність функцій f і f' в околах мінімаксних точок є наслідком результатів роботи [3], в якій показано, що для будь-якого локального мінімуму (максимуму) гладкої функції $f : N_g^2 \longrightarrow \mathrm{R}$ існує окіл, в якому f неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = x^2 + y^2$ $(f = -x^2 - y^2)$.

Нехай тепер β_0 — сідло поля X, $\beta'_0 = h(\beta_0)$ сідло поля X'. Розглянемо такий дисковий окіл D_0 сідла β_0 (*хрест* — рис. 6), границя якого складається з відрізків інтегральних траєкторій (дуг хреста) та відрізків ліній рівня функції f (сторін хреста).

Оскільки кожна з функцій f і f' в околах сідлових критичних точок δ_0, δ'_0 топологічно еквівалентна функції

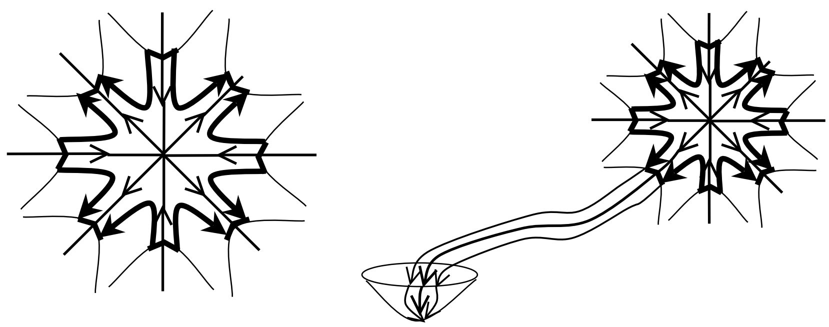


Рис. 6. D_0-окіл сідла (хрест) і V-окіл сепаратриси

$f_s = \mathrm{Re} z^n$, і в указаних околах D_0 і D_0' лінії рівня кожної з них перетинають інтегральні траєкторії відповідного поля трансверсально, то f і f' топологічно еквівалентні у вказаних околах.

Отже, функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах сингулярних точок.

Далі розглянемо такі околи V_i відрізків сепаратрис τ_i сідла s_0, границями яких (границями смуг) також є інтегральні траєкторії поля X. Очевидно, що кожен такий окіл є "прямокутником", дві протилежні сторони якого є інтегральними траєкторіями поля, одна з двох інших сторін є дугою граничного кола дискового околу деякого джерела, або стока, а інша сторона — відрізком лінії рівня функції f (стороною хреста).

За визначенням функції Ляпунова відрізки ліній рівня функції f перетинають інтегральні криві кожного такого околу V_i трансверально.

Аналогічне має місце і для околів $V_i' = h(V_i)$ сепаратрис $\tau_i' = h(\tau_i)$ сідла s_0' поля X'.

З того, що функції f і f' в околах V_i, V_i' не мають критичних точок, а відрізки їх ліній рівня перетинають інтегральні криві відповідних околів трансверсально випливає, що f і f' є топологічно еквівалентними в околах V_i, V_i'.

Нехай $U = D_i \bigcup_{i,j} V_j,\ i = 0, ..., m + M,\ j = 1, ..., 2n$. Зрозуміло, що доповнення U до N_g^2 є незв'язним об'єднанням скінченного числа r двомірних дисків $\Delta_j, j = 1, ..., r$.

Границею кожного такого диску є коло, яке складається з дуг граничних кіл дисків D_i та границь смуг V_j. А саме, кожен такий окіл має вид, зображений на рис. 7.

Оскільки функції f і f' в околах Δ_i і $\Delta_i' = h(\Delta_i)$ не мають критичних точок, а їх лінії рівня трансверсально перетинають відрізки інтегральних кривих, то f і f' є топологічно еквівалентними в указаних околах (рис. 7).

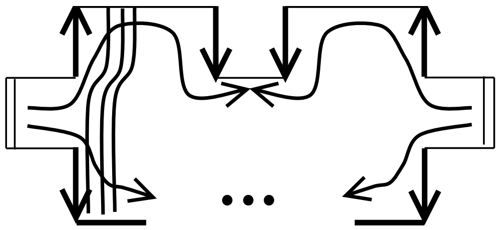


Рис. 7. Окіл Δ_i з лініями рівня функції f

Таким чином, оскільки функції f і f' топологічно еквівалентні в околах D_i, D_i' сингулярних точок, в околах V_i, V_i' відрізків сепаратрис τ_i, τ_i' сідел s_0, s_0' (які співпадають з сідловими критичними точками δ_0, δ_0' цих функцій) та на доповненнях $N_g^2 \setminus \left(D_i \bigcup_{i,j} V_j\right)$, $N_g^2 \setminus \left(D_i' \bigcup_{i,j} V_j'\right)$, то існує глобальний гомеоморфізм $h : N_g^2 \longrightarrow N_g^2$, такий що $f \circ h = f'$. Отже, L-функції f і f' для топологічно еквівалентних полів X і X' також еквівалентні.

Нехай тепер $h : N_g^2 \longrightarrow N_g^2$ — гомеоморфізм, який переводить лінії рівня функції f в лінії рівня функції f'.

Нехай далі δ_i і $h(\delta_i) = \delta_i'$ – критичні точки функцій f і f', а β_i і β_i' – особливі точки полів X і X'. Як і раніше будемо вважати, що $\beta_i = \delta_i$, $\beta_i' = \delta_i'$ $\forall i = 0, ..., m + M$.

З того що функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах локальних максимумів (мінімумів) випливає, що поля X і X' топологічно еквівалентні в деяких околах D_i, D_i' джерел (стоків) $\beta_i = \delta_i$ і $\beta_i' = h(\delta_i')$.

Розглянемо лінію рівня $\Gamma_0 = f^{-1}(0)$, якій належить сідлова критична точка δ_0 функції f. Не важко бачити, що Γ_0 є букетом n кіл. За визначенням $\Gamma_0 \backslash \delta_0$ трансверсально перетинає траєкторії поля X. Зафіксуємо досить мале $\varepsilon > 0$. Тоді лінія рівня $\Gamma_- = f^{-1}(-\varepsilon)$ $(\Gamma_+ = f^{-1}(\varepsilon))$ є незв'язним об'єднанням m (відповідно M) кіл S^1 і також трансверсально перетинає траєкторії поля X.

Розглянемо дисковий окіл D_0 сідлової критичної точки δ_0, яка співпадає з сідлом β_0 поля X. При досить малому ε окіл D_0 можна обрати так, щоб він являв собою "хрест", сторонами якого є відрізки інтегральних кривих поля X, а дугами — відрізки ліній рівня Γ_- та Γ_+ — рис. 8.

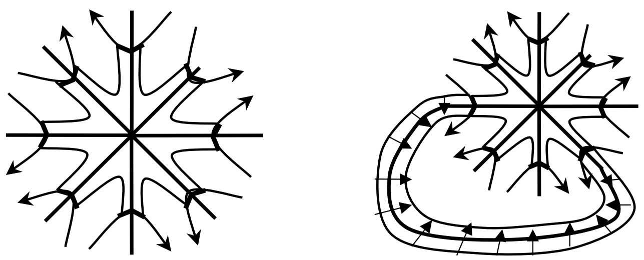


Рис. 8. Окіл D_0 сідлової критичної точки і Υ-окіл відрізка лінії рівня Γ_0 функції f

Зрозуміло, що у вибраних нами околах D_0 і $D_0' = h(D_0)$ поля X і X' топологічно еквівалентні, оскільки, локально, вони еквівалентні полю $X_s = \mathrm{grad}(\mathrm{Re} z^n)$.

Позначимо через $N_\varepsilon = f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ ε-окіл критичного рівня Γ_0. Тоді доповнення околу D_0 до N_ε складається з незв'язного об'єднання множин Υ_i — ε-околів відрізків лінії рівня Γ_0. Границею кожного такого околу (смужки) є відрізки ліній рівня Γ_-, Γ_+ та відрізки інтегральних кривих (сторони креста D_0) поля — рис. 8.

Оскільки поле X (X') в околі Υ_i $(\Upsilon_i' = h(\Upsilon_i))$ не має особливих точок, а усі відрізки лінії рівня $f^{-1}(\lambda)$ $(f'^{-1}(\lambda))$, $-\varepsilon \leq \lambda \leq \varepsilon$, що належать Υ_i (Υ_i') трансверсальні інтегральним траєкторіям поля X (X'), то з цього випливає, що X і X' топологічно еквівалентні в цих околах.

Нехай $W = (\bigcup_k \Upsilon_k) \cup (\bigcup_i D_i)$. Тоді доповнення W до N_g^2 складається з незв'язного об'єднання скінченного числа q циліндрів $C_i \cong S^1 \times I$ $(i = 1, ..., q)$. Одним з граничних кіл кожного такого циліндру є граничне коло дискового околу мінімуму (максимуму), а друге граничне коло належить лінії рівня $f^{-1}(-\varepsilon)$ (або $f^{-1}(\varepsilon)$ відповідно).

Оскільки векторні поля X і X' на циліндрах C_i, $h(C_i)$ не мають особливих точок, а граничні кола відповідних циліндрів перетинають траєкторії полів трансверсально, то поля X і X' є топологічно еквівалентними на кожній парі таких циліндрів.

Отже, оскільки поля X і X' топологічно еквівалентні в околах особливих точок β_i, β_i', в околах Υ_i, Υ_i' та на доповненнях $N_g^2 \backslash W$ і $N_g^2 \backslash W'$, то існує глобальний гомеоморфізм $k : N_g^2 \longrightarrow N_g^2$, який переводить траєкторії поля X в траєкторії поля Y. $\square$

Таким чином, встановлено **бієкцію** між класами топологічної еквівалентності L-функцій і класами топологічної еквівалентності полів з множини $L_{m,M}(N_g^2)$.

3. Число топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{m,M}(N_g^2)$

Очевидно, що клас L-функцій, які відповідають векторним полям з множини $L_{m,M}(N_g^2)$, співпадає з класом $C_{m,M}(N_g^2)$. Отже, існує бієкція між класами топологічної еквівалентності функцій з множини $C_{m,M}(N_g^2)$ і класами топологічної еквівалентності вказаних полів.

В роботі автора [7] за допомогою 2-кольорових хордових діаграм спеціального виду встановлено критерій топологічної еквівалентності функцій з класу $C_{m,M}(N_g^2)$ та доведено, що число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,m}\left(N_g^2\right)$ дорівнює числу неізоморфних 2-кольорових $D_{m,M}$-діаграм з $n = 2g + M + m - 1$ хордами.

Наведемо основні означення.

Хордовою діаграмою (рис. 9 A) з n хордами або, коротко, n-діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ різних точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$-кутника) та n хорд, які задають розбиття $2n$ точок на пари .

Двокольоровою хордовою діаграмою з n хордами будемо називати хордову n-діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано в два кольори (чорний і білий) так, що сусідні дуги різного кольору — рис. 9 $C), D)$.

Надалі будемо вважати, що всі двокольорові n-діаграми будуються на основі *канонічного кола* (рис. 9 B) — кола з фіксованою нумерацією $2n$ точок на ньому (за годинниковою стрілкою), які є вершинами правильного $2n$-кутника;

дуги $(1,2);(3,4);...;(2n-1,2n)$ – чорного кольору, а дуги $(2,3);(4,5);...;(2n,1)$ – білого кольору.

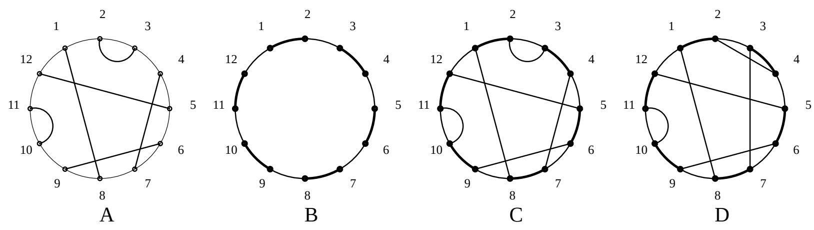


Рис. 9. A) 6-діаграма; B) канонічне коло; C) O-діаграма з 2 чорними і 3 білими циклами; D) N-діаграма

Двокольорову хордову діаграму, яка не містить хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називатимемо O-діаграмою (N-діаграмою) — рис. 9 C (D).

Чорним (білим) циклом O-діаграми будемо називати послідовність хорд і чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола.

O-діаграму з n хордами, у якої точно M чорних і m білих циклів будемо називати $D^n_{M,m}$-діаграмою. У випадку, коли $M=m=1$, діаграму будемо називати *діаграмою максимального роду*

Діаграми D_1 і D_2 називатимемо *ізоморфними*, якщо їх можна сумістити в результаті повороту на деякий кут.

Наслідком теореми 1 та роботи [7] є наступне твердження.

Лема 2. *Число топологічно нееквівалентних полів (з точністю до гомеоморфізму поверхні, який зберігає орієнтацію) з класу* $L_{m,M}(N^2_g)$ *дорівнює числу неізоморфних* $D_{m,M}$*-діаграм з* $n=2g+M+m-1$ *хордами.*

Отже, якщо зафіксувати рід поверхні $g \geq 1$, число джерел m та число стоків M, то можна підрахувати число *топологічно нееквівалентних полів з класу* $L_{m,M}(N_g^2)$.

Ці значення, в залежності від роду g орієнтованої поверхні N_g^2, будуть співпадати з числом неізоморфних $D_{m,M}$-діаграм з $n = 2g + M + m - 1$ хордами.

Зокрема, число топологічно нееквівалентних векторних полів з класу $L_{1,1}(N_g^2)$ співпадає з числом неізоморфних 2-кольорових O-діаграм максимального роду з $n = 2g + 1$ хордами. В роботі автора [8] підраховано точне значення цього числа, в залежності від роду g поверхні N_g^2. А саме

Для довільного непарного n число неізоморфних $D_{1,1}^n$-діаграм з $n = 2g + 1$ хордами може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$d_n^*(g) = \frac{1}{n}\left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i|n,\ i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n,i)\right), \tag{129}$$

$$\rho(n,i) = \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot \phi^*\left(\frac{n}{i}\right), \tag{130}$$

де $\phi(q)$ — функція Ейлера (число натуральних менших ніж q чисел, взаємно простих з q), а значення величини $\phi^*(q)$ для довільного непарного $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$\phi^*(q) = q \cdot \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{2}{p_k}\right). \tag{131}$$

Початкові значення числа $d_n^*(g)$ топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{1,1}(N_g^2)$ в залежності від роду g орієнтованої поверхні N_g^2 наведено у наступній таблиці.

g	d_g^*
0	1
1	1
2	4
3	30
4	900
5	54 990
6	5 263 764
7	726 485 868
8	136 750 260 720
9	33 696 703 714 374
10	10 532 043 325 452 570

3.1. **Число нееквівалентних полів з класу $L_{m,M}(S^2)$ на двовимірній сфері S^2.**

Твердження 1. *Всі поля з класу $L_{1,M}(S^2)$ є топологічно еквівалентними.*

Доведення. Справедливість цього твердження випливає з того, що для полів з вказаного класу топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова O-діаграма з $n = 2 \cdot 0 + 1 + M - 1 = M$ хордами, яка має точно 1 чорний та M білих циклів. Для довільного натурального M існує єдина така O-діаграма з $n = M$ хордами та максимальним числом білих циклів — рис. 10. □

Твердження 2. *Число топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{2,M}(S^2)$ дорівнює величині $p^*_{2,M} = \left[\frac{M+1}{2}\right]$, де $[q]$ – ціла частина числа q.*

Доведення. Ідея доведення полягає в тому, що відповідні цим полям діаграми обов'язково містять $n - 2 = 2 + M - 1 - 2 = M - 1$ хорд, що сполучають сусідні вершини і утворюють $M - 1$ чорних циклів ("простих циклів"). Дві

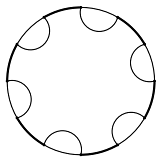


Рис. 10. Єдине векторне поле з класу $L_{1,6}(S^2)$

інші хорди повинні утворити точно 1 чорний цикл ("чорну смугу") — рис. 11.

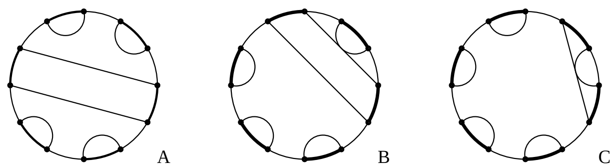


Рис. 11. Всі топологічно нееквівалентні поля з класу $L_{2,5}(S^2)$

Всі неізоморфні діаграми відрізняються лише взаємним розташуванням $M-1$ простих циклів відносно чорної смуги, а саме: $\{M-1,0\}$ (рис. 11 C), $\{M-2,1\}$ (рис. 11 B), $\{M-3,2\}$, ..., $\{\left[\frac{M}{2}\right], \left[\frac{M-1}{2}\right]\}$ (рис. 11 A).

Отже, існує точно $1+\left[\frac{M-1}{2}\right] = \left[\frac{M+1}{2}\right]$ неізоморфних (відносно повороту) таких діаграм. Більше того, всі вони є і нееквівалентними. □

4. Висновки

Таким чином, векторні поля з класу $L_{M,m}\left(N_g^2\right)$ можна класифікувати за допомогою комбінаторного об'єкту — двокольорових $D^n_{M,m}$ діаграм з $n = 2g-1+m+M$ хордами, де g — рід орієнтованої поверхні N_g^2.

Література

[1] *Smale S.* On gradient dynamical system // Annals of Mathematics. – 1961. – Vol. 74, №1. – P.199-206.

[2] *Meyer K.R.* Energy function for Morse-Smale system // Amer. J. Math. – 1968. – Vol.90, №4. – P.1031-1040.

[3] *Dancer E.N.* Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities II // J. Reine Angew. Math. – 1987., Vol.382. – P.145–164.

[4] *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Матем. Сборник, 1998, Т.189, No.8, С.93–140.

[5] *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface // Topology and its Aplications. – 2002. № 119. – P.257-267.

[6] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. жур. – 2003. – Т.55, №5. – С.687-700.

[7] *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Укр. мат. жур. – 2006. – Т.58, № 3. – С.343-351.

[8] *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С.17–27.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 180-200

П. С. Коломієць

(Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ)
E-mail: `kolom-sk@nash.net.ua`

Ю. А. Дрозд

(Ін-т математики НАН України)

Перетини незвідних компонент бішубертівських багатовидів

Вступ

В даній статті продовжується дослідження бішубертівських багатовидів – одного з логічних узагальнень шубертівських багатовидів, де замість одного визначального прапору підпросторів використовується два. В [2] було дано їхнє означення та знайдені основні властивості – звідність, кількість незвідних компонент, їхня розмірність. В наступній роботі [1] було продовжено їх вивчення. Була доведена раціональність незвідних компонент, також був знайдений їх розклад в шубертівському базисі для найпростішого випадку $m = n = 1$. Основним результатом цієї статті є знаходження рівнянь компонент в Грассманніані у випадку $n = 1$ і, на базі цього, знаходження структури взаємного розміщення "великих" орбіт (щільних в компонентах) і всіх їх перетинів з точністю до замикань для випадку $n = 1$. Також доведено, що компоненти не є повними перетинами в Грассманніані. Випадки $n > 1$ якісно відрізняються від випадку $n = 1$, і тому методика доведень, використана тут, не підходить для них. Також в цій статті ми розглянули питання регулярності\особливості точок незвідних компонент і виявили, що вже в найпростіших випадках вони містять особливі точки.

1. Рівняння незвідних компонент для n=1

Тут і надалі будуть розглядатися тільки бішубертівські багатовиди у яких $n = 1$, тобто другий прапор складається з одного підпростору.

Отже, нехай ми маємо деякий бішубертівський багатовид $BiSch(m, 1)$. Для кожного його елемента можна визначити набір підматриць Ω, що містить усі такі підматриці ширини d матриці елемента, що якщо якась із них містить якийсь рядок із $K_{i,j}$, то вона також містить всі рядки із $K_{x,y}$, $i \leqslant x \leqslant m+1$ і $j \leqslant y \leqslant n+1$. Ранги цього набору підматриць позначимо через $rk\Omega$. Такі підматриці виглядають як сходи в таблиці елемента (Рис. 12).

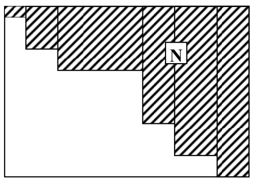


Рис. 12. Загальний вигляд підматриць із Ω.

На ньому область N (все що замальовано), що відповідає якійсь підмартиці ширини d матриці елемента – це типовий представник набору Ω. Тобто N складається із клітини таблиці, і якщо N містить якусь клітину, то вона містить також всі клітини, які розміщені зверху-справа від неї.

Тоді справедлива

Теорема 1.1. *Довільна орбіта* O *з довільного бішубертівського багатовиду* $BiSch(m,1)$ *визначається в Грассманніані за допомогою рівностей* $\{rk(N) = k_N, N \in \Omega\}$*, де* $\{k_N, N \in \Omega\}$ *є відповідним набором рангів* $rk\Omega$ *для деякого її елемента.*

$\triangleleft$ Із означення набору підматриць Ω ясно таке:

По перше, $h \times d$ матриці, що задовольняють таким рівностям, автоматично задовольняють умовам на приналежність до нашого бішубертівського багатовиду (див. [2], ст.82). Дійсно, набір Ω включає в себе всі підматриці, що фігурують в цих визначальних умовах. А тому, якщо ми маємо набір рангів $rk\Omega$ для деякого елемента із $BiSch(m,1)$, то рівності із заголовку теореми є більш сильними умовами ніж ці визначальні умови.

По друге, ніякі перетворення рядків із нашої алгебраїчної групи A_G (лінійні перетворення, що не змінюють прапори визначальних просторів) не змінюють набір рангів $rk\Omega$ довільного елемента, тому що до рядків довільної матриці із Ω можуть додаватись тільки рядки цієї ж самої матриці. Тому $rk\Omega$ постійний на кожній орбіті. Отже, для доведення теореми необхідно довести, що $rk\Omega$ для різних орбіт різний. Для цього доведемо, що всі елементи з однаковим набором рангів $rk\Omega$ можуть бути приведені до єдиного елемента за допомогою A_G, тобто що вони належать одній орбіті. Розіб'ємо доведення на 2 частини.

1-а частина: Приведемо спочатку за допомогою A_G довільний елемент до вигляду, в якому в його таблиці залишаться тільки числа (суми, що складаються з одного числа). Це доведення є скороченим і трохи модифікованим доведенням Теореми 1 в [2].

Нагадаємо означення таблиці елемента з матрицею M: якщо набір рядків $K_{i,j}$ із матриці M містить рядок з ненульовими елементами в стовпчиках $l_1, l_2, \ldots, l_k$, то в клітині $\tilde{K}_{i,j}$ таблиці $\tilde{M}$ стоїть текст $"l_1" + "l_2" + \ldots + "l_k"$ (ми називаємо його сумою). Якщо в $K_{i,j}$ є декілька ненульових рядків, то в $\tilde{K}_{i,j}$ стоїть стільки ж сум. Порядок чисел в сумах і порядок сум в клітинах не важливий.

Позначимо також через $Op1$ таку операцію: Якщо в клітині $\tilde{K}_{i,j}$ стоїть число l, то за допомогою рядкових перетворень із A_G знищуємо всі числа l в усіх сумах із клітин $\tilde{K}_{x,y}$, $x \geqslant i$ і $y \geqslant j$.

Отже, у нас є елемент з відповідною таблицею $\tilde{M}$. Розглянемо шлях по клітинах в таблиці елемента $\tilde{M}$:

$$\tilde{K}_{m+1,n+1} \to\to \tilde{K}_{m,n+1} \to \ldots \to \tilde{K}_{1,n+1} \to$$

$$\to \tilde{K}_{m+1,n} \to \tilde{K}_{m,n} \to \ldots \to \tilde{K}_{1,n}$$

Йдучи цим шляхом припустимо, що ми прийшли в клітину $\tilde{K}_{i,j}$ і припустимо, що всі попередні клітини на шляху містять тільки числа, причому якщо в якихось 2-х клітинах, скажімо $\tilde{K}_{r,s}$, $\tilde{K}_{x,y}$, стоять однакові числа, то $r < x$, $s > y$. Тоді це саме ми зробимо для нової клітини.

Робимо $Op1$ для всіх чисел із всіх попередніх клітин. Тепер, якщо $\tilde{K}_{i,j}$ містить суму в якій є число, що не зустрічалось раніше на шляху, то цим числом знищуємо всі інші числа в сумі. Цим ми не змінюємо попередніх клітин. Якщо $\tilde{K}_{i,j}$ містить суму, яка складається з чисел (скажімо k штук), що вже зустрічалися, то на вже пройденому шляху ці числа можуть стояти тільки в клітинах $\tilde{K}_{x,y}$, де $x < i$, $y > j$. Тобто у нашому випадку ($n = 1$) це означає, що $j = 1$, $y = 2$. А отже всі клітини з k числами з нашої суми містяться в одному рядку таблиці. Того можна виділити серед них саму ліву (нехай це буде $\tilde{K}_{r,s}$) з відповідним числом l. Цим числом знищуємо всі інші в нашій сумі із $\tilde{K}_{i,j}$. При цьому в $\tilde{K}_{r,s}$ замість l з'являється ця ж сума. Але знову виконавши $Op1$ для всіх чисел із всіх вже пройдених клітин ми перетворюємо її знову в l.

Таким чином перша частина доведення закінчена.

2-а частина: Отже тепер у нас є деякий елемент із рангами $rk\Omega$, який має таблицю, в якій стоять тільки числа. Розглядаємо той самий шлях по його таблиці. В верхньому рядку стоять всі різні числа. Перенумеруємо їх в порядку слідування на шляху (перенумерація тут і надалі – це всього лише перестановка стовпчиків матриці елемента, тобто операція, що належить до A_G). Знову припустимо, що ми прийшли в клітину $\tilde{K}_{i,j}$ (в нижньому рядку) і що на попередньому шляху всі числа вже точно визначені шляхом відповідної перенумерації. Розглянемо такі матриці із Ω:

$N_{1,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } y = 2\}$,
$N_{1,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } y = 2\}$,
$N_{2,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant 2)\}$,
$N_{2,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant 2)\}$,
$\ldots$
$N_{i,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant i)\}$,
$N_{i,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant i)\}$,
і їхні ранги $r_{i,j} = rk(N_{i,j})$.

Тоді в $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{1,1} - r_{1,0})$ чисел, які не зустрічались раніше, пронумеруємо їх відповідно до порядку слідування на шляху.

В $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{2,1} - r_{2,0}) - (r_{1,1} - r_{1,0})$ чисел із $\tilde{K}_{1,n+1}$, які не зустрічаються в $\{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i, y = 1\}$. Перенумеруванням можемо завжди вибрати перші з них.

...

В $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{t,1} - r_{t,0}) - (r_{t-1,1} - r_{t-1,0})$ чисел із $\tilde{K}_{t-1,n+1}$ які не зустрічаються в $\{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i, y = 1\}$. Перенумеруванням можемо завжди вибрати перші з них.

...

Таким чином із рангів $rk\Omega$ слідує однозначний вигляд елемента. А це і доводить теорему.$\rhd$

Теорема 1.2. *Замикання довільної орбіти із бішубертівського багатовиду $BiSch(m,1)$ визначається в Грассманніані за допомогою нерівностей $\{rk(N) \leqslant k_N, N \in \Omega\}$, де $\{k_N, N \in \Omega\}$ є відповідним набором рангів $rk\Omega$ для деякого елемента орбіти.*

$\lhd$ Отже, нехай у нас є орбіта O, що визначається рівностями $\{rk(N) = k_N, N \in \Omega\}$ в Грассманніані. Доведемо, що її замикання $\overline{O}$ визначається нерівностями з тими ж правими частинами $\{rk(N) \leqslant k_N, N \in \Omega\}$. В Грассманнових координатах O визначається як

$$O = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0,\, G_1 \neq 0 \,\text{або}\, \ldots \,\text{або}\, G_k \neq 0 \rangle \tag{132}$$

І треба довести, що її замикання визначається як

$$\overline{O} = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0 \rangle \tag{133}$$

Можна вважати, що $k = 1$. Дійсно, припустивши, що твердження теореми вірне для цього випадку, матимемо

$$\begin{aligned} O &= \bigcup O_i,\ O_i = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0,\, G_i \neq 0 \rangle\,, \\ \overline{O} &= \bigcup \overline{O_i},\ \overline{O_i} = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0 \rangle\,. \end{aligned}$$

Тобто, твердження теореми буде вірним і для довільного k. Тепер, застосувавши занурення Веронезе, можна вважати, що G_i лінійне, тобто, що $\langle G_i \neq 0\rangle = \mathbb{A}_0^n = \langle x_0 \neq 0\rangle$. Отже маємо: $X' \subseteq \mathbb{A}_0^n \subseteq \mathbb{P}^n$.

$$X' = \langle F_1(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = F_m(x_1,\ldots,x_n) = 0\rangle \text{ в } \mathbb{A}_0^n.$$

$$X = \left\langle x_0^{d_1}\cdot F_1\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right) = \ldots \right.$$
$$\left. \ldots = x_0^{d_m}\cdot F_m\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right) = 0\right\rangle,$$

$$\tilde{F}_i := x_0^{d_i}\cdot F_i\left(\tfrac{x_1}{x_0},\ldots,\tfrac{x_n}{x_0}\right), \quad d_i := \deg F_i,$$

де за визначальні рівняння для X' завжди можна вибрати базу Грьобнера.

Треба довести, що $X = \overline{X}'$.

Відомо, що

$$X \cap \mathbb{A}_0^n = \overline{X}' \cap \mathbb{A}_0^n = X',$$

і $X \supseteq \overline{X}$ (тому що X замкнена і $X \supseteq X'$). Нехай у нас є ненульовий багаточлен G, рівний нулю на $\overline{X}'$ і не рівний на X:

$$G|_{\overline{X}'} = 0,\ \ G|_X \neq 0.$$

Він не ділиться на x_0, інакше $G|_X = 0$. Тоді $G|_{X'} = 0$, а значить

$$G(1,x_1,\ldots,x_n)^t \in \langle F_1,\ldots,F_m\rangle,$$

де можна припустити, що $t = 1$.

Значить

$$G(1,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^m H_iF_i,$$
$$\deg H_iF_i \leqslant \deg G(1,x_1,\ldots,x_n) = \deg G =: d,$$

оскільки G однорідний і не ділиться на x_0. Звідси

$$G = x_0^d G\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_0^d H_i\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}\right) F_i\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_0^{d-d_i} H_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \cdot x_0^{d_i} F_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tilde{H}_i \cdot \tilde{F}_i,$$

де $\tilde{H}_i$ є багаточленом, так як $d - d_i \geqslant \deg H_i$. Тобто $G \in \left\langle \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m \right\rangle$ => $G|_X = 0$ – протиріччя.

Отже, якщо багаточлен G обертається в нуль на $\overline{X}'$, то він обертається в нуль і на X, а значить $X = \overline{X}'$. $\rhd$

Тепер переформулюємо отримані рангові результати в термінах рівнянь в проективному просторі.

Теорема 1.3. *Довільна компонента C з довільного бішубертівського багатовиду $BiSch(m, 1)$ визначається в Грассманніані за допомогою рівнянь $S = \{X_{k_1,\dots,k_d} = 0\}$, де S складається з усіх мінорів окрім таких, що можна так пронумерувати їхні рядки числами від 1 до d, що $\forall l = \overline{1, d}$, l-ий рядок буде знаходитись в зоні впливу числа l (тобто в клітині, що розташована не вище і не правіше від клітини числа l) у характеристичній таблиці компоненти. Ця система рівнянь є мінімальною.*

$\lhd$ З попередньої теорії можна зробити висновок, що компонента C задовольняє цим рівнянням, і не задовольняє всім іншим рівнянням вигляду $X_{k_1,\dots,k_d} = 0$. Дійсно, розглянемо характеристичний елемент e_O "великої" орбіти O, що відповідає компоненті C, і його матрицю. Очевидно, що діючи на неї перетвореннями рядків із A_G, ми можемо зробити в ній ненульовими довільний d-вимірний мінор, який не міститься в S. Більше того, ми можемо зробити його довільним. Всі ж інші мінори завжди будуть залишатися нульовими. Діючи на e_O перетвореннями рядків із A_G, ми пробігаємо всю орбіту O, тому твердження справедливе для O. А так як O щільна в C, то твердження справедливе і для C.

Тепер нам треба ще довести, що в Грассманніані набір рівнянь S визначає множину, не більшу за компоненту C. Для цього ми доведемо, що якщо якась матриця елемента не задовольняє нерівностям, визначеним в Теоремі 1.2, то вона також не задовольняє набору рівнянь S.

Отже, нехай у нас є матриця M, яка не задовольняє ранговим визначальним нерівностям для компоненти. Наприклад, $rk(N) = k_N + r$, $r \geqslant 1$, для якоїсь $N \in \Omega$, де k_N – відповідне визначальне число для компоненти. Тоді в N виберемо $k_N + r$ лінійно незалежних рядків (утворену ними матрицю позначимо як E) і доповнимо їх до d-вимірної підматриці F рангу d. Отримаємо мінор, що не дорівнює нулю для M, і завжди дорівнює нулю для довільного

елемента із компоненти, так як $rk(E) < k_N + r$ в C. Тому цей мінор входить до S, а звідси $M \notin V(S) \cap Gr$.

Отже, $C = V(S) \cap Gr$.

Доведемо мінімальність такої системи в Грассманніані. Якщо викинути рівняння $X_{k_1,\ldots,k_d} = 0$ із системи, то утворимо таку матрицю M – елемент Грассманніана: поставимо в її підматриці, що відповідає мінору $X_{k_1,\ldots,k_d}$, одиничну матрицю, а все інше заповнимо нулями. Тоді M

буде мати єдину ненульову координату Грассманна $X_{k_1,\ldots,k_d} = 1$, а отже не буде задовольняти всій системі визначальних рівнянь S, але буде задовольняти неповній системі. Отже система є мінімальною. $\triangleright$

Висновок 1.1. *Всі незвідні компоненти всіх бішубертівських багатовидів $BiSch(m,1)$ не є повними перетинами в Грассманніані. Тобто їхні корозмірності не дорівнюють кількості відповідних визначальних рівнянь.*

$\triangleleft$ Нехай ми маємо деяку незвідну компоненту C з таблицею, що містить числа в клітинах (x_l, y_l), $l = \overline{1,d}$. Підрахуємо кількість тих визначальних рівнянь, для яких всі рядки відповідного мінора окрім одного – це рядки, що відповідають $d-1$ числу із таблиці, а цей один знаходиться поза зоною впливу невикористаного числа (зверху або справа від нього). Маємо $\sum\limits_{l=1}^{d}(h-r(l)) - \sum\limits_{l=1}^{d}|\Sigma_{x_l,y_l}|$ рівнянь в позначеннях Розділу 1 в [1]. Тоді сума кількості цих рівнянь і розмірності компоненти рівна $d \cdot h - d^2 = \dim(Gr(d,h))$. Тепер знайдемо по крайній мірі ще одне визначальне рівняння.

Так як $d \geqslant 2$, то виберемо довільні 2 числа в таблиці для C (нехай це будуть 1,2). Можливі 2 варіанти їх взаємного розміщення (з точністю до перенумерації).

В обох випадках клітини, в яких не намальовані точки (із чотирьох, що знаходяться на перетині рядків k, l і стовпчиків i, j), є “вільними” (в термінах Теореми 1 в [2]).

В 1-ому випадку взаємного розміщення виберемо такий визначальний мінор: всі рядки окрім 2-х – це рядки, що відповідають числам $3, \ldots, d$ із таблиці; один рядок – це порожній рядок із клітини (i,k), а один – порожній рядок із клітини (j,l).

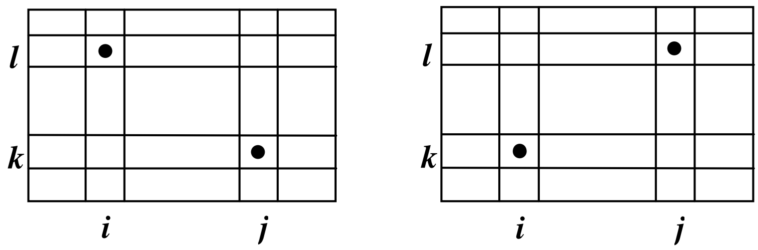


Рис. 13. Варіанти взаємного розміщення 2-х чисел.

В 2-ому випадку виберемо майже так само: всі рядки окрім 2-х – це рядки, що відповідають числам $3, \ldots, d$ із таблиці; один рядок – це порожній рядок із клітини (i, l), а один – порожній рядок із клітини (j, k).

В обох випадках ці мінори не входять в обчислені раніше, але є визначальними. $\triangleright$

2. Структура взаємного розміщення орбіт

Відповідь на питання про взаємне розміщення замикань "великих" орбіт і їхніх перетинів дає наступна теорема.

Теорема 2.1. *Якщо $O_1, \ldots, O_{m+1}$ - це всі "великі" орбіти із $BiSch(m, 1)$, то*
(1) Для довільного перетину $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$ існує орбіта O така, що $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$.
(2) якщо $r < m + 1$, то всі перетини різні.

$\triangleleft$ Цей результат є фактично наслідком теорем 1.1, 1.2.

Дійсно, якщо ми маємо r орбіт $O_{i_1}, \ldots, O_{i_r}$ з відповідними визначальними наборами рангів $\{k_N^1, N \in \Omega\}, \ldots, \{k_N^r, N \in \Omega\}$, то $\overline{O}_{i_r}, \ldots, \overline{O}_{i_r}$ визначаються за допомогою нерівностей $\{rk(N) \leqslant k_N^1, N \in \Omega\}, \ldots, \{rk(N) \leqslant k_N^r, N \in \Omega\}$.

Тому $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$ визначається за допомогою нерівностей

$$\{rk(N) \leqslant k'_N, N \in \Omega\},$$

де $\{k'_N = \min(k_N^1, \ldots, k_N^r), N \in \Omega\}$. Тепер, якщо ми знайдемо таку орбіту, яка має набір рангів $\{k'_N, N \in \Omega\}$, то ми автоматично доведемо твердження.

Позначимо через O_i $i = \overline{1, m+1}$, таку "велику" орбіту:

$m+1$	$\ldots$	$i+1$		$i-1$	$\ldots$	1
	$\ldots$		i		$\ldots$	

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \ldots & m{+}2{-}i & \ldots & m+1 \end{array}$$

Рис. 14. Таблиця орбіти O_i

Для довільних $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m+2,\ i \leqslant m+1$ позначимо через $\Omega(i,j)$ таку матрицю із Ω:

$$\Omega(i,j) = \left\{ \bigcup \tilde{K}_{x,y},\ (y = 2 \text{ і } x \geqslant i) \text{ або } (y = 1 \text{ і } x \geqslant j) \right\}.$$

Такі матриці складають всю Ω. Для кожного $j = \overline{1, m}$ через A_j позначимо такий вектор рангів матриць із Ω: $A_j = \left(rk\left(\Omega(k, m+2-j)\right),\ k = \overline{m+2-j, 1} \right)$, а через A_0 такий: $A_0 = \left(rk\left(\Omega(k, m+2)\right),\ k = \overline{m+1, 1} \right)$.

Введемо звичайний покомпонентний частковий порядок "$\leqslant$" а також звичайну покомпонентну рівність "$=$" на множині векторів однакової розмірності, елементами яких є цілі невід'ємні числа. Будемо казати, що $M = (m_1, \ldots, m_t) < N = (n_1, \ldots, n_t)$, якщо $M \leqslant N$ і $M \neq N$, тобто $m_i \leqslant n_i$, $\forall i = \overline{1, t}$ і $\exists j :\ m_j < n_j$.

Тепер ми хочемо довести, що $\forall j = \overline{0,m}$ на множині $\left\{A_j^i, i = \overline{1, m+1}\right\}$, де A_j^i позначає набір рангів A_j для "великої" орбіти O_i, порядок "$\leqslant$" є лінійним. Дійсно, просто випишемо всі $\left\{A_j^i, i = \overline{1, m+1}\right\}$.

Для $\forall j = \overline{1,m}$:
$A_j^1 = (j, j+1, \ldots, m+1)$,
$\ldots$
$A_j^j = (j, j+1, \ldots, m+1)$,
$A_j^{j+1} = (j, j, j+1, \ldots, m)$,
$A_j^{j+2} = (j, j+1, j+1, j+2, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_j^{m+1} = (j, \ldots, m-1, m, m)$.
Тобто $A_j^1 = \ldots = A_j^j > A_j^{m+1} > \ldots > A_j^{j+1}$
Для $j = 0$:
$A_0^1 = (0, 1, 2, \ldots, m)$,
$A_0^2 = (1, 1, 2, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_0^j = (1, \ldots, j-2, j-1, j-1, j, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_0^{m+1} = (1, 2, \ldots, m)$.

Тобто $A_0^{m+1} > \ldots > A_0^1$.

Всі ці взаємовідношення зображені на Рис.15, де число i в стовпчику A_j означає A_j^i, і якщо в одному і тому ж стовпчику число i_1 розташоване вище ніж i_2, то це означає, що $A_j^{i_1} > A_j^{i_2}$. Якщо ж в якомусь стовпчику якесь число не зображене, то це означає, що воно стоїть там же де і відповідна одиничка, тобто, що $A_j^i = A_j^1$.

Таким чином, для знаходження визначальних рангів $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$, замість того щоб брати мінімуми по кожному числу, ми можемо брати мінімуми на рівні векторів A_j, які у нас точно виписані.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\dots$	A_m
	1	1	1	1	1	$\dots$	1
$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$		$m+1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
5	5	5	5	5			
4	4	4	4				
3	3	3					
2	2						
1							

Рис. 15. Взаємовідношення векторів A_j^i

Отже, для $i_1 < \dots < i_r$ $\overline{O}_{i_1} \cap \dots \cap \overline{O}_{i_r}$ має такі визначальні вектори A'_j:

$A'_j = A_j^{i_1}, \quad j = \overline{0, i_1 - 1},$

$A'_j = A_j^{i_2}, \quad j = \overline{i_1, i_2 - 1},$

$\dots$

$A'_j = A_j^{i_r}, \quad j = \overline{i_{r-1}, i_r - 1},$

$A'_j = A_j^1 = A_j^{i_1} = \dots = A_j^{i_r}, \quad j = \overline{i_r, m}.$

Вони, очевидно, різні для різних наборів $i_1 < \dots < i_r$. Тепер знайдемо орбіту, що має такі ж визначальні вектори.

Для $\overline{O}_{i_1} \cap \dots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$, O виглядає так

$m{+}1$	$\dots$	i_r+1	i_{r-1}	i_r-1	$\dots$	i_2+1	i_1
			i_r				i_2
i_2-1	$\dots$	i_1+1		i_1-1	$\dots$	2	1
				i_1			

Рис. 16. Таблиця орбіти O, де $\overline{O}_{i_1} \cap \dots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$

Тобто для всіх $i = \overline{1, m+1}$, $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ в клітині $\tilde{K}_{m+2-i,2}$ стоїть число i, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i,1}$ не стоїть нічого. В клітині $\tilde{K}_{m+2-i_1,2}$ пусто, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_1,1}$ стоїть число i_1, $\forall k = \overline{2, r}$ в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_k,2}$ стоїть i_{k-1}, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_k,1}$ стоїть i_k.

$\triangleright$

Якщо ввести позначення $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}_{i_1,\ldots,i_r}$, то для випадку $Bisch(2,1)$ картина взаємного розміщення перетинів незвідних компонент виглядає так

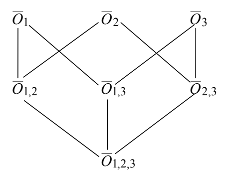


Рис. 17. Взаємне розміщення перетинів незвідних компонент в $Bisch(2,1)$

3. Особливі та регулярні точки

Для кожної з незвідних компонент цікаво знати чи містять вони особливі точки. Відповідь виявляється позитивною. Причому вона може залежати від розмірностей підматриць $K_{i,j}$. Тут ми повністю розглянемо і приведемо доведення тільки для найпростішого випадку $Bisch(1,1)$, для більш складних випадків все робиться аналогічним шляхом тільки складніше.

Отже, розглянемо $Bisch(1,1)$ в грассманіані $Gr(2,h)$. Випишемо спочатку рівняння самого грассманіана в усьому просторі P^N, $N = \binom{h}{d} - 1$. Як відомо (див. [5]), грассманіан $Gr(d,h)$ задається всіма рівняннями такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} \cdot X_{k_1 k_2 \ldots k_{d-1} l_i} \cdot X_{l_1 \ldots \check{l}_i \ldots l_{d+1}} = 0 \tag{134}$$

для всіх можливих $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{d-1} \leqslant h$ і $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_{d+1} \leqslant h$.

Позначимо множини $\{k_1, \ldots, k_{d-1}\}$ і $\{l_1, \ldots, l_{d+1}\}$ як A і B відповідно. При $A \subset B$ відповідне рівняння перетворюється на тотожність. При $A \not\subset B$ легко бачити, що як би не розбивалась на A та B множина $A \cup B = \{i, j, k, l\}$, $i < j < k < l$, відповідне рівняння завжди еквівалентне

$$X_{i,j} \cdot X_{k,l} - X_{i,k} \cdot X_{j,l} + X_{i,l} \cdot X_{j,k} = 0. \tag{135}$$

Очевидно що при різних $A \cup B$ відповідні рівняння будуть різними. Отже, кількість рівнянь в системі $SGr(2, h)$ визначальних рівнянь для $Gr(2, h)$ рівна $\binom{h}{4}$.

Нагадаємо, що за "*проективним якобієвим критерієм*", для регулярності точки p із проективного багатовиду $X \subset P^n$, $I(X) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, необхідно і достатньо, щоб $rk\,(\partial F_i / \partial X_j)\,(p) = n - \dim_p X$, де $\dim_p X = \dim X$ для незвідного багатовиду X. Нагадаємо також, що для незвідного багатовиду X, множина його регулярних точок X_{reg} є відкритою щільною підмножиною в X.

Випишемо тепер всі орбіти із $Bisch(1, 1)$. Їх всього 6.

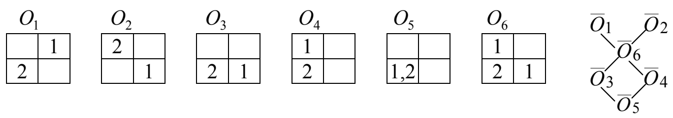


Рис. 18. Орбіти $Bisch(1, 1)$

Розглянемо деяку незвідну компоненту C в $Bisch(m,n)$. Вона є замиканням відповідної "великої" орбіти O. Тому O перетинається з C_{reg}. А так як всі перетворення із нашої алгебраїчної групи A_G не змінюють регулярності чи особливості точки, то $O \subset C_{reg}$. Це стосується і всіх інших орбіт із C, вони містять або тільки регулярні точки, або тільки особливі.

3.1. **Компонента $C_1 = \overline{O}_1$.**

Позначимо через S_i множину визначальних рівнянь компоненти C_i в $Gr(2,h)$ (див. теорему 4, [1]). Тоді

(136)

$$\dim C_1 = 2D_{1,1} + D_{1,2} + D_{2,1} + D_{2,2} - 3,$$

$$|S_1| = D_{1,2} \cdot D_{2,1} + D_{1,2} \cdot D_{2,2} + D_{2,1} \cdot D_{2,2} +$$

$$\binom{D_{1,2}}{2} + \binom{D_{2,1}}{2} + \binom{D_{2,2}}{2} = \binom{h}{2} - NI_1 =$$

$$= \binom{h}{2} - \left(D_{1,1} \cdot D_{1,2} + D_{1,1} \cdot D_{2,1} + D_{1,1} \cdot D_{2,2} + \binom{D_{1,1}}{2} \right).$$

В усьому просторі P^N, $N = \binom{h}{2} - 1$, компонента C_i задається рівняннями із S_i плюс рівняннями грассманіана $SGr(2,h)$.

Отже, для регулярності точки $p \in C_1$, нам треба знайти $\left(\binom{h}{2} - 1\right) - \dim C_1$ рівнянь із $S_1 \cup SGr(2,h)$, чиї якобіани були б лінійно незалежними в точці p. А так як якобіани функцій із S_i є просто ЛНЗ векторними константами (з єдиним ненульовим елементом, рівним, до речі, одиниці), то задача зводиться до того, щоб знайти

$$\left(\binom{h}{2} - 1\right) - \dim C_1 - |S_1| = NI_1 - \dim C_1 - 1$$

рівнянь із $SGr(2,h)$, чиї б якобіани були ЛНЗ в точці p разом з якобіанами від функцій із S_1.

Розглянемо орбіту O_3 і її загальний елемент e_3, зображений на Рис.18. Розглянемо деяку функцію f із

$SGr(2,h)$: $X_{i,j}\cdot X_{k,l}-X_{i,k}\cdot X_{j,l}+X_{i,l}\cdot X_{j,k}$. Її якобіан рівний

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X} = \ & (\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{i,j}}}{X_{k,l}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{i,k}}}{-X_{j,l}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{i,l}}}{X_{j,k}}, \dots \\ & \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{j,k}}}{X_{i,l}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{j,l}}}{-X_{i,k}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{k,l}}}{X_{i,j}}, \dots)\end{aligned} \tag{137}$$

де "..." означають нулі.

Для того, щоб він не був рівний нулю в точці $p = e_3$, треба щоб хоч один $X_{*,*}$ із f був рівним $X_{\tilde{1},\tilde{2}} = 1$, де $\tilde{l}$ позначає рядок, в якому стоїть число l в e_3. А це можливо тільки якщо $\left\{\tilde{1},\tilde{2}\right\} \subset \{i,j,k,l\}$. Отже, треба розглядати $A \cup B = \left\{i,j,\tilde{1},\tilde{2}\right\}$, для яких матимемо

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)(e_3) = (0,\dots,0, \underset{\substack{\uparrow\\ X_{i,j}}}{1}, 0,\dots,0) \tag{138}$$

Але $X_{i,j}$ не повинно належати S_1, інакше $(\partial f/\partial X)(e_3)$ буде рівним $(\partial X_{i,j}/\partial X)(e_3)$, а отже якобіан від f буде ЛЗ від якобіанів функцій із S_1.

Отже, для $i,j \notin \left\{\tilde{1},\tilde{2}\right\}$ можливі такі варіанти: $(K_{1,1}$,$K_{1,2})$, $(K_{1,1}$,$K_{2,1})$, $(K_{1,1}$,$K_{2,2})$, $(K_{1,1}$,$K_{1,1})$. Залишається їх тільки порахувати.

$$\begin{aligned}\tilde{N}_3 &= (D_{1,1}-1)\cdot D_{1,2} + (D_{1,1}-1)\cdot(D_{2,1}-1) + \\ &+ (D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2} + \binom{D_{1,1}-1}{2} = NI_1 - \dim C_1 - 1.\end{aligned} \tag{139}$$

Отже, вся орбіта O_3 складається з регулярних в C_1 точок.

Так само розглядаємо орбіти O_4, O_5. Маємо

$$\tilde{N}_4 = (D_{1,1}-1)\cdot(D_{1,2}-1)+(D_{1,1}-1)\cdot D_{2,1}+ \\ +(D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2}+\binom{D_{1,1}-1}{2} = NI_1-\dim C_1-1. \tag{140}$$

$$\tilde{N}_5 = (D_{1,1}-2)\cdot D_{1,2}+(D_{1,1}-2)\cdot D_{2,1}+ \\ +(D_{1,1}-2)\cdot D_{2,2}+\binom{D_{1,1}-2}{2} = (NI_1-\dim C_1-1)- \\ -(D_{1,2}+D_{2,1}+D_{2,2}-1) < NI_1-\dim C_1-1. \tag{141}$$

Отже, O_4 є регулярною, а O_5 особливою в C_1.

Випадок орбіти O_6 трохи складніший. Щоб розрізняти рядки, в яких стоять дві одинички її таблиці, запишемо її загальний елемент e_6 в такому вигляді:

$$e_6 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1' & \\ \hline 2 & 1'' \\ \hline\end{array} \tag{142}$$

Тоді, вибравши за $A\cup B$, наприклад, $\left\{i,j,\tilde{1}',\tilde{2}\right\}$, $i,j\notin\left\{\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\right\}$, ми маємо ті самі випадки, що і для попередніх орбіт. Випадки $A\cup B=\left\{i,j,\tilde{1}'',\tilde{2}\right\}$ на рівні якобіанів аналогічні випадкам $A\cup B=\left\{i,j,\tilde{1}',\tilde{2}\right\}$, а тому не повинні додатково обчислюватись. Плюс існує ще один випадок: $A\cup B=\left\{i,\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\right\}$. Для нього маємо таке значення якобіана в точці e_6:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)(e_6) = \begin{array}{ccccc} (0,\ldots,0, & \pm 1 & ,0,\ldots,0, & \pm 1 & ,0,\ldots,0) \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & X_{i,\tilde{1}'} & & X_{i,\tilde{1}''} & \end{array} \tag{143}$$

Цей випадок ніяк не перетинається з попередніми, і всі такі випадки між собою також різні. Тобто треба додатково порахувати кількість таких $A\cup B=\left\{i,\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\right\}$, щоб

хоча б один із $X_{i,\tilde{1}'}$, $X_{i,\tilde{1}''}$ не належав S_1. Маємо:
(144)
$$\tilde{N}_6 = (D_{1,1}-1)\cdot(D_{1,2}-1)+(D_{1,1}-1)\cdot(D_{2,1}-1)+$$
$$+(D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2}+\binom{D_{1,1}-1}{2}+(D_{1,1}-1)=$$
$$=NI_1-\dim C_1-1$$

Отже O_6 є регулярною в C_1.

3.2. Компонента $C_2 = \overline{O}_2$.

Для другої компоненти маємо такий результат:

$$\begin{array}{l}
O_2 \text{ в } C_2: \ \textit{регулярна} \\
O_3 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{1,2}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{1,2}>1 \end{cases} \\
O_4 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{2,1}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{2,1}>1 \end{cases} \\
O_5 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{1,2}=D_{2,1}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{1,2}+D_{2,1}>2 \end{cases} \\
O_6 \text{ в } C_2: \textit{регулярна}
\end{array} \tag{145}$$

Отже, вже для $Bisch(1,1)$ виявилося, що існують особливі точки. Для $Bisch(2,1)$ було також перевірено декілька випадків і ситуація виявилася аналогічною. Тому видається правдоподібним, що вона буде зберігатися і для інших бішубертівських багатовидів.

Література

[1] Коломієць П.С. Деякі факти про бішубертівські багатовиди // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки – **4** – 2006. – с. 38-47.

[2] Y.A. Drozd, P.S. Kolomiets On some generalization of Schubert's varieties // Computational Commutative and Non-Commutative Algebraic Geometry. NATO Science Series III: Computer and Systems Sciences – Vol.196 – 2005. – с. 79-89.

[3] Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, том 2. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1954.

[4] Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, том 1. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1954.

[5] Дрозд Ю.А. Вступ до алгебраїчної геометрії. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2001.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 201-212

В. М. Кузаконь

Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса
E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости

В работе дается полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоение кривых на плоскости относительно группы движений. Показано, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи дифференцирования последних вдоль инвариантных векторных полей.

1. Введение

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — расслоение кривых на плоскости. Найдем алгебру дифференциальных инвариантов этого расслоения относительно группы движения плоскости $\mathbb{R}^2$.

В координатах такое расслоение можно задать с помощью некоторой гладкой (класса C^∞) функцией двух переменных $u = f(x_1, x_2)$, такой, что ее дифференциал $df \neq 0$. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми расслоения φ. Здесь x_1, x_2 — координаты на плоскости, u — координата на прямой $\mathbb{R}$.

Конечно, фунция f определена с точностью до перепараметризации прямой $\mathbb{R}$ (так называемого gauge-преобразования), то есть с точностью до преобразования

$f \to F(f)$, где $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция.

Движения плоскости вместе с gauge-преобразованием прямой порождают псевдогруппу Ли G пространства $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ с координатами x_1, x_2, u.

Базис алгебры Ли этой псевдогруппы состоит из следующих векторных полей на пространстве $\mathbb{R}^3$:

параллельных переносов в плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{146}$$

поворотов в плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно начала координат:

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{147}$$

перепараметризации прямой $\mathbb{R}$:

$$h(u) \frac{\partial}{\partial u}. \tag{148}$$

Здесь $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $J^k = J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ — пространство k-джетов гладких функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Размерность пространства дифференциальных инвариантов — это коразмерность регулярных орбит продолжения псевдогруппы Ли G в расслоение J^k. Например, размерность пространства 1-джетов J^1 равна пяти, и размерность орбиты общего положения тоже равна пяти. Поэтому у расслоения кривых φ не существует дифференциальных инвариантов первого порядка.

Размерность орбиты общего положения в $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ равна $k + 4$, а размерность пространства J^k равна $2 + C^k_{k+2}$. Поэтому коразмерность орбиты равна

$$\nu(k) = C^k_{k+2} - k - 2. \tag{149}$$

Это число совпадает с числом функционально независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых не выше k.

Таким образом, число $\mu(k)$ инвариантов k-го порядка можно вычислить по формуле:

$$\mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k \tag{150}$$

В частности мы видим, что $\mu(2) = 2$ и поэтому у расслоения $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ существует ровно два независимых дифференциальных инварианта второго порядка [3]. В работе [4] эти инварианты построены:

$$I_1 = \frac{p_2^2 p_{11} - 2p_1 p_2 p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}$$

и

$$I_2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2)p_{12} + p_1 p_2 (p_{22} - p_{11})}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}.$$

Инвариант I_1 представляет собой кривизну кривой семейства, а инвариант I_2 — кривизну ортогональных траекторий семейства кривых.

В этой работе мы покажем, что алгебра дифференциальных инвариантов порождается этими инвариантами второго порядка.

2. Геометрия пространств k-джетов и преобразования Ли

На пятимерном пространстве J^1 существует естественная контактная структура — *распределение Картана* $C : J^1 \to TJ^1$, порожденная дифференциальной 1-формой Картана ω_0, $C(a) = \ker \omega_{0,a}$, $a \in J^1$.

В канонических координатах Дарбу $(x, u, p) = (x_1, x_2, u, p_1, p_2)$ на J^1 форма Картана имеет вид

$$\omega_0 = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2,$$

а распределение Картана порождено четверкой векторных полей

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{dx_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Диффеоморфизм $\phi : J^1 \to J^1$ называется *контактным*, если он сохраняет распределение Картана. В терминах формы Картана это означает что $\phi^*(\omega_0) = \lambda\omega_0$ для некоторой необращающейся в нуль функции $\lambda \in C^\infty(J^1)$ [2].

Векторное поле X на J^1 называется *контактным*, если локальная однопараметрическия группа сдвигов вдоль траекторий этого поля состоит из локальных контактных диффеоморфизмов.

В терминах формы Картана контактность векторного поля означает, что операция взятия производной Ли вдоль этого поля от формы Картана — это просто умножение формы Картана на некоторую не обращающуюся в нуль функцию:

$$L_X(\omega_0) = \lambda\omega_0,$$

или, что эквивалентно, $L_X(\omega_0) \wedge \omega_0 = 0$.

Как известно, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством гладких функций на J^1 и множеством контактных векторных полей. Для каждой функции $f \in C^\infty(J^1)$ векторное поле

$$X_f = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^{2}p_i\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \\ + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

контактно. Функция f называется *производящей функцией* контактного векторного поля X_f. Наоборот, для всякого контактного векторного поля X функция $f = \omega_0(X)$ является его производящей функцией.

Заметим, что векторные поля (146)—(148) — контактные векторные поля с производящими функциями $p_1, p_2, x_1p_2 - x_2p_1$ и $h(u)$ соответственно. Поэтому алгебру Ли псевдогруппы G можно отождествить с алгеброй Ли контактных векторных полей с производящими функциями вида

$$f(x, u, p) = h(u) + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3(x_1p_2 - x_2p_1), \tag{151}$$

где a_1, a_2, a_3 — константы.

Перейдем к пространству J^k k-джетов гладких функций на $\mathbb{R}^2$. Размерность этого пространства равна $2 + C^k_{k+2}$. Пусть $x, u, p_\mathbf{1}, p_\mathbf{2}, \ldots, p_\mathbf{k}$ — координаты на этом пространстве. Здесь $\mathbf{s} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ — мультииндексы длины s, где $t_1, \ldots t_s \in \{1, 2\}$.

На этом пространстве естественным образом определены дифференциальные 1-формы ω_0 и

$$\omega_\mathbf{s} = dp_\mathbf{s} - p_{\mathbf{s}+1}dx_1 - p_{\mathbf{s}+2}dx_2, \tag{152}$$

где $\mathbf{s} + 1 = \{t_1, \ldots, t_s, 1\}$ и $\mathbf{s} + 2 = \{t_1, \ldots, t_s, 2\}$ — мультииндексы длины $s + 1$, $s = 1, \ldots, k - 1$.

Так, например, пространство J^2 восьмимерно. Его координаты: $x_1, x_2, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}$. Помимо формы Картана на пространстве J^2 определены еще две дифференциальные 1-формы:

$$\omega_1 = dp_1 - p_{11}dx_1 - p_{12}dx_2,$$

и

$$\omega_2 = dp_2 - p_{21}dx_1 - p_{22}dx_2.$$

Диффеоморфизм пространства J^k называется *преобразованием Ли* если он сохраняет распределение, заданное дифференциальными 1-формами ω_0 и (152).

Каждое преобразование Ли $\phi : J^k \to J^k$ естественно поднимается до преобразования Ли $\phi^{(1)} : J^{k+1} \to J^{k+1}$. Это преобразование определено на некоторой открытой всюду плотной области в J^{k+1}. Всякое преобразование Ли пространства J^k является поднятием некоторого контактного преобразования пространства J^1 [2].

Векторное поле X на J^k называется *полем Ли* если определяемые им семейства локальных диффеоморфизмов состоят из преобразований Ли. Как известно, всякое поле Ли на J^k является поднятием контактного векторного поля на J^1. Поднятие контактного векторного поля X_f на J^k будем обозначать $X_f^{(k)}$. Общая формула для нахождения приведена в [1]. Поднятие контактного векторного поля с производящей функцией $h = h(u)$ в J^2 имеет вид:

$$X_h^{(2)} = h(u)\frac{\partial}{\partial u} + h'(u)\left(\sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\right) + \\ + h''(u)\sum_{i,j} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{ij}}.$$

Функция $g \in C^\infty(J^k)$ является дифференциальным инвариантом псевдогруппы G тогда и только тогда когда она является первым интегралом векторного поля $X_f^{(k)}$ с производящей функцией (151) [1].

3. Структура алгебры дифференциальных инвариантов

С расслоением φ, заданном функцией $f = f(x_1, x_2)$ связаны два векторных поля на плоскости:

$$A = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

и

$$B = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

— поля единичных векторов, нормальных и касательных к кривым расслоения φ соответственно. Эти векторные поля инвариантны относительно движений плоскости и перепараметризации $f \to F(f)$.

Введем следующие дифференциальные операторы, действующие из $C^\infty(J^{k-1})$ в $C^\infty(J^k)$:

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \left(p_1 \Delta_1^{(k)} + p_2 \Delta_2^{(k)} \right)$$

и

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \left(p_2 \Delta_1^{(k)} - p_1 \Delta_2^{(k)} \right),$$

где Δ_1 и Δ_2 — операторы полного дифференцирования по переменным x_1 и x_2 соответственно:

$$\Delta_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} + p_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\mathbf{s}} p_{\mathbf{i}+\mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial p_{\mathbf{s}}} \qquad (i = 1, 2),$$

Суммирование здесь производится по всем мультииндексам $\mathbf{s}$ длиной от 1 до k. Напомним, что $\mathbf{i} + \mathbf{s} = \{i, t_1, \ldots, t_s\}$ для $\mathbf{s} = \{t_1, \ldots, t_s\}$. Например,

$$\Delta_1^{(3)} = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_1} + p_{12} \frac{\partial}{\partial p_2} + \\ + p_{111} \frac{\partial}{\partial p_{11}} + p_{112} \frac{\partial}{\partial p_{12}} + p_{122} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

Операторы A_k и B_k представляют собой векторные поля на J^k. Не сложно проверить, что

$$[A_k, B_k] = I_2 A_k - I_1 B_k. \tag{153}$$

Заметим, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A_k"] \arrow[d, "X_f^{(k-1)}"'] & C^\infty(J^k) \arrow[d, "X_f^{(k)}"] \\
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A_k"] & C^\infty(J^k)
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "B_k"] \arrow[d, "X_f^{(k-1)}"'] & C^\infty(J^k) \arrow[d, "X_f^{(k)}"] \\
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "B_k"] & C^\infty(J^k)
\end{tikzcd}$$

коммутативны для векторных полей X_f с производящей функцией (151). Поэтому если функция $g \in J^{k-1}$ является инвариантом порядка $k-1$, то функции $A_k(g)$ и $B_k(g)$ представляют собой дифференциальные инварианты порядка k.

Таким образом, применяя операторы A_3 и B_3 к инвариантам I_1 и I_2, мы получим следующий набор дифференциальных инвариантов третьего порядка:

$$I_{11} = A_3(I_1), \quad I_{21} = B_3(I_1), \quad I_{12} = A_3(I_2), \quad I_{22} = B_3(I_2) \tag{154}$$

Укажем их координатное представление:

$$I_{11} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_1^2p_2^2(-3p_{11}^2+8p_{12}^2+4p_{11}p_{22}-3p_{22}^2+p_1p_{111}$$
$$-p_1p_{122})+p_1^4(-2p_{12}^2-p_{11}p_{22}+p_1p_{122})-p_2^4(2p_{12}^2+$$
$$+p_1(-p_{111}+2p_{122}))++p_{11}p_{22}+p_1^3p_2(6p_{11}p_{12}-6p_{12}p_{22}-$$
$$-2p_1p_{112}+p_1p_{222})+p_2^5p_{112}+p_1p_2^3(-6p_{11}p_{12}+$$
$$6p_{12}p_{22}-p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr),$$

$$I_{21} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_2^5p_{111}-3p_2^4(p_{11}p_{12}+p_1p_{112})+$$
$$3p_1^3p_2(-2p_{12}^2-p_{11}p_{22}+p_{22}^2+p_1p_{122})+$$
$$p_1p_2^3(6p_{12}^2+3p_{11}(-p_{11}+p_{22})+p_1(p_{111}+3p_{122}))+$$
$$p_1^4(3p_{12}p_{22}-p_1p_{222})-$$
$$p_1^2p_2^2(-9p_{11}p_{12}+9p_{12}p_{22}+3p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr),$$

$$I_{12} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_1^4(-2p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22}+p_1p_{112})-p_2^5p_{122}+$$
$$p_1p_2^3(-p_{11}^2+6p_{12}^2+3p_{11}p_{22}-2p_{22}^2-p_1p_{111}+p_1p_{122})+$$
$$p_1^3p_2(2p_{11}^2-6p_{12}^2-3p_{11}p_{22}+p_{22}^2-p_1p_{111}+2p_1p_{122})+$$
$$p_2^4(-p_{11}p_{12}+2p_{12}p_{22}-2p_1p_{112}+p_1p_{222})+$$
$$\bigl(p_1^2p_2^2(9p_{11}p_{12}-9p_{12}p_{22}-p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr),$$

$$I_{22} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\left(-p_2^5 p_{112} + p_1^4(p_{12}^2 + p_{11}p_{22} - p_{22}^2 - p_1 p_{122}) + \right.$$
$$p_1^2 p_2^2 (2p_{11}^2 - 10p_{12}^2 - 4p_{11}p_{22} + 2p_{22}^2 - p_1 p_{111} + p_1 p_{122}) +$$
$$p_2^4(p_{12}^2 + p_{11}(-p_{11} + p_{22}) + p_1(-p_{111} + 2p_{122})) +$$
$$p_1 p_2^3 (8p_{11}p_{12} - 4p_{12}p_{22} + p_1 p_{112} - p_1 p_{222}) +$$
$$\left. p_1^3 p_2 (-4p_{11}p_{12} + 8p_{12}p_{22} + 2p_1 p_{112} - p_1 p_{222})\right).$$

Не трудно проверить, что $X_f^{(3)}(I_{ij}) = 0$ для производящей функции (151), так что эти функции действительно являются дифференциальными инвариантами псевдогруппы G.

Построенные инварианты третьего порядка функционально зависимы, ибо согласно формуле (150), число инвариантов третьего порядка равно 3. Поэтому между инвариантами порядка не более третьего должно быть одно соотношение. Действительно, это соотношение имеет следующий вид:

$$I_{11} + I_{22} + I_1^2 + I_2^2 = 0. \tag{155}$$

Обозначая операции дифференцирования вдоль траекторий векторных полей A_3 и B_3 через

$$\frac{d}{dn} = A_3 \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{ds} = B_3$$

соответственно, запишем соотношение (155) в виде дифференциального уравнения для инвариантов I_1 и I_2:

$$\frac{dI_1}{dn} + \frac{dI_2}{ds} + I_1^2 + I_2^2 = 0$$

Это уравнение будем называть *уравнением Gala*. Оно является аналогом уравнения Гаусса-Петерсона-Майнарди-Кодацци [1] в теории поверхностей.

Из уравнения Gala следует, что если инварианты I_1 и I_2 постоянны, то они равны нулю.

Обратимся теперь к инвариантам четвертого порядка. Их можно получить из инвариантов третьего порядка (154), применяя к ним операторы A_4 и B_4. В силу формулы (153) композиции операторов A_4B_3 и B_4A_3 дают одни и те же инварианты по модулю инвариантов более низкого порядка. Мы получаем шесть инвариантов четвертого порядка. Всего же мы получили 12 инвариантов порядка не менее 4. Применяя формулу (149), находим, что число функционально независимых инвариантов порядка не менее четырех равно девяти. Поэтому между построенными инвариантами должны существовать три соотношения. Одно из них — соотношение (155). Два других мы получаем их, дифференцируя (155) вдоль векторных полей A_4 и B_4.

Аналогично мы можем получить дифференциальные инварианты любого порядка. Соотношения между инвариантами получаются дифференцированием (155).

Итак, мы получаем следующую теорему, описывающую структуру дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости.

Теорема 1. *Все дифференциальных инварианты расслоения $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ отностиельно группы движений плоскости порождены дифференциальными инвариантами второго порядка I_1 и I_2, связанных уравнением Gala, и их всевозможными производными Ли вдоль векторных полей A_k и B_k.*

Список литературы

[1] *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.28. М., 1988.

[2] *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., "Наука 1986. 336 стр.

[3] *Кузаконь В. М.* Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.

[4] *Кузаконь В.М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, №4. – С. 95-99.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 213-234

Д. П. Лычак

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: `amidl@ukr.net`

А. О. Пришляк

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: `prishlyak@yahoo.com`

Геометрия функций Морса на ориентируемых поверхностях

В даній роботі розглядається відповідність між функціями Морса та градієнтними потоками на орієнтовних поверхнях. Доводиться, що кожному потоку Морса з нумерацією сідлових особливих точок відповідає рівно одна функція Морса. Обчислюється кількість функцій Морса з невеликим числом сідлових точок.

В данной работе рассматривается соответствие между функциями Морса и градиентными потоками на ориентируемых поверхностях. Доказывается, что каждому потоку Морса с нумерацией седловых особых точек соответствует ровно одна функция Морса. Вычисляется количество функций Морса с небольшим числом седловых точек.

The present paper studies the correspondence between Morse functions and gradient flows on the orientable surfaces. We prove that for every Morse flow with numeration of saddle singular points there is a certain Morse function. The number of Morse functions with several saddles is computed.

Введение

В работе рассматриваются гладкие замкнутые связные ориентируемые двумерные многообразия, гладкие функции и гладкие векторные поля на них.

Топологическая классификация функций Морса на поверхностях была получена в 1996 году В. В. Шарко ([1], также см. [2]) и Е. В. Кулиничем в 1998 году в [3]. В обеих работах использовались графы Риба. А. Т. Фоменко ввёл понятие атома и молекулы и использовал их для классификации как динамических систем (потоков Морса-Смейла) так и функций Морса на поверхностях (см. [4]).

М. М. Пейксото в 1973 году в работе [5] ввёл понятие различающего графа, который является полным топологическим инвариантом, классифицирующим потоки Морса-Смейла без предельных циклов (потоки Морса) с точностью до траекторной эквивалентности. Однако этот инвариант имеет сложное описание. В. В. Шарко и А. А. Ошемковым в 1998 году в работе [6] был предложен трёхцветный граф, который является инвариантом для потоков Морса на поверхностях и с которым гораздо легче проводить подсчёты. В данной работе он используется для задания потоков Морса.

С. Смейл в работе [7] доказал, что потоки Морса — это в точности градиентно-подобные потоки (то есть потоки траекторно эквивалентные потоку градиента некоторой функции Морса в некоторой римановой метрике) без сепаратрис, идущих из седла в седло. Поскольку для любой функции Морса можно так подобрать риманову метрику на многообразии, чтобы поток градиента не имел сепаратрис из седла в седло (был потоком Морса), то классу функций Морса соответствует класс потоков Морса.

Однако послойно эквивалентным функциям Морса в разных метриках могут соответствовать траекторно неэквивалентные потоки Морса, и наоборот, поток Морса с точностью до траекторной эквивалентности можно различными способами представить в виде потока градиента некоторой функции Морса (с точностью до послойной эквивалентности). Таким образом, соответствие между функциями и потоками зависит от метрики. В настоящей работе показано, что эту зависимость можно устранить, если рассматривать потоки Морса с дополнительной информацией.

Основная цель данной статьи — доказать, что потоку Морса с нумерацией седловых точек на ориентируемой поверхности соответствует ровно одна (с точностью до послойной эквивалентности) функция Морса. Вторая цель — используя сформулированное выше соответствие, а также конструкцию трёхцветных графов и графов Риба, найти все неэквивалентные потоки Морса с нумерацией при количестве седловых точек не большем 5, найти функцию Морса, соответствующую каждому из них и посчитать количество неэквивалентных функций Морса.

1. Предварительные сведения

Замечание 1. *Гладкое векторное поле на многообразии порождает гладкий поток (гладкую динамическую систему с непрерывным временем) и наоборот. Далее оба термина используются как синонимы.*

Пусть далее M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, $f : M \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, $v : M \to TM$ — гладкое векторное поле.

Определение 1. Точка $x \in M$ называется *критической точкой* функции $f : M \to \mathbf{R}$, если дифференциал функции f в этой точке равен нулю $df(x) = 0$ или, что то же самое $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0$. Критическая точка $x \in M$ называется *невырожденной*, если матрица $H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,2}$ в некоторых локальных координатах $x_1,\ x_2$ невырожденная.

Функция на двумерном многообразии может иметь невырожденные критические точки трёх типов: минимум (локальный), седло, максимум (локальный).

Определение 2. Гладкая функция $f : M \to \mathbf{R}$ называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырожденные. Функция Морса называется *простой*, если все её критические точки лежат на разных линиях уровня.

Определение 3. *Слоями* функции Морса будем называть компоненты связности её линий уровня. Две функции Морса будем называть *послойно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой, а локальные минимумы в локальные минимумы.

Далее рассматриваются только простые функции Морса.

Определение 4. *Графом Риба* (*Кронрода-Риба*) функции Морса $f : M \to \mathbf{R}$ называется факторпространство $M/\sim$ с ориентациями рёбер в соответствии с направлением возрастания функции, где $x_1 \sim x_2$, если x_1 и x_2 принадлежат одному слою. Графы Риба рассматриваются с точностью до изоморфизма ориентированных графов.

Утверждение 1. *Две функции Морса на ориентируемой поверхности послойно эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Риба изоморфны.*

Доказательство. Необходимость следует из определения графа Риба, поскольку гомеоморфизм поверхностей порождает изоморфизм графов. Доказательство достаточности см., например, в [4] (теорема 2.4, с. 76, том 1). □

Определение 5. Особая точка векторного поля

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

называется *невырожденной*, если матрица $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,\, j=1,\, 2}$ не имеет собственных чисел, действительная часть которых равна 0.

Векторное поле на двумерном многообразии может иметь три типа невырожденных особых точек: источник, седло и сток.

Определение 6. Векторное поле v на двумерном многообразии M будем называть *полем Морса*, если

(1) v имеет конечное число особых точек и все они невырожденные;
(2) каждая траектория начинается и заканчивается в особой точке;
(3) не существует траекторий, идущих из седла в седло.

Два поля Морса будем называть *траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит траектории одного поля в траектории другого с сохранением направления движения по ним.

Будем называть *полем Морса с нумерацией* поле Морса, у которого занумерованы сёдла. Такие поля мы будем рассматривать с точностью до траекторной эквивалентности, при условии, что гомеоморфизм поверхности будет сохранять нумерацию сёдел.

Замечание 2. *Существует ровно одно векторное поле Морса без седловых точек на связном замкнутом двумерном многообразии. Это поле градиента функции высоты на стандартно вложенной в $\mathbf{R}^3$ сфере S^2 с метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^3$. Далее будем считать, что поля Морса имеют хотя бы одно седло.*

Приведём конструкцию трёхцветных графов (подробности см. в [6]).

Определение 7. Граф T назовём *трёхцветным графом*, если все его вершины имеют степень три, а рёбра раскрашены в три цвета (s, u, t) таким образом, что в каждой вершине сходятся рёбра трёх разных цветов. Два трёхцветных графа назовём *изоморфными*, если они изоморфны без учёта раскраски, и этот изоморфизм сохраняет раскраску.

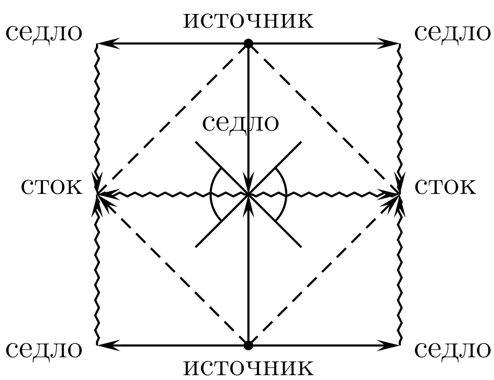


Рис. 19. Триангуляция поверхности

Сопоставим векторному полю Морса трёхцветный граф. Для этого проведём сепаратрисы. Они разобьют поверхность на *канонические четырёхугольники* (см. рис. 19).

Проведём по одной траектории из источника в сток для каждого канонического четырёхугольника. Таким образом, мы получили триангуляцию поверхности. Каждому треугольнику сопоставим вершину трёхцветного графа, две вершины соединяются s-ребром (u-ребром, t-ребром), если соответствующие им треугольники имеют общую сторону-сепаратрису из источника в седло (сепаратрису из седла в сток, траекторию из источника в сток). Будем называть такие сепаратрисы *s-сепаратрисами* (*u-сепаратрисами*, *t-траекториями*). *su-циклом* называется цикл на графе, в котором s- и u-рёбра встречаются по очереди.

Утверждение 2. *Два поля Морса траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им трёхцветные графы изоморфны.*

Утверждение 3. *Трёхцветный граф соответствует некоторому полю Морса тогда и только тогда, когда все его su-циклы имеют длину* 4. *Это поле Морса задано на ориентируемой поверхности тогда и только тогда, когда граф без учёта раскраски не имеет циклов нечётной длины.*

Доказательства этих утверждений см. в [6].

Для краткости мы будем называть такие графы *3-графами*. То есть 3-графы — это несколько su-квадратов (столько, сколько сёдел у поля), вершины которых произвольным образом соединены t-рёбрами. *3-графом с нумерацией* будем называть 3-граф с занумерованными su-квадратами.

Функции Морса будем рассматривать с точностью до послойной, а поля Морса — с точностью до траекторной эквивалентности.

2. Построение функции Морса по потоку Морса с нумерацией седловых точек

Теорема 1. *Пусть M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, Φ — поток Морса с занумерованными седловыми точками на M. Тогда существует функция Морса $f : M \to \mathbf{R}$ такая, что ее градиентный поток $grad\, f$ в некоторой римановой метрике траекторно эквивалентный потоку Φ и значения функции f в седловых точках упорядочены согласно нумерации седловых точек потока.*

Доказательство. Сначала подправим поток Φ в окрестностях особых точек. Возьмём окрестность N источника (для определённости), так чтобы ∂N была трансверсальна к траекториям потока. Существует диффеоморфизм $h : N \to D^2$. В круге возьмём стандартную функцию Морса $f(x,y) = x^2 + y^2$, стандартную метрику из $\mathbf{R}^2$ и стандартный поток Морса (поток градиента функции в этой метрике). С помощью обратного диффеоморфизма h^{-1} мы получим функцию Морса, метрику и стандартный поток Морса в окрестности особой точки. Заменим исходный поток в окрестности полученным стандартным потоком и сгладим его на границе N. Для стока всё происходит аналогично, а для седловой точки сглаживание потока производим так, чтобы на ∂N не было разрывов сепаратрис. Таким образом, мы получили немного изменённый, но траекторно эквивалентный исходному, поток. Далее мы будем работать с ним.

Для построения функции используем метод разложения многообразия на ручки с воротниками (см., например, [8]). Возьмём окрестности источников и расположим их в $\mathbf{R}^4$

так, чтобы заданная в них функция была функцией высоты. Далее к границе каждой окрестности приклеим воротник (трубку). Потом приклеим в нужном месте окрестность устойчивого многообразия (s-сепаратрис) седла под номером 1 (то есть ручку) так, чтобы функция высоты на ней совпадала в окрестности седла с уже заданной. Снова подклеим воротники. И так далее. В конце мы подклеим окрестности стоков. Если на границах приклеиваемых воротников и ручек нарушается гладкость функции, то она сглаживается стандартными методами (см. замечание 3). Этот процесс можно представить себе как вычёрчивание на многообразии линий уровня функции. По построению, мы получили функцию Морса на многообразии гомеоморфном M. Также из построения следует, что вне окрестностей критических точек, линии уровня функции трансверсальны траекториям потока. В окрестностях особых точек потока риманова метрика уже задана, вне этих окрестностей она задаётся так, чтобы скалярное произведение направляющих векторов траектории потока и линии уровня функции было всегда равно нулю. $\square$

Замечание 3. *В доказательстве теоремы 1 могут возникнуть ситуации, когда нарушается гладкость многообразия, потока или функции при приклеиваниях и замене потока в окрестностях особых точек. Во всех этих случаях сглаживания производятся стандартными методами, описанными, например, в [9] (с. 21–23).*

В доказательстве теоремы, мы построили функцию. Теперь выясним, однозначно ли такое построение.

Лемма 1. *Пусть на многообразии задана функция Морса. Две критические точки соединяются ребром на графе*

Риба тогда и только тогда, когда существует монотонный гладкий путь на многообразии, который соединяет эти точки и не пересекает критических слоёв (кроме своих концов). Под монотонным путём мы понимаем путь, вдоль которого данная функция возрастает. Два седла соединяются двумя рёбрами на графе Риба тогда и только тогда, когда существуют два монотонных гладких пути на многообразии, которые соединяют эти сёдла и не пересекают критических слоёв (кроме своих концов), причём, эти пути невозможно соединить постоянным путём на многообразии (то есть внутренние точки путей принадлежат разным слоям).

Доказательство. Необходимость следует из определения графа Риба. Достаточность следует из определения графа Риба и того факта, что все регулярные слои функции Морса являются окружностями. □

Из определения потока градиента следует, что функция должна возрастать вдоль его траекторий. Поэтому, функция Морса из теоремы 1 должна возрастать вдоль сепаратрис изначально заданного потока. Это свойство позволяет, зная поток и нумерацию его сёдел, найти пути из леммы 1, а значит однозначно (с точностью до послойной эквивалентности) найти функцию.

Монотонными путями из леммы 1 для локальных экстремумов будут сепаратрисы. Следовательно, точка минимума соединяется на графе Риба с седлом, которое имеет наименьший номер среди тех сёдел, которые соединены сепаратрисами с источником, который соответствует точке минимума. Аналогично для максимумов.

Возрастающий (для определённости) путь (или пути) из леммы 1 для седловых точек проходит по каноническим четырёхугольникам, пересекая s- и u-сепаратрисы. Он будет возрастающим тогда и только тогда, когда он возрастает на каждом пройденном четырёхугольнике. А этого можно достигнуть, если точка входа в четырёхугольник меньше точки выхода. Последнее определяется лишь номерами сёдел-вершин пройденных четырёхугольников, поскольку вариантов входа и выхода — два (через s- или u-сепаратрису), а пройденных четырёхугольников — конечное число. Чтобы проверить, пересекает ли путь критические слои, достаточно проверить существование постоянного пути от каждого из сёдел, с номером между номерами концов монотонного пути. Это проверяется аналогично проверке возрастания пути. Кратность рёбер на графе тоже сводится к поиску постоянного пути. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, Φ — поток Морса с занумерованными седловыми точками на M. Пусть $f : M \to \mathbf{R}$ и $g : M \to \mathbf{R}$ — такие функции Морса, что их градиентные потоки в некоторых римановых метриках траекторно эквивалентны потоку Φ и значения функций в седловых точках упорядочены согласно нумерации седловых точек потока. Тогда функции f и g послойно эквивалентные.*

Замечание 4. *Хотя потоку с нумерацией соответствует ровно одна функция, но разным нумерациям седловых точек потока могут соответствовать послойно эквивалентные функции Морса. Более того, разным потокам может соответствовать одна функция.*

3. Алгоритмы вычисления числа неэквивалентных полей Морса с нумерацией и функций Морса

В этом разделе будем использовать 3-графы и графы Риба для построения функции по потоку с нумерацией. Опишем основные идеи следующих алгоритмов: перебора (нахождения всех неэквивалентных) 3-графов с нумерацией без циклов нечётной длины (а значит потоков Морса с нумерацией сёдел на ориентируемых поверхностях), сравнения двух графов Риба, построения по 3-графу с нумерацией графа Риба функции Морса.

3-граф с нумерацией мы будем задавать обычным четырёхвалентным графом с нумерацией вершин, который получается стягиванием su-квадратов в точку, и метками (цифра от 1 до 6) в каждой вершине этого графа, которые позволяют восстановить 3-граф. Эти метки задаются неоднозначно (из-за петель и кратных рёбер в четырёхвалентном графе), но простым перебором всех возможных случаев неоднозначности можно произвести проверку на эквивалентность двух 3-графов с нумерацией. Четырёхвалентный граф будем кодировать списком четырёхэлементных списков, в которых записаны номера инцидентных вершин. Таким образом, нахождение всех потоков Морса с нумерацией сводится к нахождению всех неизоморфных четырёхвалентных графов с нумерацией вершин, приписыванию вершинам каждого из них всевозможных меток и проверкой (для каждого четырёхвалентного графа отдельно) какие наборы меток задают эквивалентные 3-графы с нумерацией. Потом нужно выбрать только графы без нечётных циклов.

Граф Риба будем задавать вспомогательным графом с нумерацией вершин, который получается из него отбрасыванием всех одновалентных вершин (которые соответствуют локальным экстремумам) и рёбер, инцидентных им, а также метками в каждой оставшейся вершине (числа -1, 1), которые определяют тип окрестности критического слоя (штаны или перевёрнутые штаны). Неоднозначность тут может возникнуть только из-за нумерации вершин. Следовательно, сравнить два графа Риба можно, перебрав все подстановки на n элементах (где n — количество сёдел), и проверив, не совпадают ли их вспомогательные графы с метками после перетасовки вершин одного из них посредством подстановки. Кодировать графы Риба будем n-элементным списком двухэлементных списков, которые содержат номера инцидентных сёдел с большим номером и тип окрестности критического слоя.

Назовём путь из леммы 1 допустимым. Будем начинать с меньших по номеру сёдел и строить возрастающие пути. Таким образом, не пропустим ни одного пути. Алгоритм построения всех допустимых возрастающих путей из седла a такой. Мы имеем интервал (a, b), где вначале $b = n + 1$, а n — количество сёдел. Начинаем идти от седла a по одному из канонических четырёхугольников (всего их четыре, надо перебрать все). Проверяем противоположное седло с номером i. Если $i < a$, то мы можем выйти через u-сепаратрису. Если $i > b$, то мы можем выйти через s-сепаратрису. Если $i \in (a, b)$, то мы присваиваем $b := i$, отмечаем i как кандидата на конец пути (предыдущего кандидата отбрасываем), и проходим через s-сепаратрису. Эта процедура заканчивается когда мы встретим седло с номером a или b. Тогда, если мы так и не нашли кандидата на конец пути, делаем вывод, что через этот четырёхугольник невозможно провести возрастающий допустимый путь в седло. Если же кандидат i был найден, то найденный путь от a к i — подозрительный на то, чтобы быть допустимым. Остаётся разобраться какие из найденных путей (мы могли найти максимум 4 пути) действительно не пересекают критических слоёв и соответствуют разным рёбрам на графе Риба.

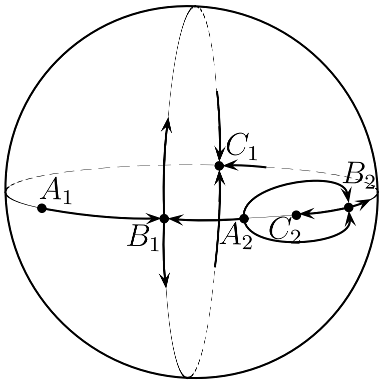
Поскольку для задания графа Риба нужно найти тип каждого седлового *атома* (то есть окрестности критического слоя седловой точки), то выясним, какие пути являются допустимыми с его помощью. Выпускаем из седла a по одному из канонических четырёхугольников постоянный путь. Проверяем противоположное седло с номером i. Если $i < a$, то можно выйти через u-сепаратрису. Если $i > a$, то можно выйти через s-сепаратрису. Процедура заканчивается, когда мы снова вернёмся в седло a. Проверяем через какой четырёхугольник мы пришли. Если он имеет с начальным четырёхугольником общую s-сепаратрису седла a, то тип атома — штаны (значение -1), если есть общая u-сепаратриса седла a, то тип атома — перевёрнутые штаны (1). Это утверждение следует из леммы 1 и того, что возрастающие пути, которые вышли по четырёхугольникам, имеющим общую s-сепаратрису седла a, всегда можно соединить постоянным путём (он пересечёт эту сепаратрису) (см. рис. 19). Аналогично, пути, которые вышли по четырёхугольникам, которые соединяются постоянным путём, можно соединить постоянным путём, немного приподняв первоначальный постоянный путь (тут рассматриваются только простые функции Морса, и никакое седло не сможет помешать).

Если не нашлось ни одного кандидата на возрастающий путь, то возрастающих рёбер из этого седла в другое седло нет (а есть в максимум(ы)). Далее, если седло соединяется на графе Риба с максимумом, то мы не могли найти возрастающих путей по четырёхугольникам, инцидентным соответствующему стоку. Действительно, это означало бы, что существует седло, соединённое сепаратрисой с этим стоком, и, которое имеет больший за a номер. А это противоречит правилу соединения стоков на графе. К тому же эти монотонные пути существуют парами. Следовательно, если тип атома равен 1 и мы нашли 4 пути, то проводим рёбра к минимальному и к максимальному из их концов. Иначе (при условии что пути есть) мы проводим одно ребро к минимальному концу.

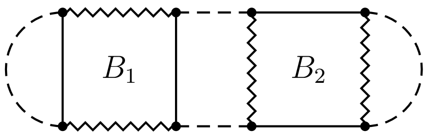
Все вышеназванные пути можно считать путями на 3-графе. Пересекая s-сепаратрису, мы проходим по s-ребру, проходя по каноническому четырёхугольнику от седла к седлу, мы проходим по t-ребру и тому подобное. Канонические четырёхугольники инцидентные седлу соответствуют вершинам su-квадратика. Словом, 3-графы оказываются очень удобными для таких подсчётов.

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим поток Морса на сфере S^2 с двумя источниками, двумя сёдлами и двумя стоками. Источники обозначены буквой A, сёдла — B, стоки — C. Один сток расположенный на тыльной стороне сферы. Сепаратрисы потока изображены на рисунке 20(а). Построим для этого потока трёхцветный граф. Сфера разбивается на восемь треугольников, следовательно, наш граф будет иметь восемь вершин. Соединяем эти вершины согласно правилу задания трёхцветного графа и получаем граф, изображённый на рисунке 20(b). При этом s-рёбра изображены сплошной линией, u-рёбра — зигзагом, а t-рёбра — пунктиром. 3-граф (когда сёдла B_1 и B_2 имеют номера



(a) Поток Морса на сфере



(b) Трёхцветный граф

Рис. 20. Поток Морса и его трёхцветный граф

1 и 2, соответственно) кодируется двумя списками: $g = [[1,1,2,2],[1,1,2,2]]$; $u = [4,1]$, или $u = [4,2]$, или $u = [6,1]$, или $u = [6,2]$ где g задаёт четырёхвалентный граф, а u (возможны четыре варианта)— метки в его вершинах.

Найдём функции Морса на сфере (точнее их графы Риба), поток градиента каждой из которых в некоторой метрике, будет эквивалентный данному потоку. Рассмотрим два случая:

(1) $B_1 < B_2$, то есть B_1 имеет номер 1, B_2 — номер 2. Тогда, согласно правилу соединения точек экстремума на графе Риба (см. доказательство теоремы 2), оба источника соединяются рёбрами с B_1, а оба стока — с B_2. Остаётся соединить одним ребром B_1 с B_2.

(2) $B_1 > B_2$, то есть B_1 имеет номер 2, B_2 — номер 1. Тогда, согласно правилу соединения точек экстремума на графе Риба, A_1 соединяется с B_1, A_2 — с B_2, C_1 — с B_1, C_2 — с B_2. Остаётся соединить одним ребром B_1 с B_2.

Графы Риба изображены на рисунке 21.

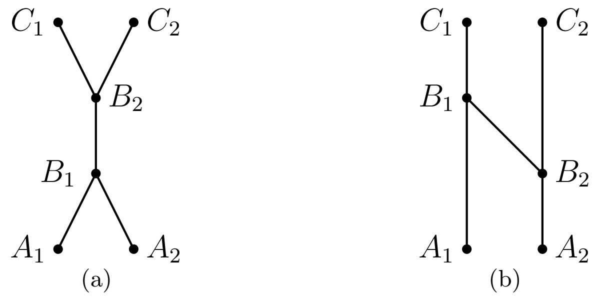
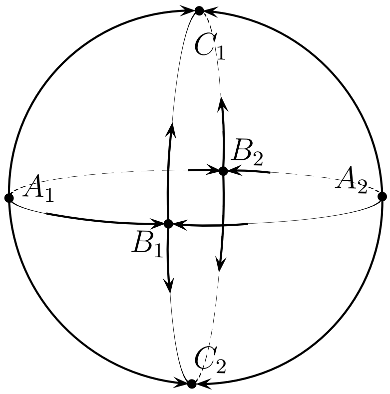


Рис. 21. Графы Риба, соответствующие потоку

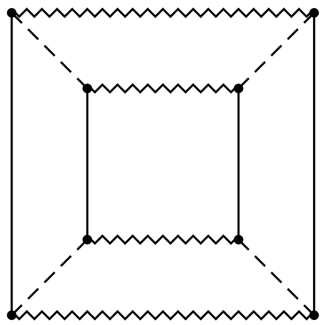
В этом примере не было необходимости анализировать, как соединять между собой седловые точки, они соединились из тех соображений, что граф Риба — связный (для функции на связной поверхности) и имеет вершины степени не большей за три. В общем случае это нужно делать.

Для графов Риба, которые приведены на рисунках 21(a) и 21(b), кодирующие списки имеют вид $[[[2], -1], [[], 1]]$ и $[[[2], 1], [[], -1]]$, соответственно. Тут коды задаются однозначно, но вообще номера сёдел, которые не соединены ориентированным путём на графе Риба, можно упорядочить произвольным образом.

Пример 2. Проиллюстрируем замечание 4 на примере. Рассмотрим поток Морса на сфере с двумя источниками, сёдлами и стоками, который траекторно неэквивалентный потоку из примера 1. Его траектории и трёхцветный



(a) Поток Морса на сфере



(b) Трёхцветный граф

Рис. 22. Симметричный поток Морса и его трёхцветный граф

граф изображены на рис. 22. Поскольку поток симметричен, обе нумерации сёдел соответствуют одной функции Морса. Так как каждый источник и сток соединяется сепаратрисой с обеими сёдлами, то получается граф Риба изображённый на рис. 21(a). Функция Морса, которую он задаёт, соответствует сразу трём потокам Морса с нумерацией сёдел. Одной нумерации потока из примера 1 и двум нумерациям из настоящего примера.

Пример 3. Найдём вручную все 3-графы, соответствующие потокам Морса с одним седлом. Имеем один su-квадратик и три способа как провести t-рёбра. 3-графы изображены на рисунке 23. Поскольку тут только одно седло, то нумерации не нужны. Третий поток (рис. 23(c))

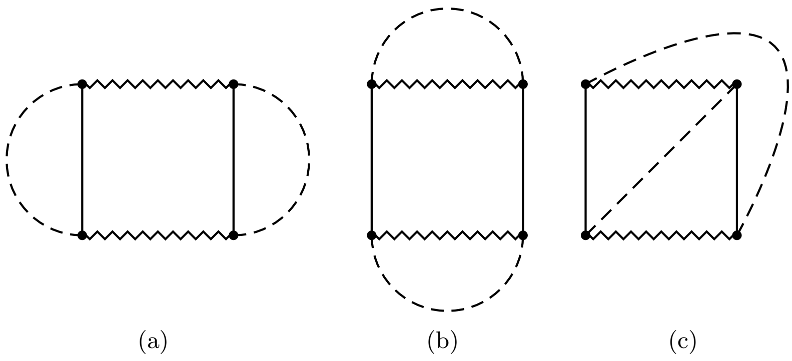


Рис. 23. 3-графы потоков Морса с одним седлом

имеет цикл длины три, следовательно, задан на неориентированной поверхности ($\mathbf{RP}^2$) и нас не интересует. Первый и второй потоки заданы на сфере и имеют два источника и один сток и один источник и два стока, соответственно. Критические точки на графах Риба соединяются автоматически, поскольку тут только одно седло. Графы Риба изображены на рисунке 24.

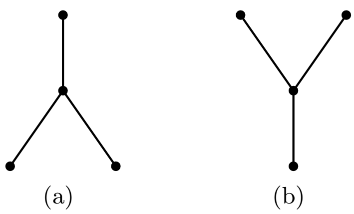


Рис. 24. Графы Риба функций Морса с одним седлом

5. Выводы

В работе получены следующие результаты.

Доказано, что потоку Морса на ориентированной поверхности с нумерацией седловых точек соответствует ровно одна функция Морса, поток градиента которой в некоторой метрике траекторно эквивалентный начальному, а значения в седловых точках упорядочены согласно нумерации.

Сформулированы алгоритмы построения такой функции как с использованием разложения многообразия на ручки с воротниками, так и с использованием трёхцветных графов. В последнем случае также написана программа.

Сформулирован алгоритм и написана программа перебора 3-графов с нумерацией.

Сформулирован алгоритм и написана программа сравнения двух графов Риба.

Используя вышеперечисленные алгоритмы и программы, были найдены (на ЭВМ) все неэквивалентные 3-графы с нумерацией без нечётных циклов (а значит потоки Морса с нумерацией на ориентируемых поверхностях) для небольшого количества седловых точек (от 1 до 5). По каждому из них был построен граф Риба (а значит функция Морса). Из найденных графов Риба были выбраны неизоморфные (то есть послойно неэквивалентные функции Морса) для каждого значения числа седловых точек. В таблицах 1 и 2 приведено количество потоков и функций в зависимости от рода поверхности, на которой они заданы (сфера, тор и крендель) при фиксированном количестве седловых точек.

Из таблиц видно, что количество потоков Морса с нумерацией, вообще говоря, больше за количество функций Морса. То есть, некоторым потокам Морса с нумерацией соответствуют эквивалентные функции Морса.

$g \setminus n$	1	2	3	4	5
0	2	5	40	976	36256
1	0	1	14	781	47108
2	0	0	0	41	8692
Всего	2	6	54	1798	92056

Таблица 1. Количество потоков Морса с n занумерованными сёдлами на поверхностях рода g

$g \setminus n$	1	2	3	4	5
0	2	4	14	69	415
1	0	1	7	49	420
2	0	0	0	4	75
Всего	2	5	21	122	910

Таблица 2. Количество функций Морса с n сёдлами на поверхностях рода g

Результаты подсчётов согласуются с известным количеством неэквивалентных потоков и функций Морса с одним и двумя сёдлами.

Список литературы

[1] *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces. // International Conference at Chelyabinsk State Univ. 1996. P .19–23.

[2] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях. // Український математичний журнал. 2003. Т. 55. № 5. С. 687–700.

[3] *Kulinich E. V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces. // Methods of Functional Analysis and Topology. 1998. V. 4. № 1. P. 59–64.

[4] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1, 2. Ижевск, Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999.

[5] *Peixoto M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds. // Dynamical systems. New York, Academic Press. 1973. P. 389–419.

[6] *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях. // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 8. С. 93–140.

[7] *Smale S.* On gradient dynamical systems. // Annals of Mathematics. 1961. V. 74. P. 199–206.

[8] *Пришляк О. О.* Теорія Морса. Київ, 2002.

[9] *Коннер П., Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. Москва, Мир, 1969.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 235-268

Volodymyr Lyubashenko

Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: `lub@imath.kiev.ua`

Oleksandr Manzyuk

Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: `manzyuk@mathematik.uni-kl.de`

Unital A_∞-categories

Ми доводимо, що три означення унітальності для A_∞-категорій запропоновані Любашенком, Концевичем і Сойбельманом, та Фукая є еквівалентними.

We prove that three definitions of unitality for A_∞-categories suggested by Lyubashenko, by Kontsevich and Soibelman, and by Fukaya are equivalent.

Keywords: *A_∞-category, unital A_∞-category, weak unit*

1. Introduction

Over the past decade, A_∞-categories have experienced a resurgence of interest due to applications in symplectic geometry, deformation theory, non-commutative geometry, homological algebra, and physics.

The notion of A_∞-category is a generalization of Stasheff's notion of A_∞-algebra [11]. On the other hand, A_∞-categories generalize differential graded categories. In contrast to differential graded categories, composition in A_∞-categories is associative only up to homotopy that satisfies certain equation up to another homotopy, and so on. The notion of A_∞-category appeared in the work of Fukaya on Floer homology [1] and was related to mirror symmetry by Kontsevich [5]. Basic concepts of the theory of A_∞-categories have been developed by Fukaya [2], Keller [4], Lefèvre-Hasegawa [7], Lyubashenko [8], Soibelman [10].

The definition of A_∞-category does not assume the existence of identity morphisms. The use of A_∞-categories without identities requires caution: for example, there is no a sensible notion of isomorphic objects, the notion of equivalence does not make sense, etc. In order to develop a comprehensive theory of A_∞-categories, a notion of unital A_∞-category, i.e., A_∞-category with identity morphisms (also called units), is necessary. The obvious notion of strictly unital A_∞-category, despite its technical advantages, is not quite satisfactory: it is not homotopy invariant, meaning that it does not translate along homotopy equivalences. Different definitions of (weakly) unital A_∞-category have been suggested by Lyubashenko [8, Definition 7.3], by Kontsevich and Soibelman [6, Definition 4.2.3], and by Fukaya [2, Definition 5.11]. We prove that these definitions are equivalent. The main ingredient of the proofs is the Yoneda Lemma for unital (in the sense of Lyubashenko) A_∞-categories proven in [9, Appendix A].

2. Preliminaries

We follow the notation and conventions of [8], sometimes without explicit mentioning. Some of the conventions are recalled here.

Throughout, $\Bbbk$ is a commutative ground ring. A graded $\Bbbk$-module always means a $\mathbb{Z}$-graded $\Bbbk$-module.

A *graded quiver* $\mathcal{A}$ consists of a set $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ of objects and a graded $\Bbbk$-module $\mathcal{A}(X,Y)$, for each $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. A *morphism of graded quivers* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ of degree n consists of a function $\mathrm{Ob}f : \mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$, $X \mapsto Xf$, and a $\Bbbk$-linear map $f = f_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(Xf,Yf)$ of degree n, for each $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$.

For a set S, there is a category $\mathscr{Q}/S$ defined as follows. Its objects are graded quivers whose set of objects is S. A morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $\mathscr{Q}/S$ is a morphism of graded quivers of degree 0 such that $\mathrm{Ob}f = \mathrm{id}_S$. The category $\mathscr{Q}/S$ is monoidal. The tensor product of graded quivers $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ is a graded quiver $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ such that

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(X,Z) = \bigoplus_{Y \in S} \mathcal{A}(X,Y) \otimes \mathcal{B}(Y,Z), \quad X, Z \in S.$$

The unit object is the *discrete quiver* $\Bbbk S$ with $\mathrm{Ob}\Bbbk S = S$ and

$$(\Bbbk S)(X,Y) = \begin{cases} \Bbbk & \text{if } X = Y, \\ 0 & \text{if } X \neq Y, \end{cases} \quad X, Y \in S.$$

Note that a map of sets $f : S \to R$ gives rise to a morphism of graded quivers $\Bbbk f : \Bbbk S \to \Bbbk R$ with $\mathrm{Ob}\Bbbk f = f$ and $(\Bbbk f)_{X,Y} = \mathrm{id}_\Bbbk$ is $X = Y$ and $(\Bbbk f)_{X,Y} = 0$ if $X \neq Y$, $X, Y \in S$.

An *augmented graded cocategory* is a graded quiver $\mathcal{C}$ equipped with the structure of on augmented counital coassociative coalgebra in the monoidal category $\mathscr{Q}/\mathrm{Ob}\mathcal{C}$. Thus, $\mathcal{C}$ comes with a comultiplication $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$, a counit $\varepsilon : \mathcal{C} \to \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{C}$, and an augmentation $\eta : \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, which are morphisms in $\mathscr{Q}/\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ satisfying the usual axioms. A *morphism of augmented graded cocategories* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is a morphism of graded quivers of degree 0 that preserves the comultiplication, counit, and augmentation.

The main example of an augmented graded cocategory is the following. Let $\mathcal{A}$ be a graded quiver. Denote by $T\mathcal{A}$ the direct sum of graded quivers $T^n\mathcal{A}$, where $T^n\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\otimes n}$ is the n-fold tensor product of $\mathcal{A}$ in $\mathscr{Q}/\mathrm{Ob}\mathcal{A}$; in particular,

$T^0\mathcal{A} = \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, $T^1\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $T^2\mathcal{A} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, etc. The graded quiver $T\mathcal{A}$ is an augmented graded cocategory in which the comultiplication is the so called 'cut' comultiplication $\Delta_0 : T\mathcal{A} \to T\mathcal{A}\otimes T\mathcal{A}$ given by

$$f_1\otimes\dots\otimes f_n \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_1\otimes\dots\otimes f_k \bigotimes f_{k+1}\otimes\dots\otimes f_n,$$

the counit is given by the projection $\mathrm{pr}_0 : T\mathcal{A} \to T^0\mathcal{A} = \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, and the augmentation is given by the inclusion $\mathrm{in}_0 : \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A} = T^0\mathcal{A} \hookrightarrow T\mathcal{A}$.

The graded quiver $T\mathcal{A}$ admits also the structure of a graded category, i.e., the structure of a unital associative algebra in the monoidal category $\mathscr{Q}/\mathrm{Ob}\mathcal{A}$. The multiplication $\mu : T\mathcal{A}\otimes T\mathcal{A} \to T\mathcal{A}$ removes brackets in tensors of the form $(f_1\otimes\dots\otimes f_m)\bigotimes(g_1\otimes\dots\otimes g_n)$. The unit $\eta : \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A} \to T\mathcal{A}$ is given by the inclusion $\mathrm{in}_0 : \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A} = T^0\mathcal{A} \hookrightarrow T\mathcal{A}$.

For a graded quiver $\mathcal{A}$, denote by $s\mathcal{A}$ its *suspension*, the graded quiver given by $\mathrm{Ob}s\mathcal{A} = \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ and $(s\mathcal{A}(X,Y))^n = \mathcal{A}(X,Y)^{n+1}$, for each $n\in\mathbb{Z}$ and $X,Y\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$. An A_∞*-category* is a graded quiver $\mathcal{A}$ equipped with a differential $b : Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{A}$ of degree 1 such that $(Ts\mathcal{A},\Delta_0,\mathrm{pr}_0,\mathrm{in}_0,b)$ is an *augmented differential graded cocategory*. In other terms, the equations

$$b^2 = 0, \quad b\Delta_0 = \Delta_0(b\otimes 1 + 1\otimes b), \quad b\mathrm{pr}_0 = 0, \quad \mathrm{in}_0 b = 0$$

hold true. Denote by

$$b_{mn} \overset{\text{def}}{=} \bigl[T^m s\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{in}_m} Ts\mathcal{A} \xrightarrow{b} Ts\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{pr}_n} T^n s\mathcal{A}\bigr]$$

matrix coefficients of b, for $m,n \geqslant 0$. Matrix coefficients b_{m1} are called *components* of b and abbreviated by b_m. The above equations imply that $b_0 = 0$ and that b is unambiguously determined by its components via the formula

$$b_{mn} = \sum_{\substack{p+k+q=m \\ p+1+q=n}} 1^{\otimes p} \otimes b_k \otimes 1^{\otimes q} : T^m s\mathcal{A} \to T^n s\mathcal{A}, \quad m, n \geqslant 0.$$

The equation $b^2 = 0$ is equivalent to the system of equations

$$\sum_{p+k+q=m} (1^{\otimes p} \otimes b_k \otimes 1^{\otimes q}) b_{p+1+q} = 0 : T^m s\mathcal{A} \to s\mathcal{A}, \quad m \geqslant 1.$$

For A_∞-categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, an *A_∞-functor* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ is a morphism of augmented differential graded cocategories $f : Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{B}$. In other terms, f is a morphism of augmented graded cocategories and preserves the differential, meaning that $fb = bf$. Denote by

$$f_{mn} \overset{\text{def}}{=} \left[T^m s\mathcal{A} \xrightarrow{\text{in}_m} Ts\mathcal{A} \xrightarrow{f} Ts\mathcal{B} \xrightarrow{\text{pr}_n} T^n s\mathcal{B} \right]$$

matrix coefficients of f, for $m, n \geqslant 0$. Matrix coefficients f_{m1} are called *components* of f and abbreviated by f_m. The condition that f is a morphism of augmented graded cocategories implies that $f_0 = 0$ and that f is unambiguously determined by its components via the formula

$$f_{mn} = \sum_{i_1+\dots+i_n=m} f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_n} : T^m s\mathcal{A} \to T^n s\mathcal{B}, \quad m, n \geqslant 0.$$

The equation $fb = bf$ is equivalent to the system of equations

$$\sum_{i_1+\dots+i_n=m} (f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_n}) b_n = \sum_{p+k+q=m} (1^{\otimes p} \otimes b_k \otimes 1^{\otimes q}) f_{p+1+q} : T^m s\mathcal{A} \to s\mathcal{B},$$

for $m \geqslant 1$. An A_∞-functor f is called *strict* if $f_n = 0$ for $n > 1$.

3. Definitions

3.1. **Definition** (cf. [2,4])**.** An A_∞-category $\mathcal{A}$ is *strictly unital* if, for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, there is a $\Bbbk$-linear map ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} : \Bbbk \to (s\mathcal{A})^{-1}(X,X)$, called a *strict unit*, such that the following conditions are satisfied: ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} b_1 = 0$, the chain maps $(1 \otimes {}_Y\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}})b_2, -({}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} \otimes 1)b_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y)$ are equal to the identity map, for each $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, and $(\cdots \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} \otimes \cdots)b_n = 0$ if $n \geqslant 3$.

For example, differential graded categories are strictly unital.

3.2. **Definition** (Lyubashenko [8, Definition 7.3])**.** An A_∞-category $\mathcal{A}$ is *unital* if, for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, there is a $\Bbbk$-linear map ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} : \Bbbk \to (s\mathcal{A})^{-1}(X,X)$, called a *unit*, such that the following conditions hold: ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} b_1 = 0$ and the chain maps $(1 \otimes {}_Y\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}})b_2, -({}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} \otimes 1)b_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y)$ are homotopic to the identity map, for each $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. An arbitrary homotopy between $(1 \otimes {}_Y\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}})b_2$ and the identity map is called a *right unit homotopy*. Similarly, an arbitrary homotopy between $-({}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} \otimes 1)b_2$ and the identity map is called a *left unit homotopy*. An A_∞-functor $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between unital A_∞-categories is *unital* if the cycles ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} f_1$ and ${}_{Xf}\mathbf{i}_0^{\mathcal{B}}$ are cohomologous, i.e., differ by a boundary, for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Clearly, a strictly unital A_∞-category is unital.

With an arbitrary A_∞-category $\mathcal{A}$ a strictly unital A_∞-category $\mathcal{A}^{\mathsf{su}}$ with the same set of objects is associated. For each $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, the graded $\Bbbk$-module $s\mathcal{A}^{\mathsf{su}}(X,Y)$ is given by

$$s\mathcal{A}^{\mathsf{su}}(X,Y) = \begin{cases} s\mathcal{A}(X,Y) & \text{if } X \neq Y, \\ s\mathcal{A}(X,X) \oplus \Bbbk\, {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}^{\mathsf{su}}} & \text{if } X = Y, \end{cases}$$

where ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}^{\mathsf{su}}}$ is a new generator of degree -1. The element ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}^{\mathsf{su}}}$ is a strict unit by definition, and the natural embedding $e : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathsf{su}}$ is a strict A_∞-functor.

3.3. **Definition** (Kontsevich–Soibelman [6, Definition 4.2.3])**.** A *weak unit* of an A_∞-category $\mathcal{A}$ is an A_∞-functor $U : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{A}$ such that

$$\big[\mathcal{A} \overset{e}{\hookrightarrow} \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \xrightarrow{U} \mathcal{A}\big] = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

3.4. **Proposition.** *Suppose that an A_∞-category $\mathcal{A}$ admits a weak unit. Then the A_∞-category $\mathcal{A}$ is unital.*

Proof. Let $U : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{A}$ be a weak unit of $\mathcal{A}$. For each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, denote by ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}}$ the element ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}^{\mathsf{su}}}U_1 \in s\mathcal{A}(X,X)$ of degree -1. It follows from the equation $U_1b_1 = b_1U_1$ that ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}}b_1 = 0$. Let us prove that ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}}$ are unit elements of $\mathcal{A}$.

For each $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, there is a $\Bbbk$-linear map

$$h = (1 \otimes {}_Y\mathbf{i}_0)U_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y)$$

of degree -1. The equation

$$(1 \otimes b_1 + b_1 \otimes 1)U_2 + b_2U_1 = U_2b_1 + (U_1 \otimes U_1)b_2 \tag{3.1}$$

implies that

$$-b_1h + 1 = hb_1 + (1 \otimes {}_Y\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}})b_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y),$$

thus h is a right unit homotopy for $\mathcal{A}$. For each $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, there is a $\Bbbk$-linear map

$$h' = -({}_X\mathbf{i}_0 \otimes 1)U_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y)$$

of degree -1. Equation (3.1) implies that

$$b_1h' - 1 = -h'b_1 + ({}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}} \otimes 1)b_2 : s\mathcal{A}(X,Y) \to s\mathcal{A}(X,Y),$$

thus h' is a left unit homotopy for $\mathcal{A}$. Therefore, $\mathcal{A}$ is unital. $\square$

3.5. **Definition** (Fukaya [2, Definition 5.11]). An A_∞-category $\mathcal{C}$ is called *homotopy unital* if the graded quiver

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \oplus \Bbbk\mathcal{C} \oplus s\Bbbk\mathcal{C}$$

(with $\operatorname{Ob}\mathcal{C}^+ = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$) admits an A_∞-structure b^+ of the following kind. Denote the generators of the second and the third direct summands of the graded quiver $s\mathcal{C}^+ = s\mathcal{C} \oplus s\Bbbk\mathcal{C} \oplus s^2\Bbbk\mathcal{C}$ by ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} = 1s$ and $\mathbf{j}_X^{\mathcal{C}} = 1s^2$ of degree respectively -1 and -2, for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. The conditions on b^+ are:

(1) for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, the element ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \overset{\text{def}}{=} {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} - \mathbf{j}_X^{\mathcal{C}} b_1^+$ is contained in $s\mathcal{C}(X,X)$;
(2) $\mathcal{C}^+$ is a strictly unital A_∞-category with strict units ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}$, $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$;
(3) the embedding $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^+$ is a strict A_∞-functor;
(4) $(s\mathcal{C} \oplus s^2\Bbbk\mathcal{C})^{\otimes n} b_n^+ \subset s\mathcal{C}$, for each $n > 1$.

In particular, $\mathcal{C}^+$ contains the strictly unital A_∞-category $\mathcal{C}^{\mathsf{su}} = \mathcal{C} \oplus \Bbbk\mathcal{C}$. A version of this definition suitable for filtered A_∞-algebras (and filtered A_∞-categories) is given by Fukaya, Oh, Ohta and Ono in their book [3, Definition 8.2].

Let $\mathcal{D}$ be a strictly unital A_∞-category with strict units $\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}}$. Then it has a canonical homotopy unital structure $(\mathcal{D}^+, b^+)$. Namely, $\mathbf{j}_X^{\mathcal{D}} b_1^+ = {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}^{\mathsf{su}}} - {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}}$, and b_n^+ vanishes for each $n > 1$ on each summand of $(s\mathcal{D} \oplus s^2\Bbbk\mathcal{D})^{\otimes n}$ except on $s\mathcal{D}^{\otimes n}$, where it coincides with $b_n^{\mathcal{D}}$. Verification of the equation $(b^+)^2 = 0$ is a straightforward computation.

3.6. **Proposition.** *An arbitrary homotopy unital A_∞-category is unital.*

Proof. Let $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^+$ be a homotopy unital category. We claim that the distinguished cycles ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}(X,X)[1]^{-1}$, $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, turn $\mathcal{C}$ into a unital A_∞-category. Indeed, the identity

$$(1 \otimes b_1^+ + b_1^+ \otimes 1)b_2^+ + b_2^+ b_1^+ = 0$$

applied to $s\mathcal{C} \otimes \mathbf{j}^\mathcal{C}$ or to $\mathbf{j}^\mathcal{C} \otimes s\mathcal{C}$ implies

$$(1 \otimes \mathbf{i}_0^\mathcal{C})b_2^\mathcal{C} = 1 + (1 \otimes \mathbf{j}^\mathcal{C})b_2^+ b_1^\mathcal{C} + b_1^\mathcal{C}(1 \otimes \mathbf{j}^\mathcal{C})b_2^+ \quad : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C},$$
$$(\mathbf{i}_0^\mathcal{C} \otimes 1)b_2^\mathcal{C} = -1 + (\mathbf{j}^\mathcal{C} \otimes 1)b_2^+ b_1^\mathcal{C} + b_1^\mathcal{C}(\mathbf{j}^\mathcal{C} \otimes 1)b_2^+ : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}.$$

Thus, $(1 \otimes \mathbf{j}^\mathcal{C})b_2^+ : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}$ and $(\mathbf{j}^\mathcal{C} \otimes 1)b_2^+ : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}$ are unit homotopies. Therefore, the A_∞-category $\mathcal{C}$ is unital. □

The converse of Proposition 3.6 holds true as well.

3.7. **Theorem.** *An arbitrary unital A_∞-category $\mathcal{C}$ with unit elements $\mathbf{i}_0^\mathcal{C}$ admits a homotopy unital structure $(\mathcal{C}^+, b^+)$ with $\mathbf{j}^\mathcal{C} b_1^+ = \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} - \mathbf{i}_0^\mathcal{C}$.*

Proof. By [9, Corollary A.12], there exists a differential graded category $\mathcal{D}$ and an A_∞-equivalence $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. By [9, Remark A.13], we may choose $\mathcal{D}$ and ϕ such that $\mathrm{Ob}\mathcal{D} = \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ and $\mathrm{Ob}\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}\mathcal{C}}$. Being strictly unital $\mathcal{D}$ admits a canonical homotopy unital structure $(\mathcal{D}^+, b^+)$. In the sequel, we may assume that $\mathcal{D}$ is a strictly unital A_∞-category equivalent to $\mathcal{C}$ via ϕ with the mentioned properties. Let us construct simultaneously an A_∞-structure b^+ on $\mathcal{C}^+$ and an A_∞-functor $\phi^+ : \mathcal{C}^+ \to \mathcal{D}^+$ that will turn out to be an equivalence.

Let us extend the homotopy isomorphism $\phi_1 : s\mathcal{C} \to s\mathcal{D}$ to a chain quiver map $\phi_1^+ : s\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{D}^+$. The A_∞-equivalence $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is a unital A_∞-functor, i.e., for each $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, there exists $v_X \in \mathcal{D}(X,X)[1]^{-2}$ such that ${}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{D} - {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{C}\phi_1 = v_X b_1$. In order that ϕ^+ be strictly unital, we define ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}\phi_1^+ = {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}^{\mathsf{su}}}$. We should have

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_X^\mathcal{C}\phi_1^+ b_1^+ = \mathbf{j}_X^\mathcal{C} b_1^+ \phi_1^+ &= {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}\phi_1^+ - {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{C}\phi_1 \\ &= {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}^{\mathsf{su}}} - {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{D} + {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{D} - {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{C}\phi_1 = (\mathbf{j}_X^\mathcal{C} + v_X)b_1^+,\end{aligned}$$

so we define $\mathbf{j}_X^\mathcal{C}\phi_1^+ = \mathbf{j}_X^\mathcal{D} + v_X$.

We claim that there is a homotopy unital structure $(\mathcal{C}^+, b^+)$ of $\mathcal{C}$ satisfying the four conditions of Definition 3.5 and an A_∞-functor $\phi^+ : \mathcal{C}^+ \to \mathcal{D}^+$ satisfying four parallel conditions:

(1) the first component of ϕ^+ is the quiver morphism ϕ_1^+ constructed above;
(2) the A_∞-functor ϕ^+ is strictly unital;
(3) the restriction of ϕ^+ to $\mathcal{C}$ gives ϕ;
(4) $(s\mathcal{C} \oplus s^2\Bbbk\mathcal{C})^{\otimes n}\phi_n^+ \subset s\mathcal{D}$, for each $n > 1$.

Notice that in the presence of conditions (2) and (3) the first condition reduces to $\mathbf{j}_X^{\mathcal{C}}(\phi^+)_1 = \mathbf{j}_X^{\mathcal{D}} + v_X$, for each $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Components of the (1,1)-coderivation $b^+ : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{C}^+$ of degree 1 and of the augmented graded cocategory morphism $\phi^+ : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{D}^+$ are constructed by induction. We already know components b_1^+ and ϕ_1^+. Given an integer $n \geqslant 2$, assume that we have already found components b_m^+, ϕ_m^+ of the sought b^+ and ϕ^+ for $m < n$ such that the equations

$$(3.2)\quad ((b^+)^2)_m = 0 \qquad : T^m s\mathcal{C}^+(X,Y) \to s\mathcal{C}^+(X,Y),$$

$$(3.3)\quad (\phi^+ b^+)_m = (b^+\phi^+)_m : T^m s\mathcal{C}^+(X,Y) \to s\mathcal{D}^+(Xf,Yf)$$

are satisfied for all $m < n$. Define b_n^+, ϕ_n^+ on direct summands of $T^n s\mathcal{C}^+$ which contain a factor $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}$ by the requirement of strict unitality of $\mathcal{C}^+$ and ϕ^+. Then equations (3.2), (3.3) hold true for $m = n$ on such summands. Define b_n^+, ϕ_n^+ on the direct summand $T^n s\mathcal{C} \subset T^n s\mathcal{C}^+$ as $b_n^{\mathcal{C}}$ and ϕ_n. Then equations (3.2), (3.3) hold true for $m = n$ on the summand $T^n s\mathcal{C}$. It remains to construct those components of b^+ and ϕ^+ which have $\mathbf{j}^{\mathcal{C}}$ as one of their arguments.

Extend $b_1 : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}$ to $b_1' : s\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{C}^+$ by $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} b_1' = 0$ and $\mathbf{j}^{\mathcal{C}} b_1' = 0$. Define $b_1^- = b_1^+ - b_1' : s\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{C}^+$. Thus, $b_1^-\big|_{s\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} = 0$, $\mathbf{j}^{\mathcal{C}} b_1^- = \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}} - \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}$ and $b_1^+ = b_1' + b_1^-$. Introduce for $0 \leqslant k \leqslant n$

the graded subquiver $\mathcal{N}_k \subset T^n(s\mathcal{C} \oplus s^2\Bbbk\mathcal{C})$ by

$$\mathcal{N}_k = \bigoplus_{p_0+p_1+\dots+p_k+k=n} T^{p_0}s\mathcal{C} \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes T^{p_1}s\mathcal{C} \otimes \dots \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes T^{p_k}s\mathcal{C}$$

stable under the differential $d^{\mathcal{N}_k} = \sum_{p+1+q=n} 1^{\otimes p} \otimes b'_1 \otimes 1^{\otimes q}$, and the graded subquiver $\mathcal{P}_l \subset T^n s\mathcal{C}^+$ by

$$\mathcal{P}_l = \bigoplus_{p_0+p_1+\dots+p_l+l=n} T^{p_0}s\mathcal{C}^{\mathsf{su}} \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes T^{p_1}s\mathcal{C}^{\mathsf{su}} \otimes \dots \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes T^{p_l}s\mathcal{C}^{\mathsf{su}}.$$

There is also the subquiver

$$\mathcal{Q}_k = \bigoplus_{l=0}^{k} \mathcal{P}_l \subset T^n s\mathcal{C}^+$$

and its complement

$$\mathcal{Q}_k^\perp = \bigoplus_{l=k+1}^{n} \mathcal{P}_l \subset T^n s\mathcal{C}^+.$$

Notice that the subquiver $\mathcal{Q}_k$ is stable under the differential $d^{\mathcal{Q}_k} = \sum_{p+1+q=n} 1^{\otimes p} \otimes b_1^+ \otimes 1^{\otimes q}$, and $\mathcal{Q}_k^\perp$ is stable under the differential $d^{\mathcal{Q}_k^\perp} = \sum_{p+1+q=n} 1^{\otimes p} \otimes b'_1 \otimes 1^{\otimes q}$. Furthermore, the image of $1^{\otimes a} \otimes b_1^- \otimes 1^{\otimes c} : \mathcal{N}_k \to T^n s\mathcal{C}^+$ is contained in $\mathcal{Q}_{k-1}$ for all $a, c \geqslant 0$ such that $a + 1 + c = n$.

Firstly, the components b_n^+, ϕ_n^+ are defined on the graded subquivers $\mathcal{N}_0 = T^n s\mathcal{C}$ and $\mathcal{Q}_0 = T^n s\mathcal{C}^{\mathsf{su}}$. Assume for an integer $0 < k \leqslant n$ that restrictions of b_n^+, ϕ_n^+ to $\mathcal{N}_l$ are already found for all $l < k$. In other terms, we are given $b_n^+ : \mathcal{Q}_{k-1} \to s\mathcal{C}^+$, $\phi_n^+ : \mathcal{Q}_{k-1} \to s\mathcal{D}$ such that equations (3.2), (3.3) hold on $\mathcal{Q}_{k-1}$. Let us construct the restrictions $b_n^+ : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{C}$, $\phi_n^+ : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{D}$, performing the induction step.

Introduce a (1,1)-coderivation $\tilde{b} : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{C}^+$ of degree 1 by its components $(0, b_1^+, \dots, b_{n-1}^+, \mathrm{pr}_{\mathcal{Q}_{k-1}} \cdot b_n^+|_{\mathcal{Q}_{k-1}}, 0, \dots)$. Introduce also a morphism of augmented graded cocategories

$\tilde{\phi} : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{D}^+$ with $\operatorname{Ob}\tilde{\phi} = \operatorname{Ob}\phi$ by its components $(\phi_1^+, \dots, \phi_{n-1}^+, \operatorname{pr}_{\mathcal{Q}_{k-1}} \cdot \phi_n^+|_{\mathcal{Q}_{k-1}}, 0, \dots)$. Here $\operatorname{pr}_{\mathcal{Q}_{k-1}} : T^n s\mathcal{C}^+ \to \mathcal{Q}_{k-1}$ is the natural projection, vanishing on $\mathcal{Q}_{k-1}^\perp$. Then $\lambda \overset{\text{def}}{=} \tilde{b}^2 : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{C}^+$ is a (1,1)-coderivation of degree 2 and $\nu \overset{\text{def}}{=} -\tilde{\phi}b^+ + \tilde{b}\tilde{\phi} : Ts\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{D}^+$ is a $(\tilde{\phi}, \tilde{\phi})$-coderivation of degree 1. Equations (3.2), (3.3) imply that $\lambda_m = 0$, $\nu_m = 0$ for $m < n$. Moreover, λ_n, ν_n vanish on $\mathcal{Q}_{k-1}$. On the complement the n-th components equal

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \sum_{a+r+c=n}^{1<r<n} (1^{\otimes a} \otimes b_r^+ \otimes 1^{\otimes c}) b_{a+1+c}^+ \\
&\quad + \sum_{a+1+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_1^- \otimes 1^{\otimes c}) \tilde{b}_n : \mathcal{Q}_{k-1}^\perp \to s\mathcal{C}^+, \\
\nu_n &= - \sum_{i_1+\dots+i_r=n}^{1<r\leqslant n} (\phi_{i_1}^+ \otimes \dots \otimes \phi_{i_r}^+) b_r^+ \\
&\quad + \sum_{a+r+c=n}^{1<r<n} (1^{\otimes a} \otimes b_r^+ \otimes 1^{\otimes c}) \phi_{a+1+c}^+ \\
&\quad + \sum_{a+1+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_1^- \otimes 1^{\otimes c}) \tilde{\phi}_n : \mathcal{Q}_{k-1}^\perp \to s\mathcal{D}.
\end{aligned}
$$

The restriction $\lambda_n|_{\mathcal{N}_k}$ takes values in $s\mathcal{C}$. Indeed, for the first sum in the expression for λ_n this follows by the induction assumption since $r > 1$ and $a+1+c > 1$. For the second sum this follows by the induction assumption and strict unitality if $n > 2$. In the case of $n = 2$, $k = 1$ this is also straightforward. The only case which requires computation is $n = 2$, $k = 2$:

$$
(\mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}})(1 \otimes b_1^- + b_1^- \otimes 1)\tilde{b}_2 = \mathbf{j}^{\mathcal{C}} - (\mathbf{j}^{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}) b_2^+ - \mathbf{j}^{\mathcal{C}} - (\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{j}^{\mathcal{C}}) b_2^+,
$$

which belongs to $s\mathcal{C}$ by the induction assumption.

Equations (3.2), (3.3) for $m = n$ take the form

$$-b_n^+ b_1 - \sum_{a+1+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_1' \otimes 1^{\otimes c}) b_n^+ = \lambda_n : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{C}, \tag{3.4}$$

$$\phi_n^+ b_1 - \sum_{a+1+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_1' \otimes 1^{\otimes c}) \phi_n^+ - b_n^+ \phi_1 = \nu_n : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{D}. \tag{3.5}$$

For arbitrary objects X, Y of $\mathcal{C}$, equip the graded $\Bbbk$-module $\mathcal{N}_k(X,Y)$ with the differential $d^{\mathcal{N}_k} = \sum_{p+1+q=n} 1^{\otimes p} \otimes b_1' \otimes 1^{\otimes q}$ and denote by u the chain map

$$\underline{\mathsf{C}}_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{C}(X,Y)) \to \underline{\mathsf{C}}_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{D}(X\phi, Y\phi)),$$
$$\lambda \mapsto \lambda\phi_1.$$

Since ϕ_1 is homotopy invertible, the map u is homotopy invertible as well. Therefore, the complex $\operatorname{Cone}(u)$ is contractible, e.g. by [8, Lemma B.1], in particular, acyclic. Equations (3.4) and (3.5) have the form $-b_n^+ d = \lambda_n$, $\phi_n^+ d + b_n^+ u = \nu_n$, that is, the element (λ_n, ν_n) of

$$\underline{\mathsf{C}}^2_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{C}(X,Y)) \oplus \underline{\mathsf{C}}^1_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{D}(X\phi, Y\phi)) = \operatorname{Cone}^1(u)$$

has to be the boundary of the sought element (b_n^+, ϕ_n^+) of

$$\underline{\mathsf{C}}^1_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{C}(X,Y)) \oplus \underline{\mathsf{C}}^0_\Bbbk(\mathcal{N}_k(X,Y), s\mathcal{D}(X\phi, Y\phi)) = \operatorname{Cone}^0(u).$$

These equations are solvable because (λ_n, ν_n) is a cycle in $\operatorname{Cone}^1(u)$. Indeed, the equations to verify $-\lambda_n d = 0$, $\nu_n d +$

$\lambda_n u = 0$ take the form

$$-\lambda_n b_1 + \sum_{p+1+q=n} (1^{\otimes p} \otimes b'_1 \otimes 1^{\otimes q})\lambda_n = 0 : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{C},$$

$$\nu_n b_1 + \sum_{p+1+q=n} (1^{\otimes p} \otimes b'_1 \otimes 1^{\otimes q})\nu_n - \lambda_n \phi_1 = 0 : \mathcal{N}_k \to s\mathcal{D}.$$

Composing the identity $-\lambda\tilde{b} + \tilde{b}\lambda = 0 : T^n s\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{C}^+$ with the projection $\mathrm{pr}_1 : Ts\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{C}^+$ yields the first equation. The second equation follows by composing the identity $\nu b^+ + \tilde{b}\nu - \lambda\tilde{\phi} = 0 : T^n s\mathcal{C}^+ \to Ts\mathcal{D}^+$ with $\mathrm{pr}_1 : Ts\mathcal{D}^+ \to s\mathcal{D}^+$.

Thus, the required restrictions of b^+_n, ϕ^+_n to $\mathcal{N}_k$ (and to $\mathcal{Q}_k$) exist and satisfy the required equations. We proceed by induction increasing k from 0 to n and determining b^+_n, ϕ^+_n on the whole $\mathcal{Q}_n = T^n s\mathcal{C}^+$. Then we replace n with $n+1$ and start again from $T^{n+1}s\mathcal{C}$. Thus the induction on n goes through. □

3.8. **Remark.** Let $(\mathcal{C}^+, b^+)$ be a homotopy unital structure of an A_∞-category $\mathcal{C}$. Then the embedding A_∞-functor $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^+$ is an equivalence. Indeed, it is bijective on objects. By [8, Theorem 8.8] it suffices to prove that $\iota_1 : s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}^+$ is homotopy invertible. And indeed, the chain quiver map $\pi_1 : s\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{C}$, $\pi_1|_{s\mathcal{C}} = \mathrm{id}$, ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}\pi_1 = {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}$, $\mathbf{j}^{\mathcal{C}}_X\pi_1 = 0$, is homotopy inverse to ι_1. Namely, the homotopy $h : s\mathcal{C}^+ \to s\mathcal{C}^+$, $h|_{s\mathcal{C}} = 0$, ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}^{\mathsf{su}}}h = \mathbf{j}^{\mathcal{C}}_X$, $\mathbf{j}^{\mathcal{C}}_X h = 0$, satisfies the equation $\mathrm{id}_{s\mathcal{C}^+} - \pi_1 \cdot \iota_1 = hb^+_1 + b^+_1 h$.

The equation between A_∞-functors

$$\bigl[\mathcal{C} \xrightarrow{\iota^{\mathcal{C}}} \mathcal{C}^+ \xrightarrow{\phi^+} \mathcal{D}^+\bigr] = \bigl[\mathcal{C} \xrightarrow{\phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\iota^{\mathcal{D}}} \mathcal{D}^+\bigr]$$

obtained in the proof of Theorem 3.7 implies that ϕ^+ is an A_∞-equivalence as well. In particular, ϕ^+_1 is homotopy invertible.

The converse of Proposition 3.4 holds true as well, however its proof requires more preliminaries. It is deferred until Section 5.

4. Double coderivations

4.1. **Definition.** For A_∞-functors $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, a *double (f,g)-coderivation* of degree d is a system of $\Bbbk$-linear maps

$$r : (Ts\mathcal{A} \otimes Ts\mathcal{A})(X,Y) \to Ts\mathcal{B}(Xf, Yg), \quad X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A},$$

of degree d such that the equation

$$r\Delta_0 = (\Delta_0 \otimes 1)(f \otimes r) + (1 \otimes \Delta_0)(r \otimes g) \tag{4.1}$$

holds true.

Equation (4.1) implies that r is determined by a system of $\Bbbk$-linear maps $r\mathrm{pr}_1 : Ts\mathcal{A} \otimes Ts\mathcal{A} \to s\mathcal{B}$ with components of degree d

$$r_{n,m} : s\mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes \cdots \otimes s\mathcal{A}(X_{n+m-1}, X_{n+m}) \\ \to s\mathcal{B}(X_0 f, X_{n+m} g),$$

for $n, m \geqslant 0$, via the formula

$$r_{n,m;k} = (r|_{T^n s\mathcal{A} \otimes T^m s\mathcal{A}})\mathrm{pr}_k : T^n s\mathcal{A} \otimes T^m s\mathcal{A} \to T^k s\mathcal{B},$$

(4.2)

$$r_{n,m;k} = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p+i=n, \\ j_1+\dots+j_q+j=m}}^{p+1+q=k} f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_p} \otimes r_{i,j} \otimes g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_q}.$$

This follows from the equation

$$r\Delta_0^{(l)} = \sum_{p+1+q=l} (\Delta_0^{(p+1)} \otimes \Delta_0^{(q+1)})(f^{\otimes p} \otimes r \otimes g^{\otimes q}) : \\ Ts\mathcal{A} \otimes Ts\mathcal{A} \to (Ts\mathcal{B})^{\otimes l}, \tag{4.3}$$

which holds true for each $l \geqslant 0$. Here $\Delta_0^{(0)} = \varepsilon$, $\Delta_0^{(1)} = \mathrm{id}$, $\Delta_0^{(2)} = \Delta_0$ and $\Delta_0^{(l)}$ means the cut comultiplication iterated $l-1$ times.

Double (f,g)-coderivations form a chain complex, which we are going to denote by $(\mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})(f,g), B_1)$. For each $d \in \mathbb{Z}$, the component $\mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})(f,g)^d$ consists of double (f,g)-coderivations of degree d. The differential B_1 of degree 1 is given by

$$rB_1 \overset{\text{def}}{=} rb - (-)^d(1\otimes b + b\otimes 1)r,$$

for each $r \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})(f,g)^d$. The component $[rB_1]_{n,m}$ of rB_1 is given by

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i_1+\dots+i_p+i=n,\\ j_1+\dots+j_q+j=m}} (f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_p}\otimes r_{ij}\otimes g_{j_1}\otimes\dots\otimes g_{j_q})b_{p+1+q} \\
&\qquad - (-)^r \sum_{a+k+c=n} (1^{\otimes a}\otimes b_k\otimes 1^{\otimes c+m})r_{a+1+c,m} \\
&\qquad\qquad - (-)^r \sum_{u+t+v=m} (1^{\otimes n+u}\otimes b_t\otimes 1^{\otimes v})r_{n,u+1+v},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

for each $n, m \geqslant 0$. An A_∞-functor $h : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ gives rise to a chain map

$$\mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})(f,g) \to \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{C})(fh,gh), \quad r \mapsto rh.$$

The component $[rh]_{n,m}$ of rh is given by

$$\sum_{\substack{i_1+\dots+i_p+i=n,\\ j_1+\dots+j_q+j=m}} (f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_p}\otimes r_{i,j}\otimes g_{j_1}\otimes\dots\otimes g_{j_q})h_{p+1+q}, \tag{4.5}$$

for each $n, m \geqslant 0$. Similarly, an A_∞-functor $k : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ gives rise to a chain map

$$\mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})(f,g) \to \mathscr{D}(\mathcal{D},\mathcal{B})(kf,kg), \quad r \mapsto (k\otimes k)r.$$

The component $[(k\otimes k)r]_{n,m}$ of $(k\otimes k)r$ is given by

$$\sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=n\\ j_1+\dots+j_q=m}} (k_{i_1}\otimes\dots\otimes k_{i_p}\otimes k_{j_1}\otimes\dots\otimes k_{j_q})r_{p,q}, \tag{4.6}$$

for each $n,m\geqslant 0$. Proofs of these facts are elementary and are left to the reader.

Let $\mathcal{C}$ be an A_∞-category. For each $n\geqslant 0$, introduce a morphism

$$\nu_n=\sum_{i=0}^{n}(-)^{n-i}(1^{\otimes i}\otimes\varepsilon\otimes 1^{\otimes n-i}):(Ts\mathcal{C})^{\otimes n+1}\to(Ts\mathcal{C})^{\otimes n},$$

in $\mathscr{Q}/\operatorname{Ob}\mathcal{C}$. In particular, $\nu_0=\varepsilon:Ts\mathcal{C}\to\Bbbk\operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Denote $\nu=\nu_1=(1\otimes\varepsilon)-(\varepsilon\otimes 1):Ts\mathcal{C}\otimes Ts\mathcal{C}\to Ts\mathcal{C}$ for the sake of brevity.

4.2. **Lemma.** *The map $\nu:Ts\mathcal{C}\otimes Ts\mathcal{C}\to Ts\mathcal{C}$ is a double $(1,1)$-coderivation of degree 0 and $\nu B_1=0$.*

Proof. We have:

$$\begin{aligned}(\Delta_0\otimes 1)&(1\otimes\nu)+(1\otimes\Delta_0)(\nu\otimes 1)\\ &=(\Delta_0\otimes 1)(1\otimes 1\otimes\varepsilon)-(\Delta_0\otimes 1)(1\otimes\varepsilon\otimes 1)\\ &\qquad\qquad+(1\otimes\Delta_0)(1\otimes\varepsilon\otimes 1)-(1\otimes\Delta_0)(\varepsilon\otimes 1\otimes 1)\\ &=(\Delta_0\otimes\varepsilon)-(\varepsilon\otimes\Delta_0)=((1\otimes\varepsilon)-(\varepsilon\otimes 1))\Delta_0=\nu\Delta_0,\end{aligned}$$

due to the identities

$$\begin{aligned}(\Delta_0\otimes 1)(1\otimes\varepsilon\otimes 1)=1\otimes 1=(1\otimes\Delta_0)(1\otimes\varepsilon\otimes 1):&\\ Ts\mathcal{C}\otimes Ts\mathcal{C}\to Ts\mathcal{C}\otimes Ts\mathcal{C}.&\end{aligned}$$

This computation shows that $\nu:Ts\mathcal{C}\otimes Ts\mathcal{C}\to Ts\mathcal{C}$ is a double $(1,1)$-coderivation. Its only non-vanishing components are ${}_{X,Y}\nu_{1,0}=1:s\mathcal{C}(X,Y)\to s\mathcal{C}(X,Y)$ and ${}_{X,Y}\nu_{0,1}=1:s\mathcal{C}(X,Y)\to s\mathcal{C}(X,Y)$, $X,Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Since νB_1 is a double $(1,1)$-coderivation of degree 1, the equation $\nu B_1 = 0$ is equivalent to its particular case $\nu B_1 \mathrm{pr}_1 = 0$, i.e., for each $n, m \geqslant 0$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n, \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} (1^{\otimes n-i} \otimes \nu_{i,j} \otimes 1^{\otimes m-j}) b_{n-i+1+m-j} - \sum_{a+k+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_k \otimes 1^{\otimes c+m}) \nu_{a+1+c,m} - \sum_{u+t+v=m} (1^{\otimes n+u} \otimes b_t \otimes 1^{\otimes v}) \nu_{n,u+1+v} = 0 : T^n s\mathcal{C} \otimes T^m s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}.$$

It reduces to the identity

$$\chi(n > 0) b_{n+m} - \chi(m > 0) b_{n+m} - \chi(m = 0) b_n + \chi(n = 0) b_m = 0,$$

where $\chi(P) = 1$ if a condition P holds and $\chi(P) = 0$ if P does not hold. $\square$

Let $\mathcal{C}$ be a strictly unital A_∞-category. The strict unit $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}$ is viewed as a morphism of graded quivers $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} : \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{C} \to s\mathcal{C}$ of degree -1, identity on objects. For each $n \geqslant 0$, introduce a morphism of graded quivers

$$\xi_n = \bigl[(Ts\mathcal{C})^{\otimes n+1} \xrightarrow{1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1} Ts\mathcal{C} \otimes s\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes s\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \xrightarrow{\mu^{(2n+1)}} Ts\mathcal{C} \bigr],$$

of degree $-n$, identity on objects. Here $\mu^{(2n+1)}$ denotes composition of $2n+1$ composable arrows in the graded category $Ts\mathcal{C}$. In particular, $\xi_0 = 1 : Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C}$. Denote $\xi = \xi_1 = (1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{(3)} : Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C}$ for the sake of brevity.

4.3. **Lemma.** *The map $\xi : Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C}$ is a double $(1,1)$-coderivation of degree -1 and $\xi B_1 = \nu$.*

Proof. The following identity follows directly from the definitions of μ and Δ_0:

$$\mu\Delta_0 = (\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes \mu) + (1 \otimes \Delta_0)(\mu \otimes 1) - 1 : \\ Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C}.$$

It implies

(4.7)
$$\mu^{(3)}\Delta_0 = (\Delta_0 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \mu^{(3)}) + (1 \otimes 1 \otimes \Delta_0)(\mu^{(3)} \otimes 1) \\ + (1 \otimes \Delta_0 \otimes 1)(\mu \otimes \mu) - (1 \otimes \mu) - (\mu \otimes 1) : \\ Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C}.$$

Since $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}\Delta_0 = \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes \eta + \eta \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} : \Bbbk\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C}$, it follows that

$$(1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}\Delta_0 \otimes 1)(\mu \otimes \mu) - (1 \otimes (\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu) - ((1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}})\mu \otimes 1) = 0 : \\ Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C}.$$

Equation (4.7) yields

$$(1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{(3)}\Delta_0 \\ = (\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes (1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{(3)}) + (1 \otimes \Delta_0)((1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{(3)} \otimes 1),$$

i.e., $\xi = (1 \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{(3)} : Ts\mathcal{C} \otimes Ts\mathcal{C} \to Ts\mathcal{C}$ is a double $(1,1)$-coderivation. Its the only non-vanishing components are ${}_X\xi_{0,0} = {}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \in s\mathcal{C}(X,X)$, $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Since both ξB_1 and ν are double $(1,1)$-coderivations of degree 0, the equation $\xi B_1 = \nu$ is equivalent to its particular case $\xi B_1 \mathrm{pr}_1 = \nu \mathrm{pr}_1$, i.e., for each $n, m \geqslant 0$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \leqslant q \leqslant m}} (1^{\otimes n-p} \otimes \xi_{p,q} \otimes 1^{\otimes m-q}) b_{n-p+1+m-q} + \sum_{a+k+c=n} (1^{\otimes a} \otimes b_k \otimes 1^{\otimes c+m}) \xi_{a+1+c,m} + \sum_{u+t+v=m} (1^{\otimes n+u} \otimes b_t \otimes 1^{\otimes v}) \xi_{n,u+1+v} = \nu_{n,m} : T^n s\mathcal{C} \otimes T^m s\mathcal{C} \to s\mathcal{C}.$$

It reduces to the the equation

$$(1^{\otimes n} \otimes \mathbf{i}_0^{\mathcal{C}} \otimes 1^{\otimes m}) b_{n+1+m} = \nu_{n,m} : T^n s\mathcal{C} \otimes T^m s\mathcal{C} \to s\mathcal{C},$$

which holds true, since $\mathbf{i}_0^{\mathcal{C}}$ is a strict unit. □

Note that the maps ν_n, ξ_n obey the following relations:

$$\xi_n = (\xi_{n-1} \otimes 1)\xi, \qquad \nu_n = (1^{\otimes n} \otimes \varepsilon) - (\nu_{n-1} \otimes 1), \qquad n \geqslant 1. \tag{4.8}$$

In particular, $\xi_n \varepsilon = 0 : (Ts\mathcal{C})^{\otimes n+1} \to \Bbbk \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, for each $n \geqslant 1$, as $\xi\varepsilon = 0$ by equation (4.3).

4.4. **Lemma.** *The following equations hold true:*

$$\xi_n \Delta_0 = \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(\xi_i \otimes \xi_{n-i}), \quad n \geqslant 0, \tag{4.9}$$

$$\xi_n b - (-)^n \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-i}) \xi_n = \nu_n \xi_{n-1}, \quad n \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Proof. Let us prove (4.9). The proof is by induction on n. The case $n = 0$ is trivial. Let $n \geqslant 1$. By (4.8) and Lemma 4.3,

$$\xi_n \Delta_0 = (\xi_{n-1} \otimes 1)\xi \Delta_0 = (\xi_{n-1}\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes \xi) + (\xi_{n-1} \otimes \Delta_0)(\xi \otimes 1).$$

By induction hypothesis,

$$\xi_{n-1}\Delta_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(1^{\otimes i}\otimes\Delta_0\otimes 1^{\otimes n-1-i})(\xi_i\otimes\xi_{n-1-i}),$$

therefore

$$\begin{aligned}\xi_n\Delta_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(1^{\otimes i}\otimes\Delta_0\otimes 1^{\otimes n-i})(\xi_i\otimes\xi_{n-1-i}\otimes 1)(1\otimes\xi)&\\ +(1^{\otimes n}\otimes\Delta_0)((\xi_{n-1}\otimes 1)\xi\otimes 1)&\\ = \sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes\Delta_0\otimes 1^{\otimes n-i})(\xi_i\otimes\xi_{n-i}),&\end{aligned}$$

since $(\xi_{n-1-i}\otimes 1)\xi = \xi_{n-i}$ if $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Let us prove (4.10). The proof is by induction on n. The case $n=1$ follows from Lemma 4.3. Let $n\geqslant 2$. By (4.8) and Lemma 4.3,

$$\begin{aligned}&\xi_n b - (-)^n\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-i})\xi_n\\ &= (\xi_{n-1}\otimes 1)\xi b - (-)^n\sum_{i=0}^{n-1}((1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-1-i})\xi_{n-1}\otimes 1)\xi\\ &\qquad - (-)^n(1^{\otimes n}\otimes b)(\xi_{n-1}\otimes 1)\xi\\ &= -(\xi_{n-1}b\otimes 1)\xi - (\xi_{n-1}\otimes b)\xi + (\xi_{n-1}\otimes 1)\nu\\ &+ (-)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}((1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-1-i})\xi_{n-1}\otimes 1)\xi + (\xi_{n-1}\otimes b)\xi\\ &= (\xi_{n-1}\otimes 1)\nu\\ &- \left(\left[\xi_{n-1}b - (-)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-1-i})\xi_{n-1}\right]\otimes 1\right)\xi.\end{aligned}$$

By induction hypothesis

$$\xi_{n-1}b - (-)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-1-i})\xi_{n-1} = \nu_{n-1}\xi_{n-2},$$

therefore

$$\xi_n b - (-)^n\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-i})\xi_n = (\xi_{n-1}\otimes 1)\nu - (\nu_{n-1}\xi_{n-2}\otimes 1)\xi.$$

Since by (4.8),

$$\begin{aligned}(\xi_{n-1}\otimes 1)\nu &- (\nu_{n-1}\xi_{n-2}\otimes 1)\xi \\ &= (\xi_{n-1}\otimes\varepsilon) - (\xi_{n-1}\varepsilon\otimes 1) - (\nu_{n-1}\otimes 1)\xi_{n-1} \\ &\qquad = (1^{\otimes n}\otimes\varepsilon)\xi_{n-1} - (\nu_{n-1}\otimes 1)\xi_{n-1} = \nu_n\xi_{n-1},\end{aligned}$$

equation (4.10) is proven. □

5. An augmented differential graded cocategory

Let now $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\mathsf{su}}$, where $\mathcal{A}$ is an A_∞-category. There is an isomorphism of graded $\Bbbk$-quivers, identity on objects:

$$\zeta : \bigoplus_{n\geqslant 0}(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}.$$

The morphism ζ is the sum of morphisms

$$(5.1)\quad \zeta_n = \bigl[(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \xrightarrow{s^{-n}} (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1} \xhookrightarrow{e^{\otimes n+1}} (Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}})^{\otimes n+1} \xrightarrow{\xi_n} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}\bigr],$$

where $e : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathsf{su}}$ is the natural embedding. The graded quiver

$$\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0}(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n]$$

admits a unique structure of an augmented differential graded cocategory such that ζ becomes an isomorphism of augmented differential graded cocategories. The comultiplication $\widetilde{\Delta} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ is found from the equation

$$\begin{aligned}\bigl[\mathcal{E} \xrightarrow{\zeta} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \xrightarrow{\Delta_0} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \otimes Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}\bigr]& \\ = \bigl[\mathcal{E} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} &\xrightarrow{\zeta\otimes\zeta} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \otimes Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}\bigr].\end{aligned}$$

Restricting the left hand side of the equation to the summand $(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n]$ of $\mathcal{E}$, we obtain

$$\begin{aligned}\zeta_n\Delta_0 &= s^{-n}e^{\otimes n+1}\xi_n\Delta_0 \\ &= s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(e^{\otimes i} \otimes e\Delta_0 \otimes e^{\otimes n-i})(\xi_i \otimes \xi_{n-i}) : \\ &\qquad\qquad (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \otimes Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}},\end{aligned}$$

by equation (4.9). Since e is a morphism of augmented graded cocategories, it follows that

$$\begin{aligned}\zeta_n\Delta_0 &= s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(e^{\otimes i+1}\xi_i \otimes e^{\otimes n-i+1}\xi_{n-i}) \\ &= s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(s^i \otimes s^{n-i})(\zeta_i \otimes \zeta_{n-i}) : \\ &\qquad\qquad (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \otimes Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}.\end{aligned}$$

This implies the following formula for $\widetilde{\Delta}$:

$$(5.2)\quad \widetilde{\Delta}|_{(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n]} = s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes\Delta_0\otimes 1^{\otimes n-i})(s^i\otimes s^{n-i}) : \\ (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to \bigoplus_{i=0}^{n}(Ts\mathcal{A})^{\otimes i+1}[i]\bigotimes(Ts\mathcal{A})^{\otimes n-i+1}[n-i].$$

The counit of $\mathcal{E}$ is $\widetilde{\varepsilon} = [\mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} Ts\mathcal{A} \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A} = \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{E}]$. The augmentation of $\mathcal{E}$ is $\widetilde{\eta} = [\Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{E} = \Bbbk\mathrm{Ob}\mathcal{A} \xrightarrow{\eta} Ts\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{in}_0} \mathcal{E}]$. The differential $\widetilde{b} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ is found from the following equation:

$$\big[\mathcal{E} \xrightarrow{\zeta} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \xrightarrow{b} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}\big] = \big[\mathcal{E} \xrightarrow{\widetilde{b}} \mathcal{E} \xrightarrow{\zeta} Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}\big].$$

Let $\widetilde{b}_{n,m} : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to (Ts\mathcal{A})^{\otimes m+1}[m]$, $n, m \geqslant 0$, denote the matrix coefficients of $\widetilde{b}$. Restricting the left hand side of the above equation to the summand $(Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n]$ of $\mathcal{E}$, we obtain

$$\begin{aligned}\zeta_n b &= s^{-n}e^{\otimes n+1}\xi_n b \\ &= s^{-n}e^{\otimes n+1}\nu_n\xi_{n-1} + (-)^n s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(e^{\otimes i}\otimes eb\otimes e^{\otimes n-i})\xi_n : \\ &\qquad\qquad (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}},\end{aligned}$$

by equation (4.10). Since e preserves the counit, it follows that

$$e^{\otimes n+1}\nu_n = \nu_n e^{\otimes n} : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1} \to (Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}})^{\otimes n}.$$

Furthermore, e commutes with the differential b, therefore

$$\begin{aligned}\zeta_n b &= s^{-n}\nu_n s^{n-1}(s^{-(n-1)}e^{\otimes n}\xi_{n-1}) \\ &\qquad + (-)^n s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-i})s^n(s^{-n}e^{\otimes n+1}\xi_n) \\ &= s^{-n}\nu_n s^{n-1}\zeta_{n-1} + (-)^n s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-i})s^n\zeta_n : \\ &\qquad\qquad (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}}.\end{aligned}$$

We conclude that

$$\tag{5.3} \widetilde{b}_{n,n} = (-)^n s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes b\otimes 1^{\otimes n-i})s^n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n],$$

for $n \geqslant 0$, and

$$\tag{5.4} \widetilde{b}_{n,n-1} = s^{-n}\nu_n s^{n-1} : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to (Ts\mathcal{A})^{\otimes n}[n-1],$$

for $n \geqslant 1$, are the only non-vanishing matrix coefficients of $\widetilde{b}$.

Let $g : \mathcal{E} \to Ts\mathcal{B}$ be a morphism of augmented differential graded cocategories, and let $g_n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{B}$ be its components. By formula (5.2), the equation $g\Delta_0 = \widetilde{\Delta}(g\otimes g)$ is equivalent to the system of equations

$$g_n\Delta_0 = s^{-n}\sum_{i=0}^{n}(1^{\otimes i}\otimes \Delta_0\otimes 1^{\otimes n-i})(s^i g_i\otimes s^{n-i}g_{n-i}) : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{B}\otimes Ts\mathcal{B}, \quad n \geqslant 0.$$

The equation $g\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}(\Bbbk\mathrm{Ob}g)$ is equivalent to the equations $g_0\varepsilon = \varepsilon(\Bbbk\mathrm{Ob}g_0)$, $g_n\varepsilon = 0$, $n \geqslant 1$. The equation $\widetilde{\eta}g = (\Bbbk\mathrm{Ob}g)\eta$ is equivalent to the equation $\eta g_0 = (\Bbbk\mathrm{Ob}g_0)\eta$. By formulas (5.3) and (5.4), the equation $gb = \widetilde{b}g$ is equivalent to

$g_0 b = b g_0 : Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{B}$ and

$$g_n b = (-)^n s^{-n} \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-i}) s^n g_n + s^{-n} \nu_n s^{n-1} g_{n-1} : \\ (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}[n] \to Ts\mathcal{B}, \quad n \geqslant 1.$$

Introduce $\Bbbk$-linear maps $\phi_n = s^n g_n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}(X,Y) \to Ts\mathcal{B}(Xg, Yg)$ of degree $-n$, $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $n \geqslant 0$. The above equations take the following form:

$$\phi_n \Delta_0 = \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(\phi_i \otimes \phi_{n-i}) : \\ (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1} \to Ts\mathcal{B} \otimes Ts\mathcal{B}, \tag{5.5}$$

for $n \geqslant 1$;

$$\phi_n b = (-)^n \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-i}) \phi_n + \nu_n \phi_{n-1} : \\ (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1} \to Ts\mathcal{B}, \tag{5.6}$$

for $n \geqslant 1$;

$$\phi_0 \Delta_0 = \Delta_0(\phi_0 \otimes \phi_0), \quad \phi_0 \varepsilon = \varepsilon, \quad \phi_0 b = b \phi_0, \tag{5.7}$$

$$\phi_n \varepsilon = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{5.8}$$

Summing up, we conclude that morphisms of augmented differential graded cocategories $\mathcal{E} \to Ts\mathcal{B}$ are in bijection with collections consisting of a morphism of augmented differential graded cocategories $\phi_0 : Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{B}$ and of $\Bbbk$-linear maps $\phi_n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}(X,Y) \to Ts\mathcal{B}(X\phi_0, Y\phi_0)$ of degree $-n$, $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $n \geqslant 1$, such that equations (5.5), (5.6), and (5.8) hold true.

In particular, A_∞-functors $f : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{B}$, which are augmented differential graded cocategory morphisms $Ts\mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to$

$Ts\mathcal{B}$, are in bijection with morphisms $g = \zeta f : \mathcal{E} \to Ts\mathcal{B}$ of augmented differential graded cocategories. With the above notation, we may say that to give an A_∞-functor $f : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{B}$ is the same as to give an A_∞-functor $\phi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ and a system of $\Bbbk$-linear maps $\phi_n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}(X,Y) \to Ts\mathcal{B}(X\phi_0, Y\phi_0)$ of degree $-n$, $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $n \geqslant 1$, such that equations (5.5), (5.6) and (5.8) hold true.

5.1. **Proposition.** *The following conditions are equivalent.*

(a) *There exists an A_∞-functor $U : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{A}$ such that*

$$\big[\mathcal{A} \xhookrightarrow{e} \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \xrightarrow{U} \mathcal{A}\big] = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

(b) *There exists a double $(1,1)$-coderivation $\phi : Ts\mathcal{A} \otimes Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{A}$ of degree -1 such that $\phi B_1 = \nu$.*

Proof. (a)$\Rightarrow$(b) Let $U : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{A}$ be an A_∞-functor such that $eU = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, in particular $\operatorname{Ob}U = \mathrm{id} : \operatorname{Ob}\mathcal{A}^{\mathsf{su}} = \operatorname{Ob}\mathcal{A} \to \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. It gives rise to the family of $\Bbbk$-linear maps $\phi_n = s^n\zeta_n U : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}(X,Y) \to Ts\mathcal{B}(X,Y)$ of degree $-n$, $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $n \geqslant 0$, that satisfy equations (5.5), (5.6) and (5.8). In particular, $\phi_0 = eU = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Equations (5.5) and (5.6) for $n = 1$ read as follows:

$$\begin{aligned}
\phi_1\Delta_0 &= (\Delta_0 \otimes 1)(\phi_0 \otimes \phi_1) + (1 \otimes \Delta_0)(\phi_1 \otimes \phi_0) \\
&\qquad\qquad = (\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes \phi_1) + (1 \otimes \Delta_0)(\phi_1 \otimes 1), \\
\phi_1 b &= (1 \otimes b + b \otimes 1)\phi_1 + \nu_1\phi_0 = (1 \otimes b + b \otimes 1)\phi_1 + \nu.
\end{aligned}$$

In other words, ϕ_1 is a double $(1,1)$-coderivation of degree -1 and $\phi_1 B_1 = \nu$.

(b)$\Rightarrow$(a) Let $\phi : Ts\mathcal{A} \otimes Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{A}$ be a double $(1,1)$-coderivation of degree -1 such that $\phi B_1 = \nu$. Define $\Bbbk$-linear maps

$$\phi_n : (Ts\mathcal{A})^{\otimes n+1}(X,Y) \to Ts\mathcal{A}(X,Y), \quad X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A},$$

of degree $-n$, $n \geqslant 0$, recursively via $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ and $\phi_n = (\phi_{n-1}\otimes 1)\phi$, $n \geqslant 1$. Let us show that ϕ_n satisfy equations (5.5), (5.6) and (5.8). Equation (5.8) is obvious: $\phi_n\varepsilon = (\phi_{n-1} \otimes 1)\phi\varepsilon = 0$ as $\phi\varepsilon = 0$ by (4.3). Let us prove equation (5.5) by induction. It holds for $n = 1$ by assumption, since $\phi_1 = \phi$ is a double $(1,1)$-coderivation. Let $n \geqslant 2$. We have:

$$\begin{aligned}
\phi_n\Delta_0 &= (\phi_{n-1} \otimes 1)\phi_1\Delta_0 \\
&= (\phi_{n-1} \otimes 1)((\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes \phi_1) + (1 \otimes \Delta_0)(\phi_1 \otimes 1)) \\
&= (\phi_{n-1}\Delta_0 \otimes 1)(1 \otimes \phi_1) \\
&\qquad\qquad + (1^{\otimes n} \otimes \Delta_0)((\phi_{n-1} \otimes 1)\phi_1 \otimes 1).
\end{aligned}$$

By induction hypothesis,

$$\phi_{n-1}\Delta_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-1-i})(\phi_i \otimes \phi_{n-1-i}),$$

so that

$$\begin{aligned}
\phi_n\Delta_0 &= \sum_{i=0}^{n-1} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(\phi_i \otimes \phi_{n-1-i} \otimes 1)(1 \otimes \phi_1) \\
&\qquad\qquad + (1^{\otimes n} \otimes \Delta_0)((\phi_{n-1} \otimes 1)\phi_1 \otimes 1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_0 \otimes 1^{\otimes n-i})(\phi_i \otimes \phi_{n-i}),
\end{aligned}$$

since $(\phi_{n-1-i} \otimes 1)\phi_1 = \phi_{n-i}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Let us prove equation (5.6) by induction. For $n = 1$ it is equivalent to the equation $\phi B_1 = \nu$, which holds by assumption. Let $n \geqslant 2$. We have:

$$\begin{aligned}
&\phi_n b - (-)^n \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-i})\phi_n \\
&= (\phi_{n-1} \otimes 1)\phi b - (-)^n \sum_{i=0}^{n-1} ((1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-1-i})\phi_{n-1} \otimes 1)\phi \\
&\qquad\qquad - (-)^n (1^{\otimes n} \otimes b)(\phi_{n-1} \otimes 1)\phi \\
&= -(\phi_{n-1} b \otimes 1)\phi - (\phi_{n-1} \otimes b)\phi + (\phi_{n-1} \otimes 1)\nu \\
&+ (-)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} ((1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-1-i})\phi_{n-1} \otimes 1)\phi + (\phi_{n-1} \otimes b)\phi \\
&= (\phi_{n-1} \otimes 1)\nu \\
&- \Bigl(\Bigl[\phi_{n-1} b - (-)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-1-i})\phi_{n-1}\Bigr] \otimes 1\Bigr)\phi.
\end{aligned}$$

By induction hypothesis,

$$\phi_{n-1} b - (-)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-1-i})\phi_{n-1} = \nu_{n-1}\phi_{n-2},$$

therefore

$$\begin{aligned}
&\phi_n b - (-)^n \sum_{i=0}^{n} (1^{\otimes i} \otimes b \otimes 1^{\otimes n-i})\phi_n \\
&\qquad\qquad = (\phi_{n-1} \otimes 1)\nu - (\nu_{n-1}\phi_{n-2} \otimes 1)\phi.
\end{aligned}$$

Since by (4.8)

$$
\begin{aligned}
&(\phi_{n-1}\otimes 1)\nu - (\nu_{n-1}\phi_{n-2}\otimes 1)\phi \\
&\qquad = (\phi_{n-1}\otimes\varepsilon) - (\phi_{n-1}\varepsilon\otimes 1) - (\nu_{n-1}\otimes 1)\phi_{n-1} \\
&\qquad\qquad = (1^{\otimes n}\otimes\varepsilon)\phi_{n-1} - (\nu_{n-1}\otimes 1)\phi_{n-1} = \nu_n\phi_{n-1},
\end{aligned}
$$

and equation (5.6) is proven.

The system of maps ϕ_n, $n \geqslant 0$, corresponds to an A_∞-functor $U : \mathcal{A}^{\mathsf{su}} \to \mathcal{A}$ such that $\phi_n = s^n\zeta_n U$, $n \geqslant 0$. In particular, $eU = \phi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. □

5.2. **Proposition.** *Let $\mathcal{A}$ be a unital A_∞-category. There exists a double $(1,1)$-coderivation $h : Ts\mathcal{A}\otimes Ts\mathcal{A} \to Ts\mathcal{A}$ of degree -1 such that $hB_1 = \nu$.*

Proof. Let $\mathcal{A}$ be a unital A_∞-category. By [9, Corollary A.12], there exist a differential graded category $\mathcal{D}$ and an A_∞-equivalence $f : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$. The functor f is unital by [8, Corollary 8.9]. This means that, for every object X of $\mathcal{A}$, there exists a $\Bbbk$-linear map ${}_Xv_0 : \Bbbk \to (s\mathcal{D})^{-2}(Xf, Xf)$ such that ${}_X\mathbf{i}_0^{\mathcal{A}}f_1 = {}_{Xf}\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}} + {}_Xv_0b_1$. Here ${}_{Xf}\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}}$ denotes the strict unit of the differential graded category $\mathcal{D}$.

By Lemma 4.3, $\xi = (1\otimes\mathbf{i}_0^{\mathcal{D}}\otimes 1)\mu^{(3)} : Ts\mathcal{D}\otimes Ts\mathcal{D} \to Ts\mathcal{D}$ is a $(1,1)$-coderivation of degree -1. Let ι denote the double (f,f)-coderivation $(f\otimes f)\xi$ of degree -1. By Lemma 4.3,

$$\iota B_1 = (f\otimes f)(\xi B_1) = (f\otimes f)\nu = \nu f.$$

By Lemma 4.2, the equation $\nu B_1 = 0$ holds true. We conclude that the double coderivations $\nu \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{A})(\mathrm{id}_{\mathcal{A}},\mathrm{id}_{\mathcal{A}})^0$ and $\iota \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{D})(f,f)^{-1}$ satisfy the following equations:

$$\nu B_1 = 0, \tag{5.9}$$

$$\iota B_1 - \nu f = 0. \tag{5.10}$$

We are going to prove that there exist double coderivations $h \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{A})(\mathrm{id}_\mathcal{A},\mathrm{id}_\mathcal{A})^{-1}$ and $k \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{D})(f,f)^{-2}$ such that the following equations hold true:

$$hB_1 = \nu,$$
$$hf = \iota + kB_1.$$

Let us put ${}_Xh_{0,0} = {}_X\mathbf{i}_0^\mathcal{A}$, ${}_Xk_{0,0} = {}_Xv_0$, and construct the other components of h and k by induction. Given an integer $t \geqslant 0$, assume that we have already found components $h_{p,q}$, $k_{p,q}$ of the sought h, k, for all pairs (p,q) with $p+q<t$, such that the equations

(5.11) $\quad (hB_1 - \nu)_{p,q} = 0 :$
$$s\mathcal{A}(X_0,X_1)\otimes\cdots\otimes s\mathcal{A}(X_{p+q-1},X_{p+q}) \to s\mathcal{A}(X_0,X_{p+q}),$$

(5.12) $\quad (kB_1 + \iota - hf)_{p,q} = 0 :$
$$s\mathcal{A}(X_0,X_1)\otimes\cdots\otimes s\mathcal{A}(X_{p+q-1},X_{p+q}) \to s\mathcal{D}(X_0f,X_{p+q}f)$$

are satisfied for all pairs (p,q) with $p+q<t$. Introduce double coderivations $\widetilde{h} \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{A})(\mathrm{id}_\mathcal{A},\mathrm{id}_\mathcal{A})$ and $\widetilde{k} \in \mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{D})(f,f)$ of degree -1 resp. -2 by their components: $\widetilde{h}_{p,q} = h_{p,q}$, $\widetilde{k}_{p,q} = k_{p,q}$ for $p+q<t$, all the other components vanish. Define a double $(1,1)$-coderivation $\lambda = \widetilde{h}B_1 - \nu$ of degree 0 and a double (f,f)-coderivation $\kappa = \widetilde{k}B_1 + \iota - \widetilde{h}f$ of degree -1. Then $\lambda_{p,q} = 0$, $\kappa_{p,q} = 0$ for all $p+q<t$. Let non-negative integers n, m satisfy $n+m=t$. The identity $\lambda B_1 = 0$ implies that

$$\lambda_{n,m}b_1 - \sum_{l=1}^{n+m}(1^{\otimes l-1}\otimes b_1\otimes 1^{\otimes n+m-l})\lambda_{n,m} = 0.$$

The (n,m)-component of the identity $\kappa B_1 + \lambda f = 0$ gives

$$\kappa_{n,m} b_1 + \sum_{l=1}^{n+m} (1^{\otimes l-1} \otimes b_1 \otimes 1^{\otimes n+m-l})\kappa_{n,m} + \lambda_{n,m} f_1 = 0.$$

The chain map $f_1 : \mathcal{A}(X_0, X_{n+m}) \to s\mathcal{D}(X_0 f, X_{n+m} f)$ is homotopy invertible as f is an A_∞-equivalence. Hence, the chain map Φ given by

$$\begin{gathered}\underline{\mathsf{C}}^\bullet_{\Bbbk}(N, s\mathcal{A}(X_0, X_{n+m})) \to \underline{\mathsf{C}}^\bullet_{\Bbbk}(N, s\mathcal{D}(X_0 f, X_{n+m} f)),\\ \lambda \mapsto \lambda f_1,\end{gathered}$$

is homotopy invertible for each complex of $\Bbbk$-modules N, in particular, for $N = s\mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes \cdots \otimes s\mathcal{A}(X_{n+m-1}, X_{n+m})$. Therefore, the complex $\operatorname{Cone}(\Phi)$ is contractible, e.g. by [8, Lemma B.1]. Consider the element $(\lambda_{n,m}, \kappa_{n,m})$ of

$$\underline{\mathsf{C}}^0_{\Bbbk}(N, s\mathcal{A}(X_0, X_{n+m})) \oplus \underline{\mathsf{C}}^{-1}_{\Bbbk}(N, \mathcal{D}(X_0 f, X_{n+m} f)).$$

The above direct sum coincides with $\operatorname{Cone}^{-1}(\Phi)$. The equations $-\lambda_{n,m} d = 0$, $\kappa_{n,m} d + \lambda_{n,m}\Phi = 0$ imply that $(\lambda_{n,m}, \kappa_{n,m})$ is a cycle in the complex $\operatorname{Cone}(\Phi)$. Due to acyclicity of $\operatorname{Cone}(\Phi)$, $(\lambda_{n,m}, \kappa_{n,m})$ is a boundary of some element $(h_{n,m}, -k_{n,m})$ of $\operatorname{Cone}^{-2}(\Phi)$, i.e., of

$$\underline{\mathsf{C}}^{-1}_{\Bbbk}(N, s\mathcal{A}(X_0, X_{n+m})) \oplus \underline{\mathsf{C}}^{-2}_{\Bbbk}(N, \mathcal{D}(X_0 f, X_{n+m} f)).$$

Thus, $-k_{n,m}d + h_{n,m}f_1 = \kappa_{n,m}$, $-h_{n,m}d = \lambda_{n,m}$. These equations can be written as follows:

$$- h_{n,m}b_1 - \sum_{u+1+v=n+m} (1^{\otimes u} \otimes b_1 \otimes 1^{\otimes v})h_{n,m} = (\widetilde{h}B_1 - \nu)_{n,m},$$

$$- k_{n,m}b_1 + \sum_{u+1+v=n+m} (1^{\otimes u} \otimes b_1 \otimes 1^{\otimes v})k_{n,m} + h_{n,m}f_1 = (\widetilde{k}B_1 + \iota - \widetilde{h}f)_{n,m}.$$

Thus, if we introduce double coderivations $\overline{h}$ and $\overline{k}$ by their components: $\overline{h}_{p,q} = h_{p,q}$, $\overline{k}_{p,q} = k_{p,q}$ for $p + q \leqslant t$ (using just found maps if $p + q = t$) and 0 otherwise, then these coderivations satisfy equations (5.11) and (5.12) for each p, q such that $p+q \leqslant t$. Induction on t proves the proposition. □

5.3. **Theorem.** *Every unital A_∞-category admits a weak unit.*

Proof. The proof follows from Propositions 5.1 and 5.2. □

6. Summary

We have proved that the definitions of unital A_∞-category given by Lyubashenko, by Kontsevich and Soibelman, and by Fukaya are equivalent.

References

[1] *Fukaya K.* Morse homotopy, A_∞-category, and Floer homologies // Proc. of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (H. J. Kim, ed.), Lecture Notes, no. 18, Seoul Nat. Univ., Seoul, 1993, P. 1–102.

[2] *Fukaya K.* Floer homology and mirror symmetry. II // Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999), Adv. Stud. Pure Math., vol. 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, P. 31–127.

[3] *Fukaya K., Oh Y.-G., Ohta H., Ono K.* Lagrangian intersection Floer theory - anomaly and obstruction -, book in preparation, March 23, 2006.

[4] *Keller B.* Introduction to A-infinity algebras and modules // Homology, Homotopy and Applications **3** (2001), no. 1, P. 1–35.

[5] *Kontsevich M.* Homological algebra of mirror symmetry // Proc. Internat. Cong. Math., Zürich, Switzerland 1994 (Basel), vol. 1, P. 120–139.

[6] *Kontsevich M., Soibelman Y. S.* Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry. I // 2006, `math.RA/0606241`.

[7] *Lefèvre-Hasegawa K.* Sur les A_∞-catégories // Ph.D. thesis, Université Paris 7, U.F.R. de Mathématiques, 2003, `math.CT/0310337`.

[8] *Lyubashenko V. V.* Category of A_∞-categories // Homology, Homotopy Appl. **5** (2003), no. 1, 1–48.

[9] *Lyubashenko V. V., Manzyuk O.* Quotients of unital A_∞-categories, Max-Planck-Institut fur Mathematik preprint, MPI 04-19, 2004, `math.CT/0306018`.

[10] *Soibelman Y. S.* Mirror symmetry and noncommutative geometry of A_∞-categories // J. Math. Phys. **45** (2004), no. 10, 3742–3757.

[11] *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H-spaces I & II // Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 269-308

Сергій Максименко

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601 Україна
E-mail: `maks@imath.kiev.ua`

Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів двох змінних[1]

Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p \geq 2$, $G = (-g'_y, g'_x)$ — його гамільтонове векторне поле, і $\mathbf{G}$ — локальний потік, породжений G. Позначимо через $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$ множину ростків C^∞ дифеоморфізмів $(\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}^2, O)$, що зберігають орбіти G. Нехай також $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ — компонента лінійної зв'язності тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$, що складається з ростків, які ізотопні $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. В роботі доведено, що якщо g не має простих кратних множників, то кожне відображення $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ представити у вигляді

$$h(z) = \mathbf{G}_{\alpha(z)}(z)$$

для деякої гладкої функції $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Let $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a homogeneous polynomial of degree $p \geq 2$, $G = (-g'_y, g'_x)$ be its Hamiltonian vector field, and $\mathbf{G}_t$ be the local flow generated by G. Denote by $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$ the space of germs of C^∞ diffeomorphisms $(\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}^2, O)$, that preserve orbits of G. Let also $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ be the identity component of $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. Suppose that g has no multiple simple factors. Then we prove that for every $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ there exists a germ of a smooth function $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ at O such that

$$h(z) = \mathbf{G}_{\alpha(z)}(z).$$

[1]Робота виконана в рамках цільової програми НАН України "Сучасні методи дослідження математичних моделей в задачах природознавства та суспільних наук" НДР № 0107U00233

1. Вступ

Нехай $p > 1$ і $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p+1$, тобто $\deg g \geq 2$. Розкладемо його на незвідні над $\mathbb{R}$ множники:

$$g(x,y) = \prod_{i=1}^{l} L_i(x,y) \cdot \prod_{j=1}^{p+1-l} Q_j(x,y), \tag{1.1}$$

де $L_i = a_i x + b_i y$, $(i = 1, \dots, l)$ — лінійна функція, а Q_j, $(j = 1, \dots, n-l)$ — визначена квадратична форма, тобто $Q_j(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $(x,y) = 0$.

Лема 1.1. [5] *Наступні умови для однорідного многочлена g степеня $\deg g \geq 2$ еквівалентні:*

(1) *розклад (1.1) не має кратних множників;*
(2) *жодна з частинних похідних g'_x та g'_y не є тотожним нулем (тобто g залежить від обох змінних x та y) і ці многочлени взаємно прості в кільці $\mathbb{R}[x,y]$.*

У цьому випадку початок координат O є єдиною критичною точкою g.

Означення 1.2 (Властивість $(*)$ для многочлена)**.** *Будемо говорити, що однорідний многочлен $g \in \mathbb{R}[x,y]$ степеня $\deg g \geq 2$ має властивість $(*)$, якщо для нього виконується одна з умов леми 1.1.*

Приклад 1.3. *Для $n \geq 2$ розглянемо функцію*

$$\omega_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \omega_n(z) = z^n.$$

Тоді її дійсна та уявна частини $\mathrm{Re}(z^n)$ та $\mathrm{Im}(z^n)$ мають властивість $(*)$.

Нехай $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле для g. Тоді функція g є постійною уздовж орбіт поля H. Типові приклади шарувань площини $\mathbb{R}^2$ на лінії рівня однорідних многочленів показано на Рис. 4.1 та 4.2.

Відмітимо, що властивість $(*)$ для g можна сформулювати наступним чином: *гамільтонове векторне поле H многочлена g не можна представити у вигляді добутку $H = \omega H_1$, де ω — ненульовий однорідний многочлен степеня $\deg \omega \geq 1$, а H_1 — однорідне (можливо постійне) векторне поле.*

Означення 1.4 (Властивість $(*)$ для векторного поля)**.** *Скажемо, що векторне поле G, визначене в околі початку координат на площині $\mathbb{R}^2$, **має властивість** $(*)$ **в точці** O, якщо знайдуться гладка (C^∞) ніде не рівна нулю функція*

$$\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

локальні координати (x, y) в околі точки O і такий однорідний многочлен $g(x, y)$ з властивістю $(*)$, що

$$G = \eta H,$$

де $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле многочлена g.

З леми 1.1 випливає, що в цьому випадку початок координат $O \in \mathbb{R}^2$ є ізольованою особливою точкою G.

1.5. **Основний результат.** Нехай G — векторне поле, що визначене в деякому околі початку координат $O \in \mathbb{R}^n$. Позначимо через $\hat{\mathcal{E}}(G, O)$ множину ростків C^∞ дифеоморфізмів

$$h : (\mathbb{R}^n, O) \to (\mathbb{R}^n, O),$$

що зберігають орбіти G, тобто $h \in \hat{\mathcal{E}}(G, O)$ якщо знайдеться такий окіл V точки O, що

$$h(\omega \cap V) \subset \omega \tag{1.2}$$

для кожної орбіти ω векторного поля G.

Нехай $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ — компонента лінійної зв'язності тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$, що складається з відображень, ізотопних $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. Позначимо через

$$\mathbf{G}:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\supset\mathcal{U}_{\mathbf{G}}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^n$$

локальний потік, породжений полем G. Він визначений на відкритому околі $\mathcal{U}_{\mathbf{G}}$ множини $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Тоді для кожного ростка $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ гладкої функції в точці O можна визначити росток відображення

$$h:(\mathbb{R}^n,O)\to(\mathbb{R}^n,O),$$

заданого наступною формулою:

$$h(z)=\mathbf{G}(z,\alpha(z)). \tag{1.3}$$

Будемо називати *гладким зсувом* уздовж орбіт G за допомогою функції α. Позначимо через $Sh(G,O)$ множину ростків гладких відображень виду (1.3), де α пробігає множину ростків гладких функцій в точці O. Тоді, [4],

$$Sh(G,O)\subset\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O).$$

В даній роботі доведено наступну теорему, див. §3:

Теорема 1.6. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O. Тоді $Sh(G,O)=\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$. Таким чином, кожне відображення $h\in\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ можна представити у вигляді* (1.3) *для ростка деякої гладкої функції $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.*

Зауваження 1.7. Припустимо, що O є регулярною точкою для G, тобто $G(O)\neq 0$. Тоді кожне відображення, що зберігає орбіти G в околі O є зсувом уздовж орбіт G за допомогою деякої *гладкої* функції α. Для зручності читача, нагадаємо доведення. Дійсно, в околі O можна вибрати координати $(x_1, \dots, x_n)$, в яких $G(x) = (1, 0, \dots, 0)$, а тому

$$\mathbf{G}(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо тепер $h = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — відображення, що зберігає орбіти G, то $h_i = x_i$ для $2 \le i \le n$. Покладемо,

$$\alpha(x) = h_1(x) - x_1. \tag{1.4}$$

Тоді $h(x) = \mathbf{G}(x, \alpha(x))$.

1.8. **Застосування.** В роботі [4] тотожність

$$Sh(G, O) = \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G, O)$$

встановлена для всіх лінійних векторних полів на $\mathbb{R}^n$. Тобто, якщо $G(x) = A \cdot x$ — лінійне векторне поле на $\mathbb{R}^n$, де A — ненульова $(n \times n)$-матриця, то кожне відображення $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G, O)$ можна представити у вигляді

$$h(x) = e^{\alpha(x)A} \cdot x$$

для деякої гладкої функції $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Це дозволило для векторного поля G на многовиді M, яке задовольняє досить слабким умовам, описати гомотопічний тип компонент зв'язності групи $\mathcal{D}(G)$ дифеоморфізмів M, що зберігають орбіти G. Останній результат був суттєво використаний в [3] для опису гомотопічних типів орбіт та стабілізаторів функцій Морса на компактних поверхнях відносно правої дії груп дифеоморфізмів цих поверхонь.

Теорема 1.6 дозволяє провести аналогічний опис гомотопічних типів стабілізаторів та орбіт для більш загального класу функцій на поверхнях. Це буде проароблено в іншій статті.

1.9. **Структура статті.** В §2 наведено означення слабких топологій Уітні. §3 містить план доведення теореми 1.6. За допомогою результатів роботи [5] воно зводиться до розгляду відображень $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$, які є ∞-близькими до тотожного в точці O, див. твердження 3.4. Для роботи з такими відображеннями виявляється зручним перейти до полярних координат (ϕ,ρ), див. §4. При цьому замість однієї особливої точки $O=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ ми отримаємо цілу пряму особливих точок $\rho=0$, але вигляд векторного поля G в нових координатах суттєво спрощується.

В §5 показано, що замість гладких функцій на $\mathbb{R}^2$, які є плоскими в точці O, можна розглядати гладкі функції від полярних координат (ϕ,ρ) які є плоскими при $\rho=0$. Аналогічно в §6 доведено можливість переходу від дифеоморфізмів $\mathbb{R}^2$, які є ∞-близькими до тотожного відображення в точці O, до дифеоморфізмів півплощини полярних координат $\mathbb{H}$, які є ∞-близькими до тотожного в точках $\rho=0$.

В §7 доводиться твердження 3.4, що завершує теорему 1.6.

2. Неперервні відображення між функціональними просторами

Нехай $V\subset\mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина і

$$f=(f_1,\dots,f_m):V\to\mathbb{R}^m$$

— гладке відображення. Для кожної компактної підмножини $K\subset V$ і цілого невід'ємного числа $r\geq 0$ визначимо *r-норму* f на K за допомогою наступної формули

$$\|f\|^r_K \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{|i|\leq r}\sup_{x\in K}|D^i f_j(x)|,$$

де $i = (i_1, \dots, i_n)$, $|i| = i_1 + \dots + i_n$, а $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$. Для фіксованого r норми $\|f\|_K^r$ визначають *слабку* C_W^r-топологію на $C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$, див. [1, 2].

Означення 2.1. *Нехай A, B, C, D — гладкі многовиди,*

$$\mathcal{X} \subset C^\infty(A, B), \qquad \mathcal{Y} \subset C^\infty(C, D)$$

*— дві підмножини, і $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — відображення. Будемо говорити, що F є $C_{W,W}^{s,r}$**-неперервним**, якщо воно є неперервним з C_W^s-топології на $\mathcal{X}$ в C_W^r-топологію на $\mathcal{Y}$.*

*Назвемо F **ручно-неперервним**, якщо для кожного $r \geq 0$ знайдеться таке ціле число $s = s(r) \geq 0$, що F є $C_{W,W}^{s(r),r}$-неперервним. Очевидно, що кожне ручно-неперервне відображення є $C_{W,W}^{\infty,\infty}$-неперервним.*

Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина. Тоді мають місце наступні леми, див. [5].

Лема 2.2. *Нехай*

$$D : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

— відображення, визначене за формулою $D(\alpha) = \frac{\partial^{|k|}\alpha}{\partial x^k}$, де

$$k = (k_1, \dots, k_n), \qquad |k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \qquad \partial x^k = \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}.$$

Тоді D є $C_{W,W}^{r+|k|,r}$-неперервним для всіх $r \geq 0$.

Лема 2.3. *Нехай*

$$Z : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

— відображення, визначене за формулою:

$$Z(\alpha)(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \alpha(x_1, \dots, x_n), \qquad \alpha \in C^\infty(V).$$

Тоді Z є ін'єктивним та $C_{W,W}^{r,r}$-неперервним, а обернене до нього Z^{-1} є $C_{W,W}^{r+1,r}$-неперервним.

Лема 2.4 (Лема Адамара)**.** *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така гладка функція, що $f(0) = 0$. Тоді*

$$f(x) = s \underbrace{\int_0^1 f'(tx)dt}_{g(x)} = x\, g(x),$$

де g — теж гладка функція причому $g(0) = f'(0)$. $\square$

Більш загально,

$$f(x+y) = f(x)+y \underbrace{\int_0^1 f'(x+sy)ds}_{g(x,y)} = f(x)+y\cdot g(x,y), \tag{2.1}$$

де g — також гладка функція, причому $g(x,0) = f'(x)$.

Зокрема, якщо f має обернену функцію f^{-1}, то

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)+y) = f(f^{-1}(x)) + y\cdot g(f^{-1}(x), y) = \\ = x + y\cdot g(f^{-1}(x), y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Доведення теореми 1.6

Ми встановимо більш загальне твердження ніж теорема 1.6. Спочатку сформулюємо декілька означень.

3.1. **Гладкі зсуви уздовж орбіт векторних полів.** Нехай G — гладке векторне поле, визначене на многовиді M і дотичне до ∂M Позначимо через

$$\mathbf{G} : M\times\mathbb{R} \supset \mathcal{U}_{\mathbf{G}} \to M$$

— локальний потік, породжений G, де $\mathcal{U}_{\mathbf{G}}$ — відкритий окіл множини $M\times 0$ в $M\times\mathbb{R}$. Для кожної відкритої множини $V\subset M$ нехай

$$\mathcal{E}(G,V) \;\subset\; C^{\infty}(V,M)$$

— множина всіх гладких відображень $h : V \to M$, що задовольняють наступним умовам:

(1) $h(\omega \cap V) \subset \omega$ для кожної орбіти ω поля G, зокрема відображення h є нерухомим на множині особливих точок, що містяться в V;

(2) h є локальним дифеоморфізмом в кожній особливій точці поля G.

Нехай $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G,V)$ — підмножина в $\mathcal{E}(G,V)$, що складається з відображень h, які гомотопні в $\mathcal{E}(G,V)$ тотожному відображенню id_V.

Якщо $V = M$, то множини $\mathcal{E}(G,M)$ та $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G,M)$ позначатимемо відповідно через $\mathcal{E}(G)$ та $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Нехай $O \in V$ — особлива точка G. Тоді $h(O) = O$ для кожного $h \in \mathcal{E}(G,V)$. Позначимо через $\mathcal{E}_{\infty}(G,V,O)$ підмножину в $\mathcal{E}(G,V)$, що складається з відображень h, які є ∞-*близькими* до тотожного відображення в точці O, тобто ∞-джети h та id_V в точці O співпадають.

Теорема 3.2. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O і V — достатньо малий окіл точки O. Тоді для кожного $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G,V)$ знайдеться окіл $\mathcal{U}_f$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$ відносно C^p_W-топології і ручно-неперервне відображення*

$$\sigma_V \ : \ \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G,V) \supset \mathcal{U}_f \ \longrightarrow \ C^{\infty}(V)$$

такі, що

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \sigma_V(h)(z))$$

для кожного $h \in \mathcal{U}_f$.

Крім того, якщо $\deg g \geq 3$, то відображення σ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G,V)$.

Доведення базується на наступних двох твердженнях. Перше з них отримане в [5]:

Твердження 3.3. [5] *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O і $U \subset V$ — два достатньо малих околи точки O. Тоді для кожного $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ знайдеться окіл $\mathcal{U}_f$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ відносно C^p_W-топології і ручно-неперервне відображення*

$$\Lambda : \mathcal{U}_f \to C^\infty(V)$$

такі, що для кожного $h \in \mathcal{U}_f$

$$\operatorname{supp} \Lambda(h) \subset U,$$

а відображення $\hat{h} : V \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(h(z), -\Lambda(h)(z)),$$

є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O. Зокрема, $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$.

Крім того, якщо $\deg g \geq 3$, то відображення Λ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Друге твердження буде доведене в §7. Для кожної відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^2$ такої, що $O \in V$, позначимо через $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ простір гладких функцій $V \to \mathbb{R}$, що є плоскими в точці O.

Твердження 3.4. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O, і V — достатньо малий відкритий окіл точки O. Тоді існує єдине відображення*

$$\Psi : \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \to \mathrm{Flat}(V, O)$$

таке, що

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(z, \Psi(\hat{h})(z)) \tag{3.1}$$

для кожного $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$. Відображення Ψ є $C^{3r+p,r}_{W,W}$-неперервним для кожного $r \geq 0$.

Тепер можемо довести теорему 3.2. Спочатку відмітимо, що для гладкої функції $\alpha : V \to \mathbb{R}$ та відображення

$$h : V \to \mathbb{R}^2$$

наступні умови еквівалентні:

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \alpha(z)) \qquad \text{та} \qquad z = \mathbf{G}(h(z), -\alpha(z)). \tag{3.2}$$

Нехай $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$. Тоді за твердженням 3.3 існує C^p_W-окіл $\mathcal{U}_f$ відображення f в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ та відображення

$$H : \mathcal{U}_f \to \mathcal{E}_\infty(G, V, O), \qquad H(h)(z) = \mathbf{G}(h(z), -\Lambda(h)(z)).$$

Розглянемо відображення $\sigma : \mathcal{U}_f \to C^\infty(V)$, визначене за наступною формулою

$$\sigma = \Lambda + \Psi \circ H.$$

Тоді σ задовольняє твердження теореми.

Дійсно, нехай $h \in \mathcal{U}_f$ і $\hat{h} = H(h)$. Тоді

$$\sigma(h) = \Lambda(h) + \Psi \circ H(h) = \Lambda(h) + \Psi(\hat{h}).$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\big(h(z), -\sigma(h)(z)\big) &= \mathbf{G}\big(h(z), -\Lambda(h)(z) - \Psi(\hat{h})(z)\big) \\ &= \mathbf{G}\Big(\underbrace{\mathbf{G}\big(h(z), -\Lambda(h)(z)\big)}_{\hat{h}}, -\Psi(\hat{h})(z) \Big) \\ &= \mathbf{G}\big(\hat{h}(z), -\Psi(\hat{h})(z)\big) \overset{(3.1)\text{ та }(3.2)}{=\!=\!=\!=\!=} z, \end{aligned}$$

а отже, згідно (3.2),

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \sigma(h)(z)).$$

Зауважимо, що коли $\deg g \geq 3$, то відображення σ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Для закінчення теореми 3.2 залишилось довести твердження 3.4. Це буде зроблено в §7.

3.5. **Параметрична версія теореми.** Відмітимо, що коли в твердженнях 3.3 та 3.4 відображення h неперервно залежить від деякого компактного параметру, то Λ, H, Ψ, а тому і σ також неперервно залежать від нього. Для Λ та H це випливає з [5], а для Ψ і σ — це випливатиме з доведення твердження 3.4. Тому має місце наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай G — векторне поле, визначене в деякому відкритому і зв'язному околі V точки $O \in \mathbb{R}^2$ і $\mathbf{G}$ — локальний потік поля G. Припустимо, що O — єдина особлива точка поля G в V, і що G має властивість $(*)$ в $O \in \mathbb{R}^2$. Нехай D — компактний простір і $H : V \times D \to \mathbb{R}^2$ — таке неперервне відображення, що для кожного $t \in D$ відображення*

$$H_t = H(\cdot, t) : V \to \mathbb{R}^2$$

належить до $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$. Тоді існує така неперервна функція

$$\sigma : V \times D \to \mathbb{R},$$

що для кожного $t \in D$ функція $\sigma_t = \sigma(\cdot, t) : V \to \mathbb{R}$ є гладкою і

$$H(x, t) = \mathbf{G}(x, \sigma(x, t)).$$

Припустимо, що D — зв'язний простір. Якщо σ_1 — інша функція зсуву для H і $\sigma(x_0, t_0) = \sigma_1(x_0, t_0)$ для деякої точки $(x_0, t_0) \in V \times D$, то σ та σ_1 співпадають скрізь на $V \times D$.

Доведення повторює аргументи теореми 25 з [4]. Деталі ми залишаємо читачеві.

4. Полярні координати

Нехай $\mathbb{H} = \{(\phi, \rho) \mid \rho \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ – верхня замкнена півплощина в $\mathbb{R}^2$ з декартовими координатами, які позначимо через (ϕ, ρ). Нехай також $\partial\mathbb{H} = \{\rho = 0\}$ — границя $\mathbb{H}$ (тобто вісь $O\phi$), а $\mathring{\mathbb{H}} = \{\rho > 0\}$ — внутрішність $\mathbb{H}$. Візьмемо іншу копію $\mathbb{R}^2$ з координатами (x, y) і розглянемо відображення

$$P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P_k(\phi, \rho) = (\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi).$$

Для $k = 1$ воно визначає так звані *полярні* координати на $\mathbb{R}^2$. Відображення P_1 будемо також позначати через P.

Очевидно, $P_k(\partial\mathbb{H}) = 0 \in \mathbb{R}^2$, а обмеження P_k на $\mathring{\mathbb{H}}$ є накриваючим відображенням $P_k : \mathring{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Відповідна група автоморфізмів ізоморфна $\mathbb{Z}$ і діє на $\mathbb{H}$ за наступним правилом

$$n \cdot (\phi, \rho) = (\phi + 2\pi n, \rho).$$

Лема 4.1. *Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p+1$ і $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Тоді існують такі єдині числа ϕ_i, $(i = 1, \dots, l)$,*

$$\phi_0 - \frac{\pi}{2} \ \le\ \phi_1 \ \le\ \dots\ \le \phi_l \ <\ \phi_0 + \frac{\pi}{2}$$

та гладка функція γ, що $\gamma(\phi) \neq 0$ для $\phi \in (\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$ і

$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \gamma(\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} (\phi - \phi_i).$$

Доведення. Відмітимо, що існує єдиний розклад многочлена g на множники наступного виду:

$$g(x, y) = \tau(x, y) \cdot \prod_{i=1}^{l} (b_i x + a_i y), \tag{4.1}$$

де

$$a_i = \cos\phi_i, \qquad b_i = \sin\phi_i,$$

для єдиних $\phi_i \in [\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$, $(i = 1, \dots, l)$ таких, що

$$\phi_i \leq \phi_{i+1},$$

а τ — однорідний многочлен степеня $p + 1 - l$ такий, що

$$\tau(x, y) > 0, \qquad \text{для } (x, y) \neq 0.$$

Тому

$$b_i x + a_i y = \sin\phi_i \cdot \rho\cos\phi + \cos\phi_i \cdot \rho\sin\phi = \rho \cdot \sin(\phi - \phi_i),$$

а отже

$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \tau(\cos\phi, \sin\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} \sin(\phi - \phi_i).$$

Відмітимо, що функція $\frac{\sin(\phi-\phi_i)}{(\phi-\phi_i)}$ є гладкою та додатною на інтервалі $(\phi_i - \pi, \phi_i + \pi)$ і $\tau(\cos\phi, \sin\phi) > 0$ для кожного ϕ. Тому

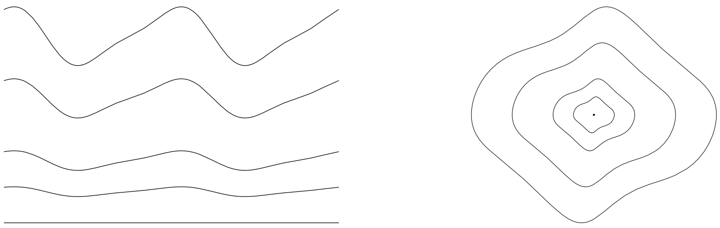
$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \gamma(\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} (\phi - \phi_i),$$

для деякої гладкої функції $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma(\phi) \neq 0$ для всіх $\phi \in (\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$. $\square$

Приклад ліній рівня однорідного многочлена $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ та відображення $g \circ P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ зображено на Рис. 4.1 для $l = 0$ та на Рис. 4.2 для $l \geq 1$.

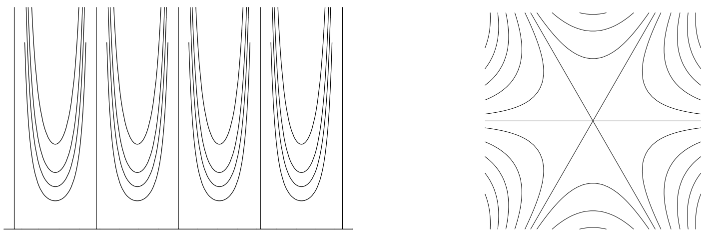
4.2. **Підняття векторних полів з $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{H}$.** Нехай G — гладке векторне поле, визначене в околі V початку координат $O \in \mathbb{R}^2$. Покладемо

$$U = P_k^{-1}(V) \subset \mathbb{H}.$$



$\mathbb{H} \xrightarrow{P_k} \mathbb{R}^2$

Рис. 4.1. $l = 0$.



$\mathbb{H} \xrightarrow{P_k} \mathbb{R}^2$

Рис. 4.2. $l \geq 1$.

Якщо $G(O) = 0$, то знайдеться єдине $\mathbb{Z}$-інваріантне векторне поле F на U, що рівне нулю на $\partial\mathbb{H}$, і таке, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccccccc} & & TU & \xrightarrow{TP_k} & TV & & \\ & & {\scriptstyle F}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle G} & & \\ \mathbb{H} & \supset & U & \xrightarrow{P_k} & V & \subset & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{4.2}$$

Відмітимо, що в загальному випадку F є гладким на $U \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}$ і лише *неперервним* на $\mathbb{H}$.

Нехай $\mathbf{F}_t$ та $\mathbf{G}_t$ — локальні потоки, породжені відповідно F та G. Тоді для кожного $t \in \mathbb{R}$ наступна діаграма є комутативною:

$$
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\mathbf{F}_t} & \mathbb{H} \\
{\scriptstyle P_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_k} \\
V & \xrightarrow{\mathbf{G}_t} & \mathbb{R}^2
\end{array}
\qquad \text{тобто} \qquad P_k \circ \mathbf{F}_t(x) = \mathbf{G}_t \circ P_k(x), \tag{4.3}
$$

за умови, що обидві частини цієї рівності визначені.

Лема 4.3. *Припустимо, що точки $a, a' \in U$ належать одній орбіті потоку $\mathbf{F}$. Тоді точки $b = P_k(a)$ та $b' = P_k(a')$ також належать одній орбіті потоку $\mathbf{G}$, див. Рис. 4.3. Крім того, час між точками a та a' відносно $\mathbf{F}$ дорівнює часу між b та b' відносно $\mathbf{G}$.*

Доведення. Дійсно, нехай $a' = \mathbf{F}_\tau(a)$. Тоді

$$b' = P_k(a') = P_k \circ \mathbf{F}_\tau(a) = \mathbf{G}_\tau \circ P_k(a) = \mathbf{G}_\tau(b).$$

Лему доведено. □

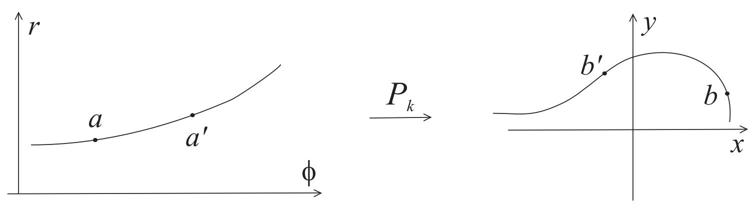


Рис. 4.3

Лема 4.4. *Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p + 1 \geq 2$, $H = (-g'_y, g'_x)$ — його гамільтонове* *векторне поле, а* $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *— гладка, ніде не рівна нулю функція. Розглянемо наступне векторне поле*

$$G = \eta H = \eta \cdot (-g'_y, g'_x)$$

і нехай $F = (F_1, F_2)$ *— векторне поле на* $\mathbb{H}$ *індуковане полем* G *за допомогою відображення*

$$P_1 = P : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(\phi, \rho) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi).$$

Запишемо g *у наступному вигляді:*

$$g(x, y) = y^a R(x, y),$$

де $a \geq 0$, *а многочлен* R *не ділиться на* y. *Тоді*

$$F_1(\phi, \rho) = \frac{(p+1) \cdot g(P(\phi, \rho))}{\rho^2} = \rho^{p-1} \phi^a \gamma_1(\phi) \tag{4.4}$$

для деякої гладкої функції $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такої, що* $\gamma_1(0) \neq 0$.

Більш того, якщо $a \geq 1$, *то*

$$F_2(\phi, \rho) = \rho^p \phi^{a-1} \gamma_2(\phi), \tag{4.5}$$

де $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— така гладка функція, що* $\gamma_2(0) \neq 0$.

Наслідок 4.5. *Якщо* g *має властивість* $(*)$, *то* $a = 0$ *або* 1. *Звідки*

$$F_1(\phi, \rho) = \rho^{p-1}\gamma_1(\phi), \quad \text{при} \ \ a = 0,$$
$$F_2(\phi, \rho) = \rho^p \gamma_2(\phi), \quad \text{при} \ \ a = 1.$$

Таким чином, в обох випадках хоча б одна з координатних функцій поля F *не ділиться на* ϕ.

Доведення леми 4.4. Зауважимо, що для однорідного многочлена g степеня $p{+}1$ виконується наступна *тотожність Ейлера*:

$$x g'_x + y g'_y = (p+1) g. \tag{4.6}$$

Крім того, з леми 4.1 випливає, що кожен множник y в g дає множник ϕ в $g \circ P$. Тому

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1} \, \phi^a \, \gamma_1(\phi), \tag{4.7}$$

для деякої гладкої функції $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma_1(0) \neq 0$.

Розглянемо матрицю Якобі відображення P:

$$J(P) = \begin{pmatrix} -\rho \sin\phi & \cos\phi \\ \rho\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}.$$

Тоді з комутативності діаграми (4.2) випливає, що

$$G \circ P = J(P) \cdot F,$$

тобто

$$\begin{pmatrix} G_1 \circ P \\ G_2 \circ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\phi & \cos\phi \\ \rho\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} \sin\phi & \frac{1}{\rho}\cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 \circ P \\ G_2 \circ P \end{pmatrix},$$

а отже

$$F_1 = \frac{-(G_1 \circ P) \cdot \sin\phi + (G_2 \circ P) \cdot \cos\phi}{\rho}.$$

Позначимо

$$A(x,y) = \frac{-yG_1 + xG_2}{x^2+y^2} = \frac{yg'_y + xg'_x}{x^2+y^2} \cdot \eta \xlongequal{(4.6)} \frac{(p+1)g}{x^2+y^2} \cdot \eta.$$

Тоді

$$F_1 = A \circ P \xlongequal{(4.7)} \rho^{p-1} \, \phi^a \, \gamma_1(\phi).$$

Аналогічно,

$$F_2 = (G_1 \circ P) \cdot \cos\phi + (G_2 \circ P) \cdot \sin\phi.$$

Покладемо

$$B(x,y) = \frac{xG_1 + yG_2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xg'_y + yg'_x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \eta. \tag{4.8}$$

Тоді $F_2 = B \circ P$. Так як чисельник останнього дробу є однорідним многочленом степеня $p+1$, то з леми 4.1 випливає, що

$$F_2 = \rho^p \, \phi^{a_1} \, \gamma_2(\phi),$$

для деякого $a_1 \geq 0$ та гладкої функції $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma_2(0) \neq 0$.

Залишається довести, що коли $a \geq 1$, то

$$a_1 = a - 1.$$

Це рівносильно тому, що чисельник

$$N = -xg'_y + yg'_x$$

останнього дробу в формулі (4.8) ділиться на y^{a-1}, але не на y^a.

Відмітимо, що

$$g'_x = y^a R'_x, \qquad g'_y = ay^{a-1}R + y^a R'_y.$$

Тоді

$$N = -xg'_y + yg'_x = -axy^{a-1}R - xy^a R'_y + y^{a+1}R'_x$$

Так як R не ділиться на y, то N ділиться на y^{a-1}, але не на y^a. $\square$

5. Відповідність між гладкими функціями

Нагадаємо, що гладка функція $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається *плоскою* на множині $K \subset \mathbb{R}^n$, якщо всі частинні похідні α дорівнюють нулю в кожній точці $x \in K$.

Позначимо через $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ множину гладких функцій $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які є плоскими в точці O, а через $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$

— множину гладких $\mathbb{Z}$-інваріантних функцій $\hat{\alpha} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, які є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Теорема 5.1. *Відображення*

$$P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P_k(\phi, \rho) = (\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi)$$

індукує бієкцію

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}), \qquad \mathbf{f}_k(\alpha) = \alpha \circ P_k,$$

яка для кожного $r \geq 0$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервною, а обернене до неї відображення $\mathbf{f}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним.

Доведення. Для кожного $r = 0, \dots, \infty$ позначимо через $\mathrm{Func}^r(\mathbb{R}^2, O)$ простір C^r-функцій $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, що $\alpha(O) = 0$. Нехай також $\mathrm{Func}^r(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ — простір $\mathbb{Z}$-інваріантних C^r-функцій

$$\hat{\alpha} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$$

таких, що $\hat{\alpha}(\partial\mathbb{H}) = 0$.

Тоді для кожної функції $\alpha \in \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O)$ функція

$$\hat{\alpha} = \alpha \circ P_k$$

є $\mathbb{Z}$-інваріантною, неперервною на $\mathbb{H}$ і рівною нулю на $\partial\mathbb{H}$, тобто $\hat{\alpha} \in \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому коректно визначено наступне відображення

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}), \qquad \mathbf{f}_k(\alpha) = \alpha \circ P_k. \tag{5.1}$$

Навпаки, кожна функція $\hat{\alpha} \in \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ індукує єдину функцію $\alpha \in \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O)$. Тому $\mathbf{f}_k$ є бієкцією.

Так як відображення P_k гладке, то

$$\mathbf{f}_k\big(\mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O)\big) \ \subset \ \mathrm{Func}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

а відповідне обмеження $\mathbf{f}_k$ на $\mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Func}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним для кожного $r = 0, \dots, \infty$. Відмітимо, що відображення $\mathbf{f}_k$ не є сюр'єктивним: наприклад, функція ρ є гладкою та $\mathbb{Z}$-інваріантною на $\mathbb{H}$, в той час як її прообраз

$$\mathbf{f}_k^{-1}(\rho) = (x^2 + y^2)^{1/2k}$$

— не є гладкою функцією в точці O.

Припустимо, що функція α є плоскою в точці O. Тоді неважко бачити, що $\hat{\alpha}$ є плоскою на всій прямій $\partial\mathbb{H}$, тобто

$$\mathbf{f}_k(\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)) \subset \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Наступна лема 5.2 стверджує, що насправді

$$\mathbf{f}_k(\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)) = \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

а обернене відображення $\mathbf{f}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним для всіх $r \geq 0$.

Лема 5.2. *Нехай* $\hat{\alpha} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, $\alpha = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})$ *і*

$$D\alpha = \frac{\partial^{a+b}\alpha}{\partial x^a \, \partial y^b} \tag{5.2}$$

— частинна похідна α *порядку* $a + b$.

(i) *Тоді* $D\alpha$ *є сумою скінченного числа функцій виду*

$$\frac{A \cdot B}{(x^2 + y^2)^{s/2k}},$$

де $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *— є гладкою функцією, що не залежить від* α,

$$B = \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{\partial^j \hat{\alpha}}{\partial\phi^{j_1}\,\partial\rho^{j_2}}\right), \qquad j = j_1 + j_2 \ \leq \ a + b,$$

а s *— таке натуральне число, що* $s/2k \leq a + b$. *Загальна кількість таких функцій залежить лише від* a *та* b *і не залежить від* α.

(ii) *функція* $D\alpha$ *є неперервною на площині* $\mathbb{R}^2$, *причому* $D\alpha(O) = 0$. *Звідси випливає, що* α *є гладкою на всій площині* $\mathbb{R}^2$ *і плоскою в точці* $O \in \mathbb{R}^2$. *Це означає, що* $\alpha \in \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$. *Тому* $\mathbf{f}_k$ *є біекцією між* $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ *та* $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$.

(iii) *Для кожного* $r \geq 0$ *та компакту* $K \subset \mathbb{R}^2$ *має місце наступна оцінка:*

$$\|\alpha\|_K^r \leq C \|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}, \tag{5.3}$$

де

$$L = P_k^{-1}(K) \cap [0, 2\pi] \times [0, \infty), \tag{5.4}$$

а $C > 0$ *не залежить від* $\hat{\alpha}$. *Тому обернене відображення* $\mathbf{f}_k^{-1}$ *є* $C_{W,W}^{(2k+1)r,r}$*-неперервним.*

Перед тим, як доводити цю лему, отримаємо декілька формул.

5.3. **Формули для відображення P_k^{-1} та його похідних.** Нехай $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, що $x^2 + y^2 = \rho^{2k}$. Для простоти можна вважати, що $x > 0$. Тоді

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2k}}, \qquad \phi = \arctan(y/x) + 2\pi n,$$

для деякого $n \in \mathbb{Z}$, а тому

$$\phi'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \phi'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
$$\rho'_x = \frac{x}{k\,(x^2 + y^2)^{1 - \frac{1}{2k}}}, \qquad \rho'_y = \frac{y}{k\,(x^2 + y^2)^{1 - \frac{1}{2k}}}.$$

Аналогічно, для кожних $a, b \geq 0$ знайдуться такі гладкі функції $\mu_i, \nu_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, a+b)$, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{a+b}\phi}{\partial x^a \partial y^b} &= \sum_{i=1}^{a+b} \frac{\mu_i}{(x^2+y^2)^{a+b}}, \\ \frac{\partial^{a+b}\rho}{\partial x^a \partial y^b} &= \sum_{i=1}^{a+b} \frac{\nu_i}{(x^2+y^2)^{a+b-\frac{1}{2k}}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ці формули, очевидно, не залежать від часткового вибору для виразу ϕ через x та y.

Доведення леми 5.2. (i) Розглянемо похідну α'_x. Нехай

$$z = (x, y) \neq O.$$

Тоді в достатньо малому околі U_z точки z можна визначити обернене відображення $P_k^{-1} : U_z \to \mathbb{H}$ так, що

$$\alpha = \hat{\alpha} \circ P_k^{-1}.$$

Тому

$$\alpha'_x = (\hat{\alpha}'_\phi \circ P_k^{-1}) \cdot \phi'_x + (\hat{\alpha}'_\rho \circ P_k^{-1}) \cdot \rho'_x.$$

Відмітимо, що кожна частинна похідна функції

$$\hat{\alpha} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

також належить до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому з формули (5.1) випливає, що ця похідна визначає єдину неперервну функцію на U_z. Звідси отримуємо шукане представлення:

$$\begin{aligned} \alpha'_x = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\phi) \cdot \phi'_x + \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\rho) \cdot \rho'_x = \\ = \frac{-y \cdot \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\phi)}{x^2+y^2} + \frac{x \cdot \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\rho)}{k(x^2+y^2)^{1-\frac{1}{2k}}}. \end{aligned}$$

Доведення для інших похідних функції α аналогічне.

(ii) Покажемо неперервність $D\alpha$. Позначимо

$$D^j\hat{\alpha} = \frac{\partial^j \hat{\alpha}}{\partial\phi^{j_1}\,\partial\rho^{j_2}}.$$

Так як $D^j\hat{\alpha}$ є плоскою на $\partial\mathbb{H}$, то знайдеться така гладка функція $\xi \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, що $D^j\hat{\alpha} = \rho^s\xi$. Тому

$$B = \mathbf{f}_k^{-1}(D^j\hat{\alpha}) = \mathbf{f}_k^{-1}(\rho^s)\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi) = (x^2+y^2)^{s/2k}\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi),$$

а отже функція

$$\frac{AB}{(x^2+y^2)^{s/2k}} = A\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi) \tag{5.6}$$

є неперервною. Тоді неперервною буде і похідна $D\alpha$. Відмітимо, що $\xi(\phi, 0) = 0$. Тому $\mathbf{f}_k^{-1}(\xi_i)(O) = 0$, а отже,

$$D\alpha(O) = 0.$$

(iii) Нехай $\alpha = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})$. Потрібно оцінити $\|\alpha\|_K^r$. Помітимо, що підмножина $L \subset \mathbb{H}$, визначена за формулою (5.4), є компактною і $P(L) = K$. Тому

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})\|_K^0 \;=\; \|\alpha\|_K^0 \;=\; \sup_{x\in K}|\alpha(x)| \;=& \\ =\; \sup_{(\phi,\rho)\in L}|\hat{\alpha}(\phi,\rho)| \;=\; \|\hat{\alpha}\|_L^0.& \end{aligned} \tag{5.7}$$

З (ii) та (5.6) випливає, що кожну частинну похідну $D\alpha$ функції α порядку r можна представити у вигляді

$$D\alpha = \sum_i A_i \cdot \mathbf{f}^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right),$$

де кожна A_i є гладкою на всій площині $\mathbb{R}^2$, $D^{j_i}\hat{\alpha}$ є частинною похідною функції $\hat{\alpha}$ порядку $j_i \le r$, а $s_i \le 2kr$.

Неважко бачити, що для кожного i знайдуться константи C_1, C_2, $C_3 > 0$, які не залежать від $\hat{\alpha}$, і такі, що

$$\text{(5.8)} \quad \left\| \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right)\right\|_K^0 \overset{(5.7)}{=\!=} \left\|\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right\|_L^0 \overset{\text{(лема 2.3)}}{\leq}$$

$$\leq \; C_1 \left\|D^{j_i}\hat{\alpha}\right\|_L^{s_i} \overset{\text{(лема 2.2)}}{\leq} C_2 \left\|\hat{\alpha}\right\|_L^{s_i+j_i} \overset{(5.5)}{\leq} C_3 \left\|\hat{\alpha}\right\|_L^{(2k+1)r}.$$

Тому існує таке $C_4 > 0$, що

$$\|D\alpha\|_K^0 \;\leq\; \sum_i \left\| A_i \cdot \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{k_i}}\right)\right\|_K^0 \;\leq\; C_4 \left\|\hat{\alpha}\right\|_L^{(2k+1)r}.$$

Таким чином $\|\alpha\|_K^r \leq C\|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}$ для деякого $C > 0$, що залежить від K та r і не залежить від $\hat{\alpha}$. $\square$

Теорему 5.1 доведено.

6. Відповідність між гладкими відображеннями, що є ∞-близькими до тотожного

Позначимо через $\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}^{\infty}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ множину всіх гладких відображень

$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

що задовольняють наступним умовам:

(i) $\hat{h}$ є $\mathbb{Z}$-еквіваріантним, тобто

$$\text{(6.1)} \quad \hat{h}_1(\phi+2\pi, \rho) = \hat{h}_1(\phi, \rho)+2\pi, \qquad \hat{h}_2(\phi+2\pi, \rho) = \hat{h}_2(\phi, \rho).$$

(ii) $\hat{h}$ є нерухомим на $\partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}(\mathring{\mathbb{H}}) \subset \mathring{\mathbb{H}}$;

(iii) h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$, тобто наступні функції

$$\hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi, \qquad \hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho$$

є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Позначимо через $\mathrm{Map}^{\infty}(\mathbb{R}^2, O)$ множину гладких відображень $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таких, що $h^{-1}(O) = O$ і h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в початку координат O.

Лема 6.1. *Нехай $\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — відображення. Позначимо*

$$\hat{\alpha}(\phi, \rho) = \hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi, \qquad \hat{\beta}(\phi, \rho) = \hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho.$$

Тоді $\hat{h}$ є $\mathbb{Z}$-еквіваріантним тоді і лише тоді, коли функції $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$ є $\mathbb{Z}$-інваріантними.

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{\alpha}(\phi, \rho) &= \hat{h}_1(\phi + 2\pi, \rho) - \phi - 2\pi - (\hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi) \\
&= \hat{h}_1(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{h}_1(\phi, \rho) - 2\pi, \\
\hat{\beta}(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{\beta}(\phi, \rho) &= \hat{h}_2(\phi + 2\pi, \rho) - \rho - (\hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho) \\
&= \hat{h}_2(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{h}_2(\phi, \rho).
\end{aligned}$$

Тепер наше твердження випливає з цих тотожностей та формули (6.1). □

Теорема 6.2. *Відображення P_k індукує бієкцію*

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^{\infty}(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^{\infty}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

яка для кожного $r \geq 0$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервною, а обернена до неї, $\mathbf{m}_k^{-1}$, є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервною.

Доведення. Позначимо через $\mathrm{Map}^{0}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ множину всіх неперервних $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень $\hat{h} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, які є нерухомими на $\partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}(\mathring{\mathbb{H}}) \subset \mathring{\mathbb{H}}$.

Нехай також $\mathrm{Map}^{0}(\mathbb{R}^2, O)$ — множина таких неперервних відображень $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що $h^{-1}(O) = O$.

Тоді кожне $\hat{h} \in \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ індукує таке єдине відображення $h \in \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O)$, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathbb{H} \\ {\scriptstyle P_k}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_k} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

тобто $h \circ P_k = P_k \circ \hat{h}$. В координатній формі це означає, що

$$\begin{aligned} h_1(\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi) &= \hat{h}_2(\phi,\rho)^k \cdot \cos \hat{h}_1(\phi,\rho) \\ h_2(\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi) &= \hat{h}_2(\phi,\rho)^k \cdot \sin \hat{h}_1(\phi,\rho). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для кожної такої пари h та $\hat{h}$ будемо використовувати наступні позначення

$$\hat{\alpha}(\phi,\rho) = \hat{h}_1(\phi,\rho) - \phi, \qquad \hat{\beta}(\phi,\rho) = \hat{h}_2(\phi,\rho) - \rho, \tag{6.3}$$

$$\gamma(x,y) = h_1(x,y) - x, \qquad \delta(x,y) = h_2(x,y) - y. \tag{6.4}$$

Таким чином відповідність $\hat{h} \mapsto h$ є коректно визначеним відображенням

$$\mathbf{m}'_k : \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O).$$

Наша мета довести, що $\mathbf{m}'_k$ індукує біекцію

$$\mathbf{m}_k^{-1} : \mathrm{Map}^{\infty}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^{\infty}(\mathbb{R}^2, O).$$

Спочатку покажемо, що образ $\mathbf{m}'_k$ містить $\mathrm{Map}^{\infty}(\mathbb{R}^2, O)$. Дійсно, нехай $h \in \mathrm{Map}^{\infty}(\mathbb{R}^2, O)$. Так як h належить класу C^1 (в дійсності C^{∞}) та є 1-близьким (в дійсності ∞-близьким) до тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то дотичне відображення

$$T_O h : T_O\mathbb{R}^2 \to T_O\mathbb{R}^2$$

є тотожним. Тому h індукує єдине відображення $\hat{h}$, яке є нерухомим на $\partial\mathbb{H}$. Більш того, так як $h^{-1}(O) = O$, то $\hat{h}^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{H}}) = \overset{\circ}{\mathbb{H}}$. Це означає, що $\hat{h} \in \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ і $\mathbf{m}'_k(\hat{h}) = h$.

Відмітимо також, що із єдиності такого відображення $\hat{h}$ випливає, що на $\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$ визначене обернене до $\mathbf{m}'_k$ відображення

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Залишається довести наступну лему.

Лема 6.3. $\mathbf{m}_k(\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)) = \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. *Причому для кожного $r \geq 0$ відображення обмеження*

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним, а обернене до нього

$$\mathbf{m}_k^{-1} : \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$$

— $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним.

Доведення. Нехай $h \in \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$ і $\hat{h} = \mathbf{m}_k(h)$. Досить довести, що $\hat{h}$ є гладким та ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$ в околі точки $(0,0) \in \mathbb{H}$.

Так як $h(O) = O$ і h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то

$$h_1(x,y) = x + xa_1 + yb_1, \qquad h_2(x,y) = y + xa_2 + yb_2, \tag{6.5}$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$.

Тоді з (6.2) та (6.5) випливає, що

$$(h_1 \circ P_k)^2 + (h_2 \circ P_k)^2 = \hat{h}_2^2 = \rho^{2k} \cdot (1 + \omega(\phi, \rho)),$$

$$2 \cdot (h_1 \circ P_k) \cdot (h_2 \circ P_k) = \hat{h}_2^{2k} \cdot \sin 2\hat{h}_1 = \rho^{2k} \cdot (\sin 2\phi + \xi(\phi, \rho))$$

де $\omega, \xi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — гладкі функції, плоскі на $\partial\mathbb{H}$. Тоді

$$\sin 2\hat{h}_1 = \frac{\sin 2\phi + \xi}{1+\omega} = (\sin 2\phi + \xi)(1 - \omega + \omega^2 - \cdots) = \\ = \sin 2\phi + \psi,$$

де ψ є гладкою в околі точки $(0,0) \in \mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$. Тому з (2.2) випливає, що

$$\hat{h}_1 = \frac{1}{2}\ \arcsin(\sin 2\phi + \psi) \overset{(2.2)}{=\!=\!=} \phi + \psi \cdot \tau(\phi, \rho),$$

де τ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Отже $\hat{h}_1(\phi,\rho) - \phi$ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$.

Залишається довести гладкість $\hat{h}_2$ в кожній точці $(\phi_0, 0)$. Нехай $A = \cos\phi_0$, $B = \sin\phi_0$. Тоді з (6.2) та (6.5) випливає, що

$$A \cdot h_1 \circ P_k + B \cdot h_1 \circ P_k \ \overset{(6.2)}{=\!=\!=}\ \hat{h}_2^k \cdot (A\cos\hat{h}_1 + B\sin\hat{h}_1) \ = \\ = \ \hat{h}_2^k \cos(\hat{h}_1 - \phi_0).$$

$$A \cdot h_1 \circ P_k + B \cdot h_1 \circ P_k \ \overset{(6.5)}{=\!=\!=}\ \rho^k(A\cos\phi + B\sin\phi + c) \ = \\ = \ \rho^k(\cos(\phi - \phi_0) + c),$$

де $c \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Прирівнявши останні частини обох рівностей, отримаємо, що

$$\hat{h}_2(\phi,\rho) = \rho \cdot \underbrace{\sqrt[k]{\frac{\cos(\phi - \phi_0) + c}{\cos(\hat{h}_1 - \phi_0)}}}_{\eta} = \rho \cdot \eta(\phi,\rho) \tag{6.6}$$

Так як $\hat{h}_1$ є гладким, а $\hat{h}_1 - \phi$ — плоским на $\partial\mathbb{H}$, то в околі точки $(\phi_0, 0)$ функція η є гладкою, а $\eta - 1$ — плоскою.

Звідси
$$\hat{h}_2 = \rho + \hat{\beta},$$
де $\beta \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Крім того, бачимо, що $\mathbf{m}_k$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним.

Розглянемо тепер відображення $\mathbf{m}_k^{-1}$. Нехай
$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathrm{Map}^{\infty}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$
і
$$h = \mathbf{m}_k^{-1}(\hat{h}) = (h_1, h_2) \ \in \ \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O).$$

За умовою $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$ є плоскими на $\partial\mathbb{H}$ і за лемою 6.1 ці функції $\mathbb{Z}$-інваріантні. Тому $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Покажемо, що γ та δ є гладкими та плоскими в точці $O \in \mathbb{R}^2$. За теоремою 5.1 досить встановити, що $\gamma \circ P_k$ та $\delta \circ P_k$ належать до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$.

З (2.1) випливає, що знайдуться такі гладкі функції
$$\mu, \nu : \mathbb{H} \to \mathbb{R},$$
що
$$\cos\hat{h}_1 = \cos(\phi + \hat{\alpha}) = \cos\phi + \hat{\alpha}\cdot\mu(\phi, \hat{\alpha}),$$
$$\sin\hat{h}_1 = \sin(\phi + \hat{\alpha}) = \sin\phi + \hat{\alpha}\cdot\nu(\phi, \hat{\alpha}).$$
Очевидно, μ та ν є $\mathbb{Z}$-інваріантними. Відмітимо також, що
$$\hat{h}_2^k = (\rho + \hat{\beta})^k = \rho^k + \hat{\beta}_1,$$
для деяких $\hat{\beta}_1 \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому

(6.7)
$$\begin{aligned}
\gamma \circ P_k(\phi, \rho) \ &= (\rho^k + \hat{\beta}_1)(\cos\phi + \hat{\alpha}\cdot\mu(\phi, \hat{\alpha})) - \rho^k\cos\phi = \\
&= \hat{\beta}_1\cdot\cos\phi + (\rho^k + \hat{\beta}_1)\cdot\hat{\alpha}\cdot\mu(\phi, \hat{\alpha}), \\
\delta \circ P_k(\phi, \rho) \ &= \hat{\beta}_1\cdot\sin\phi + (\rho^k + \hat{\beta}_1)\cdot\hat{\alpha}\cdot\nu(\phi, \hat{\alpha}).
\end{aligned}$$

Так як $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, то $\gamma \circ P_k$, та $\delta \circ P_k$ також належать до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$.

Залишається відмітити, що $\mathbf{m}_k^{-1}$ співпадає з наступною послідовністю відображень:

$$\hat{h} \overset{(6.3)}{\longmapsto} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \overset{(6.7)}{\longmapsto} (\gamma \circ P, \delta \circ P) \overset{\mathbf{f}_k}{\mapsto} (\gamma, \delta) \overset{(6.3)}{\longmapsto} h,$$

в якій для кожного $r \geq 0$ перші дві відповідності є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервними, а третя — є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервною (за теоремою 5.1). Отже, $\mathbf{m}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним для всіх $r \geq 0$. $\square$

Теорему 6.2 доведено.

7. Доведення твердження 3.4

Нехай G — гладке векторне поле, визначене в околі V початку координат $O \in \mathbb{R}^2$. Припустимо, що G має властивість $(*)$ в точці O. Тоді можна вважати, що $G = \eta H$, де $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ скрізь відмінна від нуля гладка функція, а $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле G деякого однорідного многочлена $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ степеня $p+1 \geq 2$, який не має кратних простих множників.

Позначимо через $\mathbf{G}$ — локальний потік поля G.

Для кожного $h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$ потрібно знайти гладку функцію $\alpha : V \to \mathbb{R}$, яка є плоскою в точці O і така, що

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \alpha(z)).$$

Нехай

$$P : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(\phi, \rho) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi)$$

— відображення, що визначає полярні координати.

Покладемо $U = P^{-1}(V)$. Введемо позначення. Нехай

• $\mathrm{Flat}(V, O)$ — простір гладких функцій $V \to \mathbb{R}$, які є плоскими в точці O;

• $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H})$ — простір гладких $\mathbb{Z}$-інваріантних функцій $U \to \mathbb{R}$, що є плоскими на $\partial\mathbb{H}$;
• $\mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O)$ — простір гладких відображень

$$h : V \to \mathbb{R}^2$$

таких, що $h^{-1}(O) = O$ і h є нескінченно близьким до id_V в точці O;
• $\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ — простір гладких $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень $\hat{h} : U \to \mathbb{H}$ таких, що $\hat{h}^{-1}(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}$ є ∞-близьким до id_U в кожній точці множини $\partial\mathbb{H}$.

З теорем 5.1 та 6.2 випливає, що відображення $P_1 = P$ індукує наступні бієкції $\mathbf{f}_1$ та $\mathbf{m}_1$, які для простоти позначатимемо відповідно через $\mathbf{f}$ та $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{f} : \mathrm{Flat}(V, O) \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H}),$$

$$\mathbf{m} : \mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Нехай F — підняття векторного поля G з V на U за допомогою відображення P. Позначимо через $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})$ підмножину в $\mathcal{E}(F, U)$, що складається з відображень, які є ∞-близькими до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$. Крім того, нехай $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$ — підмножина в $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})$, що складається з $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень. Тоді матимемо наступні включення:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O) & \supset & \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \\ {\scriptstyle \mathbf{m}}\big\downarrow & & \\ \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) & \supset & \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}. \end{array}$$

Лема 7.1. $\mathbf{m}\big(\, \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \,\big) = \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$.

Доведення. Нехай

$$h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \qquad \text{і} \qquad \hat{h} = \mathbf{m}(h) \in \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Потрібно показати, що $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$, тобто, що

(i) $\hat{h}$ є дифеоморфізмом в околі кожної особливої точки $z \in \Sigma_F = \partial\mathbb{H}$ поля F;
(ii) $\hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \subset \hat{\omega}$ для кожної орбіти $\hat{\omega}$ поля F.

Перевірка (i). Так як росток h в точці $O \in \mathbb{R}^2$ є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, то за теоремою 6.2 $\hat{h}$ є ∞-близьким до тотожного відображення на $\Sigma_F = \partial\mathbb{H}$. Тому для кожної точки $z \in \partial\mathbb{H}$ дотичне відображення $T_z\hat{h} : T_z\mathbb{H} \to T_z\mathbb{H}$ є тотожним, а тому невиродженим.

Перевірка (ii). Розглянемо довільну орбіту $\hat{\omega}$ векторного поля F і нехай $\omega = P(\hat{\omega})$ — відповідна орбіта поля G. Тоді за означенням $h(\omega \cap V) \subset \omega$. Звідси випливає, що $\hat{h}(\hat{\omega} \cap U)$ міститься в деякій орбіті $\hat{\omega}_1$ поля F, такій, що $P(\hat{\omega}_1) = \omega$.

Потрібно довести, що $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$. Це випливає із структури орбіт поля G.

Дійсно, припустимо, що g є добутком визначених квадратичних форм, тобто $g(z) \neq 0$ для $z \neq 0$. Структура орбіт векторних полів F та G для цього випадку схематично зображена на Рис. 4.2. З неї випливає, що $\hat{\omega} = P^{-1}(\omega)$, а тому $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$.

Припустимо, що g має лінійні множники. Тоді множина $g^{-1}(0)$ є об'єднанням $2l$ променів $T_0, \ldots, T_{2l-1}$, що починаються в точці O, причому T_i та $T_{i+l \bmod 2l}$ для $i = 1, \ldots, l$ лежать на одній прямій, див. Рис. 4.1. Більш того, множина $P^{-1} \circ g^{-1}(O)$ є об'єднанням $\partial\mathbb{H}$ зі зліченою кількістю вертикальних півпрямих $\hat{T}_j$, $(j \in \mathbb{Z})$. Можна вважати, що $P(\hat{T}_j) = T_{j \bmod 2l}$.

Так як $h(T_i) = T_i$ для всіх $i = 1, \ldots, 2l$, а відображення $\hat{h}$ нерухоме на $\partial\mathbb{H}$, то $\hat{h}(\hat{T}_j) = \hat{T}_j$ для всіх $j \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що P індукує бієкцію між орбітами поля G, що лежать у куті між променями T_i та T_{i+1} та орбітами поля

F, що лежать в полосі між $\hat{T}_{i+2ls}$ та $\hat{T}_{i+1+2ls}$, $(s \in \mathbb{Z})$. Тому $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$.

Таким чином, $\mathbf{m}\big(\mathcal{E}_\infty(G, V, O)\big) \subset \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$.

Навпаки, нехай

$$\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$$

і

$$h = \mathbf{m}^{-1}(\hat{h}) \ \in \ \mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O).$$

Покажемо, що $h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$. Так як h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то h є локальним дифеоморфізмом в цій єдиній особливій точці поля G.

Розглянемо довільну орбіту ω поля G і нехай $\hat{\omega}$ — така орбіта поля F, що $\omega = P(\hat{\omega})$. Тоді за означенням

$$\hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \subset \hat{\omega}.$$

Так як $P \circ \hat{h} = h \circ P$, то

$$h(\omega \cap V) \ \subset \ h \circ P(\hat{\omega} \cap U) \ = \ P \circ \hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \ \subset \ P(\hat{\omega}) \ = \ \omega.$$

Таким чином $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} \subset \mathbf{m}\big(\mathcal{E}_\infty(G, V, O)\big)$. □

Залишається довести наступне твердження:

Твердження 7.2. *Припустимо, що G має властивість $(*)$ в точці O. Тоді існує єдине відображення*

$$\psi : \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H})$$

таке, що

$$\hat{h}(x) = \mathbf{F}(x, \psi(\hat{h})(x))$$

для всіх $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$. Це відображення є $C^{r+p,r}_{W,W}$-неперервним.

Наслідок 7.3. *Визначимо відображення*

$$\Psi : \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \to \mathrm{Flat}(V, O)$$

за допомогою формули: $\Psi = \mathbf{f}^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{m}$, *тобто так, щоб наступна діаграма була комутативною:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) & \supset & \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H}) \\
\mathbf{m}\Big\uparrow & & \mathbf{m}\Big\uparrow & & \Big\uparrow\mathbf{f} \\
\mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O) & \supset & \mathcal{E}_\infty(G, V, O) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Flat}(V, O)
\end{array}$$

Тоді Ψ *задовольняє твердженню 3.4.*

Доведення наслідку. Нехай $h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$,

$$\hat{h} = \mathbf{m}(h) \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}, \qquad \hat{\alpha} = \psi(\hat{h}) \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H}).$$

Тоді

$$\hat{h}(a) = \mathbf{F}(a, \hat{\alpha}(a)), \qquad \forall a \in U.$$

Покладемо

$$\alpha \; = \; \mathbf{f}^{-1}(\hat{\alpha}) \; = \; \mathbf{f}^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{m}(h) \; \in \; \mathrm{Flat}(V, O).$$

Таким чином $\hat{\alpha} = \alpha \circ P$. Спочатку потрібно довести, що

$$h(b) = \mathbf{G}(b, \alpha(b)), \qquad \forall b \in V.$$

Нехай $a \in U$ і $b \in V$ такі точки, що $b = P(a)$. Тоді

$$\begin{aligned} h(b) &= h \circ P(a) = P \circ \hat{h}(a) = P \circ \mathbf{F}(a, \hat{\alpha}(a)) = \\ &= \mathbf{G}(P(a), \hat{\alpha}(a)) = \mathbf{G}(P(a), \alpha \circ P(a)) = \mathbf{G}(b, \alpha(b)). \end{aligned}$$

Залишається перевірити неперервність Ψ.

Відмітимо, що для всіх $r \geq p$ відображення $\mathbf{m}$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним, ψ є $C^{r,r-p}_{W,W}$-неперервним, а $\mathbf{f}^{-1}$ — $C^{r-p,[(r-p)/3]}_{W,W}$-неперервним, де $[t]$ позначає цілу частину числа $t \in \mathbb{R}$. Тому Ψ є $C^{r,[(r-p)/3]}_{W,W}$-неперервним. Замінюючи r на $3r + p$ отримаємо, що Ψ є $C^{3r+p,r}_{W,W}$-неперервним. $\square$

Таким чином для закінчення доведення твердження 3.4 та теореми 3.2 залишилось довести твердження 7.2.

Зауваження 7.4. Нехай $A \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, тобто A є плоскою функцією на $\partial\mathbb{H}$. Тоді з леми Адамара випливає, що для кожного $t \in \mathbb{N}$ існує така функція $A_t \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, що $A = \rho^t A_t$.

Доведення твердження 7.2. Нехай

$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H}).$$

Так як всі орбіти F на $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ є незамкнутими, то для кожної точки $z \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}$ існує єдине число $\psi(z) \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(z, \psi(\hat{h})(z)).$$

Таким чином ми отримуємо однозначно визначену функцію зсуву $\psi : \overset{\circ}{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}$ для $\hat{h}$. З формули (1.4) випливає, що ця функція є гладкою.

Потрібно показати, що поклавши $\psi(z) = 0$ для всіх $z \in \partial\mathbb{H}$, ми зробимо функцію ψ гладкою на всій півплощині $\mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$.

Нехай $\phi_0 \in \partial\mathbb{H}$. Тоді з леми 4.1 випливає, що

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1}(\phi - \phi_0)^a \gamma(\phi),$$

де $a \geq 0$ залежить від ϕ_0, а $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така гладка функція, що $\gamma(\phi_0) \neq 0$.

Так як g має властивість $(*)$, то за наслідком 4.5 маємо, що $a = 0$ або 1.

Розглянемо два випадки. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\phi_0 = 0$.

1) Припустимо, що $a = 0$, тобто

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1} \gamma(\phi),$$

в деякому околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Іншими словами, це означає, що g не ділиться на y. Тоді з формули (4.4), див. лему 4.4, випливає, що

$$F_1(\phi,\rho) = \rho^{p-1}\,\gamma_1(\phi).$$

Так як функції $\hat{h}_1 - \phi$ та $\hat{h}_2 - \rho$ є плоскими на $\partial\mathbb{H}$, то вони діляться на ρ, і ми можемо записати

$$\hat{h}_1(\phi,\rho) = \phi + A(\phi,\rho), \qquad \hat{h}_2(\phi,\rho) = \rho + \rho B(\phi,\rho),$$

де $A, B \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

Відмітимо, що векторне поле F визначає наступну автономну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = F_1(\phi,\rho) \\ \dot{\rho} = F_2(\phi,\rho). \end{cases}$$

Тоді $dt = \frac{d\phi}{F}$, а отже час $\psi(\phi,\rho)$ між точками (ϕ,ρ) та $\hat{h}(\phi,\rho)$ можна пірахувати за наступною формулою:

$$\psi(\phi,\rho) = \int\limits_{\phi}^{\hat{h}_1(\phi,\rho)} \frac{d\theta}{\rho^{p-1}\,\gamma(\theta)}.$$

Покажемо, що ψ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Досить довести, ψ має гладкі частинні похідні першого порядку, які є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Легко підрахувати, що

$$\psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{(\hat{h}_1)'_\phi}{\hat{h}_2^{p-1}\cdot\gamma(\hat{h}_1)} - \frac{1}{\rho^{p-1}\cdot\gamma}, \qquad \psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{(\hat{h}_1)'_\rho}{\hat{h}_2^{p-1}\gamma(\hat{h}_1)}.$$

Відмітимо, що

$$(\hat{h}_1)'_\phi = 1 + A'_\phi, \qquad (\hat{h}_1)'_\rho = A'_\rho.$$

Крім того,

$$\hat{h}_2^{p-1} = \rho^{p-1}(1+\bar{B}), \qquad \gamma(\hat{h}_1(\phi,\rho)) = \gamma(\phi)(1+C), \tag{7.1}$$

для деяких функцій $\bar{B}, C \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$. Тому

$$\psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{1+A'_\phi}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} - \frac{1+C}{\rho^{p-1}\gamma(\hat{h}_1)} = \\ = \frac{\overbrace{A'_\phi - \bar{B} - C - \bar{B}C}^{D}}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} = \frac{D/\rho^{p-1}}{(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)}. \tag{7.2}$$

Так як $D \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, то з леми Адамара, див. зауваження 7.4, випливає, що D/ρ^{p-1}. Тому $\psi'_\phi(\phi,\rho) \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

Аналогічно,

$$\psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{A'_\rho}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} = \frac{A'_\rho/\rho^{p-1}}{(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)}. \tag{7.3}$$

Ця функція також є гладкою, тому що $A'_\rho \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

2) Припустимо тепер, що $a = 1$, тобто $g = yR$, де

$$R(x,0) \neq 0.$$

Тоді з леми 4.4 випливає, що

$$F_2(\phi,\rho) = \rho^p\,\gamma_2(\phi).$$

Так як $F_1(0,\rho) = 0$, то піввісь $\{\phi = 0, \rho > 0\}$ є орбітою поля F. Тому вона є інваріантною відносно $\hat{h}$, тобто $\hat{h}_1(0,\rho) = 0$. Тоді, за лемою Адамара, маємо, що

$$\hat{h}_1(\phi,\rho) = \phi + \phi A(\phi,\rho), \qquad \hat{h}_2(\phi,\rho) = \rho + \rho B(\phi,\rho)$$

для деяких гладких функцій $A, B \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$. Тому

$$\psi(\phi,\rho) = \int\limits_{\rho}^{\hat{h}_2(\phi,\rho)} \frac{d\rho}{\rho^p\,\gamma(\phi)}.$$

Тоді, як і в попередньому випадку, можна показати, що

$$\psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{B'_\phi/\rho^p}{(1+\hat{B})\gamma(\hat{h}_1)}, \tag{7.4}$$

і

$$\psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{E/\rho^p}{(1+\hat{B})\gamma(\hat{h}_1)}, \tag{7.5}$$

де, як і в (7.1) функції $\hat{B}, C, E$ визначаються за наступними формулами:

$$\hat{h}_2^p = \rho^p(1+\hat{B}), \qquad \gamma(\hat{h}_1(\phi,\rho)) = \gamma(\phi)(1+C),$$

$$E = B'_\rho - \hat{B} - C - \hat{B}C$$

і належать до $\mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$. Отже $\psi \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

Залишається довести неперервність відповідності

$$\hat{h} \mapsto \psi.$$

Зауважимо, що вирази для ψ'_ϕ та ψ'_ρ включають в себе ділення на ρ^p та оператори $\partial/\partial\phi$ і $\partial/\partial\rho$. За лемами 2.2 та 2.3 ділення на ρ та диференціювання по ϕ та ρ є $C^{r+1,r}_{W,W}$-неперервними операціями.

З формул (7.2), (7.3), (7.4) та (7.5) випливає, що знайдеться $d > 0$ та замкнена куля $K \subset V$, що містить $O \in \mathbb{R}^2$, такі, що абсолютне значення знаменників в цих виразах більше ніж $2d$ в кожній точці множини K. Позначимо

$$L = P^{-1}(K) \ \cap \ [0, 2\pi] \times [0, \infty).$$

Тоді з виразів для ψ'_ϕ та ψ'_ρ, а також з лем 2.2 та 2.3 слідує, що для будь-яких $r \geq 0$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta \in (0, d)$, що має місце наступна імплікація:

$$\|\hat{h} - q\|^{r+p+1}_K < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\psi(\hat{h}) - \psi(q)\|^{r+1}_L < \varepsilon.$$

Тому відповідність $\hat{h} \mapsto \psi$ є $C^{r+p,r}_{W,W}$-неперервним відображенням для всіх $r \geq 0$. Деталі залишаємо читачеві.

Я щиро вдячний В. В. Шарко, Є. Полуляху, О. Пришляку, І. Власенко та І. Юрчук за інтерес до роботи та корисні обговорення.

Література

[1] М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности.* — Москва, Мир, 1977.

[2] М. Хирш *Дифференциальная топология.* — Москва, Мир, 1979.

[3] S. Maksymenko, *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces*, Ann. Glob. Anal. Geom., 29 no. 3, (2006), 241-285, `http://xxx.lanl.gov/math.GT/0310067`

[4] S. Maksymenko, *Smooth shifts along trajectories of flows*, Topol. Appl., 130 (2003), 183-204, `http://xxx.lanl.gov/math.GT/0106199`

[5] S. Maksymenko, ∞*-jets of difeomorphisms preserving orbits of vector fields*, preprint

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 309-422

Е. А. Полулях

Институт математики НАН Украины, Киев,
Терещенковская, 3
E-mail: polulyah@imath.kiev.ua

О проекциях на одометры динамических систем с компактным фазовым пространством

Введение

Важную роль в исследовании обратимых динамических систем (д. с.) с дискретным временем (каскадов) играет информация о том

— на какие минимальные динамические системы существует проекция данной динамической системы (X, f);
— как устроены эти проекции;
— как взаимосвязаны различные проекции д. с. (X, f) на минимальные д. с.; в частности, существует ли для двух проекций $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$ динамических систем, такой что $h_2 = \psi \circ h_1$.

Получить ответы на такие вопросы в общем случае — весьма нетривиальная задача. Чтобы приблизиться к ее решению, современные исследователи рассматривают проекции данной д. с. не на все минимальные д. с., а на некоторые "простые" классы таких д. с. (дистальные и равностепенно-непрерывные минимальные д. с., минимальные д. с., допускающие единственную инвариантную эргодическую меру, и т. д.).

Пусть рассматривается семейство $\mathfrak{A}$ минимальных динамических систем и исследуются свойства проекций д. с. (X, f) на элементы этого семейства. В некоторых случаях элементы класса всех проекций д. с. (X, f) на д. с. из $\mathfrak{A}$ удается упорядочить в следующем смысле.

Пусть $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ — проекции. Скажем, что $h_1 \sim h_2$, если существует изоморфизм динамических систем $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такой что $h_2 = \psi \circ h_1$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ фактор-семейство всех проекций из (X, f) на элементы класса $\mathfrak{A}$ по этому отношению эквивалентности. Введем на $\mathfrak{B}$ бинарное отношение $\preceq$. Пусть B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$. Скажем, что $B_1 \preceq B_2$, если найдутся представители $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ класса B_1 и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ класса B_2, а также морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такие что $h_2 = \psi \circ h_1$. Без труда проверяется, что отношение $\preceq$ определено корректно (т. е. не зависит от выбора представителей из B_1 и B_2).

Важно знать, является ли отношение $\preceq$ на классе $\mathfrak{B}$ отношением частичного порядка.[1] В случае положительного ответа на этот вопрос возникает задача описать свойства класса $\mathfrak{B}$ с частичным порядком $\preceq$, в частности указать классы всех его максимальных и минимальных элементов и найти наибольший и наименьший элементы (если они существуют).

[1]Несложно проверить, что если отношение $\preceq$ не является отношением порядка на $\mathfrak{B}$, то для некоторой д. с. (Y, g) из $\mathfrak{A}$ существует морфизм $\alpha : (Y, g) \to (Y, g)$ такой, что отображение $\alpha : Y \to Y$ не является инъективным. Вопрос о существовании таких минимальных динамических систем интересен сам по себе.

В предлагаемой работе рассматривается класс $\mathcal{A}$ всех одометров (групповых вращений над адическими группами). Известно, что этот класс совпадает с классом всех минимальных дистальных динамических систем, фазовое пространство которых гомеоморфно множеству Кантора или конечно. Известно также, что элементы класса $\mathcal{A}$ классифицируются (с точностью до топологической сопряженности) при помощи решетки так называемых супернатуральных чисел $(\Sigma, \leq)$.

Мы рассматриваем динамические системы (X, f) с Хаусдорфовым компактным фазовым пространством и их проекции на элементы класса $\mathcal{A}$ (отметим, что всегда существует тривиальная проекция $(X, f) \to (\{pt\}, Id)$ на динамическую систему, фазовое пространство которой состоит из одной точки).

Оказывается, существование нетривиальных проекций д. с. (X, f) на элементы семейства $\mathcal{A}$ связано с существованием так называемых периодических разбиений д. с. (X, f) (конечных замкнутых разбиений пространства X, элементы которых циклически переставляются под действием отображения $f : X \to X$).

Пусть $\mathcal{P}(X, f) \subseteq \mathbb{N}$ — множество мощностей всех периодических разбиений д. с. (X, f). Тогда $\mathcal{P}(X, f)$ — топологический инвариант д. с. (X, f) и существование нетривиальных проекций д. с. (X, f) на элементы семейства $\mathcal{A}$ эквивалентно неравенству $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$.

Обозначим через $\mathcal{A}(X, f)$ класс всех элементов $\mathcal{A}$, на которые существуют проекции динамической системы (X, f). Пусть $\Sigma(X, f)$ — подмножество множества супернатуральных чисел, соответствующее классу $\mathcal{A}(X, f)$. Пусть еще

$\mathfrak{B}(X,f)$ — семейство всех проекций д. с. (X,f) на элементы класса $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}'(X,f)$ — фактор-класс класса $\mathfrak{B}(X,f)$ по отношению $\sim$ (см. выше).

К основным результатам, полученным в данной работе, можно отнести следующие утверждения.

Пусть (X,f) — динамическая система с компактным Хаусдорфовым фазовым пространством и $\mathcal{P}(X,f) \neq \{1\}$. Тогда

- бинарное отношение $\preceq$ на классе $\mathfrak{B}'(X,f)$ является отношением частичного порядка;
- существует сюрьективное отображение $\Lambda_0 : (\mathfrak{B}'(X,f), \preceq) \to (\Sigma(X,f), \leq)$, сохраняющее отношение порядка и такое, что класс всех максимальных элементов из $(\mathfrak{B}'(X,f), \preceq)$ совпадает с полным прообразом наибольшего элемента множества $(\Sigma(X,f), \leq)$;
- упорядоченный класс $(\mathfrak{B}'(X,f), \preceq)$ изоморфен упорядоченному множеству $(\Sigma(X,f), \leq)$ тогда и только тогда, когда д. с. (X,f) неразложима (то есть пространство X нельзя представить в виде несвязной суммы двух собственных замкнутых инвариантных подмножеств).

Для того, чтобы получить эти результаты, автор подробно исследует свойства периодических разбиений, одометров и супернатуральных чисел.

В последнем разделе из основных результатов извлекаются следствия, относящиеся к так называемым почти взаимно-однозначным расширениям одометров, классу динамических систем, который интенсивно исследуется в последнее время.

В заключение автор хотел бы поблагодарить А. М. Шарковского за обсуждение результатов на семинаре отдела динамических систем Института математики НАН Украины, а также И. Ю. Власенко, С. Ф. Коляду, В. В. Любашенко, С. И. Максименко, М. А. Панкова, А. А. Пришляка, В. В. Сергейчука и В. В. Шарко за обсуждение результатов на семинарах и ряд ценных замечаний. Отдельную благодарность хотелось бы выразить С. Ф. Коляде за то, что он ознакомил автора с современными работами, в которых исследуются расширения одометров.

Предварительные сведения

Фактор-пространства и фактор-отображения. Фиксируем некоторое множество A.

Определение 0.1. Разбиением *множества A называется семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ непустых подмножеств множества A, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$;
2) $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ *при* $\alpha,\ \beta \in \Lambda,\ \alpha \neq \beta$.

Определение 0.2. *Разбиение $\{\widetilde{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Sigma}$ множества A называется* измельчением *разбиения $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, если для каждого $\gamma \in \Sigma$ найдется такое $\alpha \in \Lambda$, что $\widetilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$.*

Замечание 0.1. *Пусть разбиение $\{\widetilde{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Sigma}$ является измельчением разбиения $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ множества A. Из свойства 2) определения 0.1 легко следует, что для любых $\alpha \in \Lambda$ и $\gamma \in \Sigma$ либо $\widetilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$, либо $\widetilde{A}_\gamma \cap A_\alpha = \varnothing$.*

Замечание 0.2. *Существует биективное соответствие между разбиениями множества A и отношениями эквивалентности на A:*

1) *любому разбиению $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ можно поставить в соответствие отношение эквивалентности ρ при*

помощи соотношения

$$(a_1 \ \rho \ a_2) \Longleftrightarrow (\exists \, \alpha \in \Lambda \ : a_1, a_2 \in A_\alpha) \ ;$$

2) *обратно, каждому отношению эквивалентности σ на множестве A соответствует разбиение на классы эквивалентности.*

Пусть A — множество, $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — его разбиение.

Определение 0.3. *Множество $A/\mathfrak{A}$, элементами которого являются элементы разбиения $\mathfrak{A}$, называется* фактор-множеством *множества A по разбиению $\mathfrak{A}$.*

Отображение $pr : A \to \mathfrak{A}$, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ элемент $A_\alpha \in A/\mathfrak{A}$, такой что $a \in A_\alpha$, называется отображением проекции.

Эквивалентно, можно определить фактор-множество A/ρ по отношению эквивалентности ρ (см. замечание 0.2).

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — его разбиение.

Зададим на множестве $X/\mathfrak{H}$ топологию по следующему правилу: скажем, что подмножество $B \subseteq X/\mathfrak{H}$ открыто тогда и только тогда, когда его полный прообраз $pr^{-1}(B)$ открыт в X. Эта топология называется *фактор-топологией* и является самой слабой топологией на пространстве X, в которой отображение $pr : X \to X/\mathfrak{H}$ непрерывно.

Пусть X и Y — топологические пространства, $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, $\mathfrak{T}$ — разбиение пространства Y. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, которое переводит элементы разбиения $\mathfrak{H}$ в элементы разбиения $\mathfrak{T}$. Тогда определено непрерывное *фактор-отображение*

$\operatorname{fact} f : X/\mathfrak{H} \to Y/\mathfrak{T}$, такое что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle pr_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_Y} \\ X/\mathfrak{H} & \xrightarrow[\operatorname{fact} f]{} & Y/\mathfrak{T} \end{array}$$

Пусть снова $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X в пространство Y. Обозначим через $\operatorname{zer} f$ разбиение пространства X, элементами которого являются полные прообразы точек пространства Y под действием отображения f. Пусть еще $\mathfrak{T}$ — разбиение пространства Y, каждый элемент которого состоит ровно из одной точки. Ясно, что $pr_Y = Id : Y \to Y/\mathfrak{T}$ — суть тождественное отображение.

Определение 0.4. *Отображение* $\operatorname{fact} f : X/\operatorname{zer} f \to Y$, *для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle pr_X}\downarrow & & \| \\ X/\operatorname{zer} f & \xrightarrow[\operatorname{fact} f]{} & Y \end{array}$$

называется взаимно-однозначным фактором *отображения f.*

Инъективность взаимно-однозначного фактора проверяется непосредственно.

Определение 0.5. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется* факторным, *если $f(X) = Y$ и взаимно-однозначный фактор* $\operatorname{fact} f : X/\operatorname{zer} f \to Y$ *является гомеоморфизмом.*

Предложение 0.1 (см. [1]). *Пусть для непрерывного отображения $f : X \to Y$ выполняются следующие условия:*

(1) $f(X) = Y$;
(2) *отображение f открыто (замкнуто).*

Тогда f — факторное отображение.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 0.1. *Пусть X, Y_1, Y_2 — топологические пространства, $\varphi_1 : X \to Y_1$ и $\varphi_2 : X \to Y_2$ — непрерывные отображения.*

Если отображение φ_1 факторно, то следующие условия эквивалентны:

(1) *разбиение $\operatorname{zer} \varphi_1$ пространства X является измельчением разбиения $\operatorname{zer} \varphi_2$;*
(2) *существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.*

Доказательство. 1. Пусть разбиение $\operatorname{zer} \varphi_1$ является измельчением разбиения $\operatorname{zer} \varphi_2$. Тогда отображение φ_2 переводит элементы разбиения $\operatorname{zer} \varphi_1$ в точки пространства Y_2 и корректно определено фактор-отображение $\pi = \operatorname{fact} \varphi_2 : X/\operatorname{zer} \varphi_1 \to Y_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_2} & Y_2 \\ {\scriptstyle pr_1}\big\downarrow & & \big\| \\ X/\operatorname{zer} \varphi_1 & \xrightarrow[\pi]{} & Y_2 \end{array}$$

Пусть $\chi = \operatorname{fact}\varphi_1 : X/\operatorname{zer}\varphi_1 \to Y_1$ — взаимно-однозначный фактор отображения φ_1, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y_1 \arrow[d, equal] \\ X/\operatorname{zer}\varphi_1 \arrow[r, "\chi"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Так как отображение φ_1 факторно, то χ — гомеоморфизм пространства $X/\operatorname{zer}\varphi_1$ на Y_1.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\psi = \pi \circ \chi^{-1} : Y_1 \to Y_2 \ .$$

Имеем

$$\psi \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ pr_1 = \pi \circ pr_1 = \varphi_2 \ ,$$

что и требовалось.

2. Пусть существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Фиксируем элемент H_1 разбиения $\operatorname{zer}\varphi_1$. По определению, найдется $y_1 \in Y_1$, такое что $H_1 = \varphi_1^{-1}(y_1)$. Пусть $y_2 = \psi(y_1) \in Y_2$. Тогда $H_2 = \varphi_2^{-1}(y_2) = (\psi \circ \varphi_1)^{-1}(y_2) = \varphi_1^{-1}(\psi^{-1}(y_2)) \supseteq \varphi_1^{-1}(y_1) = H_1$. Снова по определению, H_2 — элемент разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$.

Из-за произвола в выборе элемента H_1 разбиения $\operatorname{zer}\varphi_1$ заключаем, что разбиение $\operatorname{zer}\varphi_1$ является измельчением разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$. $\square$

Категории и функторы.

Определение 0.6. *Категория $\mathcal{K}$ состоит из класса* объектов $\operatorname{Ob}\mathcal{K}$ *и класса* морфизмов $\operatorname{Mor}\mathcal{K}$*, которые связаны между собой следующими условиями:*

1) *каждой упорядоченной паре* $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *сопоставлено некоторое множество* $H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *морфизмов категории* $\mathcal{K}$*;*
2) *каждый морфизм категории* $\mathcal{K}$ *принадлежит одному и только одному из множеств* $H_{\mathcal{K}}(A, B)$*;*
3) *в классе* $\mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$ *определена частичная бинарная операция умножения: произведение* $\beta \circ \alpha$ *морфизмов* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *и* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(C, D)$ *определено тогда и только тогда, когда* $B = C$*, и в этом случае* $\beta \circ \alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, D)$*;*

   частичное умножение ассоциативно: $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ *для любых* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$*,* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(B, C)$ *и* $\gamma \in H_{\mathcal{K}}(C, D)$*;*
4) *для каждого* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *множество* $H_{\mathcal{K}}(A, A)$ *содержит* единичный морфизм 1_A*, такой что* $\beta \circ 1_A = \beta$ *и* $1_A \circ \alpha = \alpha$ *для любых морфизмов* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(B, A)$ *и* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(A, C)$*.*

Определение 0.7. *Категория* $\mathfrak{L}$ *называется* подкатегорией *категории* $\mathcal{K}$*, если*

a) $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$*;*
b) $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$*;*
c) *единичные морфизмы категории* $\mathfrak{L}$ *являются единичными морфизмами категории* $\mathcal{K}$*;*
d) *произведение* $\beta \circ \alpha$ *морфизмов* α*,* $\beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{L}$ *совпадает с произведением этих же морфизмов в категории* $\mathcal{K}$*.*

Определение 0.8. *Подкатегория* $\mathfrak{L}$ *категории* $\mathcal{K}$ *называется* полной *подкатегорией, если* $H_{\mathfrak{L}}(A, B) = H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *для любых* A*,* $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$*.*

Определение 0.9. *Морфизм* $\sigma : A \to B$ *называется* мономорфизмом *категории* $\mathcal{K}$ *(*$\sigma \in \mathrm{Mon}\,\mathcal{K}$*), если для любых* *двух морфизмов* $\alpha,\ \beta : X \to A$ *из равенства* $\sigma \circ \alpha = \sigma \circ \beta$ *следует равенство* $\alpha = \beta$.

Определение 0.10. *Морфизм* $\nu : A \to B$ *называется* эпиморфизмом *(*$\nu \in \operatorname{Ep} \mathcal{K}$*), если для любых* $\alpha,\ \beta : B \to Y$ *из равенства* $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu$ *следует равенство* $\alpha = \beta$.

Определение 0.11. *Морфизм* $\rho : A \to B$ *называется* биморфизмом *(*$\rho \in \operatorname{Bim} \mathcal{K}$*), если* $\rho \in \operatorname{Mon} \mathcal{K} \cap \operatorname{Ep} \mathcal{K}$.

Определение 0.12. *Морфизм* $\varphi : A \to B$ *называется* изоморфизмом *(*$\varphi \in \operatorname{Iso} \mathcal{K}$*), если существует такой морфизм* $\psi : B \to A$, *что* $\psi \circ \varphi = 1_A$ *и* $\varphi \circ \psi = 1_B$.

Определение 0.13. *Два объекта* $A,\ B \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ *называются* изоморфными*, если* $H_{\mathcal{K}}(A, B) \cap \operatorname{Iso} \mathcal{K} \neq \varnothing$.

Определение 0.14. *Полная подкатегория* $\mathfrak{Z}$ *категории* $\mathcal{K}$*, содержащая ровно по одному представителю из каждого класса изоморфных объектов категории* $\mathcal{K}$*, называется* скелетом *категории* $\mathcal{K}$.

Определение 0.15. *Объект* 0_r *категории* $\mathcal{K}$ *называется* правым нулем *категории* $\mathcal{K}$*, если для каждого* $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\alpha_A : A \to 0_r$.

Определение 0.16. *Объект* 0_l *называется* левым нулем *категории* $\mathcal{K}$*, если для каждого* $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\beta_A : 0_l \to A$.

Определение 0.17. Одноместным ковариантным функтором *из категории* $\mathcal{K}$ *в категорию* $\mathfrak{L}$ *называется соответствие* $F : \mathcal{K} \to \mathfrak{L}$*, удовлетворяющее условиям:*

1) $F(A) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{L}$ *для каждого* $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$;
2) $F(\alpha) \in H_{\mathfrak{L}}(F(A), F(B))$ *для каждого* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$;
3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *для любого единичного морфизма категории* $\mathcal{K}$;

4) *если* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A,B)$, $\beta \in H_{\mathcal{K}}(B,C)$, *то* $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$.

Определение 0.18. *Одноместный ковариантный функтор, взаимно-однозначно отображающий категорию* $\mathcal{K}$ *на категорию* $\mathfrak{L}$, *называется* изоморфизмом *категорий.*

Динамические системы.

Определение 0.19. Динамической системой с дискретным временем *называют пару* (X, f), *где* X *— топологическое пространство,* $f : X \to X$ *гомеоморфизм. Пространство* X *называют* фазовым пространством *этой динамической системы.*

Рассмотрим категорию $\mathcal{K}$, объектами которой являются динамические системы, а морфизмами динамических систем (X, f) и (Y, g) служат непрерывные отображения $h : X \to Y$ их фазовых пространств, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \tag{0.6}$$

В дальнейшем мы будем обозначать морфизм h объекта (X, f) в (Y, g) следующим образом:

$$h : (X, f) \to (Y, g)\,.$$

Определение 0.20. *Морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$ *называется* вложением *динамической системы* (X, f) *в* (Y, g), *если отображение* h *инъективно. В этом случае* (X, f) *называется* подсистемой *динамической системы* (Y, g).

Определение 0.21. *Морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$ *называется* проекцией, *если* $h(X) = Y$.

Динамическая система (Y, g) *называется* фактор-системой *динамической системы* (X, f).

Динамическая система (X, f) *называется* расширением *динамической системы* (Y, g).

Определение 0.22. *Назовём динамические системы* (X, f) *и* (Y, g) топологически сопряженными*, если существует такой морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$*, что отображение* $h : X \to Y$ *является гомеоморфизмом пространства* X *на пространство* Y.

Во всех дальнейших рассмотрениях мы ограничимся полной подкатегорией $\mathcal{K}_0$ категории $\mathcal{K}$, объектами которой являются *динамические системы с хаусдорфовыми компактными фазовыми пространствами.* Мы их будем называть динамическими системами или *потоками.*

Определение 0.23. *Пусть* (X, f) *— динамическая система (пространство* X *хаусдорфово и компактно). Подмножество* $A \subseteq X$ *называется* инвариантным множеством (X, f)*, если* $f(A) = A$.

С каждой точкой $x \in X$ фазового пространства динамической системы (X, f) принято связывать такие инвариантные множества:

– траектория точки x

$$\mathrm{Orb}_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)\,;$$

– замыкание $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ траектории точки x;
– α и ω–предельные множества точки x

$$\alpha(x) = \bigcap_{n<0} \overline{\bigcup_{k \le n} f^k(x)}\,, \quad \omega(x) = \bigcap_{n>0} \overline{\bigcup_{k \ge n} f^k(x)}\ .$$

Определение 0.24. *Точка x называется* устойчивой по Пуассону в отрицательном (положительном) направлении*, если $\alpha(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ (если $\omega(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$).*

Точка x называется устойчивой по Пуассону*, если $\alpha(x) = \omega(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$.*

Определение 0.25. *Точка x называется* рекуррентной*, если для любой окрестности U точки x найдется такое $n(U) \in \mathbb{N}$, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство*

$$U \cap \bigcup_{i=k}^{k+n(U)-1} f^i(x) \neq \varnothing \,.$$

Определение 0.26. *Точка x называется* почти периодической*, если для любой окрестности U точки x найдется такое $n(U) \in \mathbb{N}$, что*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{kn(U)}(x) \subseteq U \,.$$

Замечание 0.3. *Последнее определение ни в коем случае не является общепринятым.*

Существует другая терминология (см. [2, 12]), согласно которой точки, устойчивые по Пуассону, называются рекуррентными, а рекуррентные точки называются почти периодическими.

Определение 0.27. *Назовем непустое замкнутое инвариантное множество $A \subseteq X$* минимальным множеством *динамической системы (X, f), если A не содержит собственных замкнутых инвариантных подмножеств этой динамической системы.*

Несложно видеть, что для объекта (X, f) категории $\mathcal{K}_0$ минимальное множество A характеризуется тем, что $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = A$ для каждого $x \in A$.

В дальнейшем нам будет необходим следующий результат (см. [2, 4, 12])

Теорема 0.1 (Birkhoff). *Каждый объект* (X, f) *категории* $\mathcal{K}_0$ *обладает следующими свойствами:*

- *для каждого* $x \in X$ *множества* $\alpha(x)$ *и* $\omega(x)$ *содержат некоторые минимальные подмножества динамической системы* (X, f)*;*
- *для любой рекуррентной точки* $x \in X$ *множество* $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ *минимально;*
- *каждая точка* $x \in A$ *произвольного минимального множества* A *является рекуррентной.*

Определение 0.28. *Динамическая система* (X, f) *называется* минимальной, *если ее фазовое пространство* X *является минимальным множеством.*

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 0.2. *Пусть* (X, f), (Y_1, g_1), $(Y_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_0$, $\varphi_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ *и* $\varphi_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ *— морфизмы.*

Пусть отображение $\varphi_1 : X \to Y_1$ *сюрьективно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *разбиение* $\mathrm{zer}\,\varphi_1$ *пространства* X *является измельчением разбиения* $\mathrm{zer}\,\varphi_2$*;*
(2) *существует морфизм* $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, *такой что* $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Доказательство. 1. Пусть разбиение $\mathrm{zer}\,\varphi_1$ пространства X является измельчением разбиения $\mathrm{zer}\,\varphi_2$.

Известно, что отображение компакта в Хаусдорфово пространство замкнуто (см. [1]). Известно также, что непрерывное сюръективное замкнутое отображение является факторным (см. предложение 0.1).

Итак, сюръективное отображение компактов $\varphi_1 : X \to Y_1$ является факторным и мы находимся в условиях леммы 0.1.

Следовательно, существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Проверим коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \\ \psi \big\downarrow & & \big\downarrow \psi \\ Y_2 & \xrightarrow[g_2]{} & Y_2 \end{array}$$

Пусть $y_1 \in Y_1$. Так как отображение φ_1 сюръективно по условию леммы, то найдется $x \in \varphi_1^{-1}(y_1) \subseteq X$. Тогда $g_2 \circ \psi(y_1) = g_2 \circ \psi \circ \varphi_1(x) = g_2 \circ \varphi_2(x) = \varphi_2 \circ f(x) = \psi \circ \varphi_1 \circ f(x) = \psi \circ g_1 \circ \varphi_1(x) = \psi \circ g_1(y_1)$.

Из-за произвола в выборе точки $y_1 \in Y_1$ заключаем, что $\psi \circ g_1 = g_2 \circ \psi$ и $\psi \in \operatorname{Mor} \mathcal{K}_0$.

2. Пусть существует морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такой что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Тогда $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 : X \to Y_2$ и дальнейшее доказательство в точности повторяет вторую часть доказательства леммы 0.1. $\square$

1. Периодические разбиения.

1.1. **Определение периодического разбиения.** Пусть заданы компактное хаусдорфово пространство X и гомеоморфизм $f : X \to X$.

Определение 1.1. *Конечный набор* $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ *подмножеств пространства* X *назовём* периодическим разбиением *динамической системы* (X, f) *длины* m, *если он удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *все* $W_i^{(m)}$ *— открыто-замкнутые подмножества пространства* X*;*

(ii) $W_i^{(m)} = f(W_{i-1}^{(m)})$, $i = 1, \ldots, m-1$ *и* $W_0^{(m)} = f(W_{m-1}^{(m)})$*;*

(iii) $W_i^{(m)} \cap W_j^{(m)} = \varnothing$ *при* $i \neq j$*;*

(iv) $X = \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i^{(m)}$.

Определение 1.2. *Множество всех длин всевозможных периодических разбиений динамической системы* (X, f) *назовем* множеством периодов *динамической системы* (X, f) *и обозначим* $\mathcal{P}(X, f)$.

Замечание 1.1. *Для любой динамической системы* (X, f) *множество* $\mathcal{P}(X, f)$ *не пусто. Действительно, всегда существует тривиальное периодическое разбиение* $W^{(1)} = \{W_0^{(1)} = X\}$ *динамической системы* (X, f) *длины единица, т. е.* $1 \in \mathcal{P}(X, f)$.

Замечание 1.2. *Пусть* $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (X, f) *длины* m*. Из свойств (ii) и (iii) определения 1.1 немедленно следует, что для каждого* $n \in \mathbb{Z}$

$$f^n(W_0^{(m)}) = W_i^{(m)}, \text{ если } n \equiv i \pmod{m} \text{ и}$$
$$f^n(W_0^{(m)}) \cap W_i^{(m)} = \varnothing, \text{ если } n \not\equiv i \pmod{m}.$$

Более обще:

$$f^n(W_i^{(m)}) = W_j^{(m)}, \text{ если } n \equiv j - i \pmod{m} \text{ и}$$
$$f^n(W_i^{(m)}) \cap W_j^{(m)} = \varnothing, \text{ если } n \not\equiv j - i \pmod{m}.$$

Базовые свойства множества $\mathcal{P}(X, f)$ описываются следующими двумя утверждениями

Предложение 1.1. *Пусть* $m \in \mathcal{P}(X, f)$ *и* m *делится на* $d \in \mathbb{N}$*. Тогда* $d \in \mathcal{P}(X, f)$.

Доказательство . Пусть $\{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ — периодическое разбиение длины m. Представим m в виде $m = ad$, $a \in \mathbb{N}$. Рассмотрим набор множеств

$$V_j^{(d)} = \bigcup_{k=0}^{a-1} W_{j+kd}^{(m)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\,,\\ s\equiv j \pmod d}} f^s(W_0^{(m)})\ , \quad j = 0,\ldots,d-1\ .$$

Очевидно, так определенный набор множеств $\{V_j^{(d)}\}_{j=0}^{d-1}$ удовлетворяет свойствам (i), (iii) и (iv) определения 1.1. Проверим, что он удовлетворяет свойству (ii) этого определения.

Так как $m \equiv 0 \pmod d$, то сравнения $s \equiv j \pmod d$ и $s \equiv j + tm \pmod d$ эквивалентны для всех $t \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $f^{tm}(W_s^{(m)}) = W_s^{(m)}$, $t \in \mathbb{Z}$, $s = 0,\ldots,m-1$. Поэтому

$$V_j^{(d)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\,,\\ s\equiv j \pmod d}} f^s(W_0^{(m)}) = \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\,,\\ s\equiv j \pmod d}} f^{tm+s}(W_0^{(m)}) =$$

$$= \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \bigcup_{\substack{r\in\{tm,\ldots,(t+1)m-1\}\,,\\ r\equiv j \pmod d}} f^r(W_0^{(m)}) = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Z}\,,\\ r\equiv j \pmod d}} f^r(W_0^{(m)})\ .$$

Спаведливость свойства (ii) определения 1.1 есть очевидным следствием этой цепочки равенств.

Предложение доказано. □

Предложение 1.2. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ и D — наименьшее общее кратное чисел m_1 и m_2. Тогда $D \in \mathcal{P}(X, f)$.*

Для того, чтобы доказать предложение 1.2, нам понадобятся некоторые дополнительные рассмотрения, которым будет посвящен следующий раздел.

1.2. **Основные свойства периодических разбиений.** Ясно, что для любого $m \in \mathcal{P}(X,f)$, $m > 1$, существует больше одного периодического разбиения динамической системы (X,f) длины m. Действительно, фиксировав разбиение $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ можно для произвольного $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ построить периодическое разбиение $W^{(m)}(k) = \{W_i^{(m)}(k)\}_{i=0}^{m-1}$ при помощи циклической перестановки индексов элементов разбиения $W_i^{(m)}$,

$$W_j^{(m)}(k) = W_i^{(m)} \quad \text{при } j \equiv i + k \pmod{m}\,, \qquad j = 0,\ldots,m-1\,.$$

Определение 1.3. *Пусть $m \in \mathcal{P}(X,f)$. Два периодических разбиения динамической системы (X,f) назовем* эквивалентными*, если одно разбиение может быть получено из другого при помощи циклической перестановки индексов.*

Зададимся таким вопросом: если $\mathcal{P}(X,f) \neq \{1\}$, то при каких условиях для $m \in \mathcal{P}(X,f)$ любые два периодических разбиения длины m эквивалентны?

Определение 1.4. *Динамическую систему (X,f) назовем* неразложимой*, если она удовлетворяет свойству*

(A) *Если $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и X_1, X_2 — замкнутые инвариантные подмножества динамической системы (X,f), то либо $X_1 = \varnothing$, либо $X_2 = \varnothing$.*

Замечание 1.3. *Пусть K — замкнутое инвариантное множество динамической системы (X,f), которая обладает периодическим разбиением $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ длины m.*

Для каждого $i = 0,\ldots,m-1$

$$f(W_i^{(m)} \cap K) = f(W_i^{(m)}) \cap f(K) = f(W_i^{(m)}) \cap K\,,$$

поэтому, в частности, $W_i^{(m)} \cap K \neq \varnothing$, $i = 0, \dots, m-1$, *и если* K *открыто-замкнуто в* X, *то набор множеств* $\{V_i^{(m)} = W_i^{(m)} \cap K\}_{i=0}^{m-1}$ *удовлетворяет свойствам (i) – (iii) определения 1.1.*

Предложение 1.3. *Пусть* $m \in \mathcal{P}(X, f)$, $m > 1$. *Динамическая система* (X, f) *неразложима тогда и только тогда, когда существует единственное с точностью до циклической перестановки индексов периодическое разбиение* $W^{(m)}$ *длины* m.

Доказательство. 1. Пусть $W^{(m)}$, $\widetilde{W}^{(m)}$ — два неэквивалентных периодических разбиения динамической системы (X, f) длины m.

Из свойства (iv) определения 1.1 следует, что циклической перестановкой индексов в одном из разбиений мы можем добиться того, чтобы $V_0^{(m)} = W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)} \neq \varnothing$. По нашему предположению $W_0^{(m)} \neq \widetilde{W}_0^{(m)}$. Пусть, например, $K = W_0^{(m)} \setminus \widetilde{W}_0^{(m)} \neq \varnothing$.

Обозначим $V_i^{(m)} = f^i(V_0^{(m)})$, $i = 1, \dots, m-1$. Заметим, что $V_i^{(m)} \subset W_i^{(m)}$, поэтому $V_i^{(m)} \cap W_0^{(m)} = \varnothing$ при $i = 1, \dots, m-1$. Это следует из условия (iii) определения 1.1.

С другой стороны,

$$f(V_{m-1}^{(m)}) = f^m(V_0^{(m)}) = f^m(W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)}) = \\ = f^m(W_0^{(m)}) \cap f^m(\widetilde{W}_0^{(m)}) = W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m)} .$$

Третье равенство справедливо, так как f — гомеоморфизм, предпоследнее равенство следует из условия (ii) определения 1.1.

Следовательно,

$$X_1 = \bigcup_{i=0}^{m-1} V_i^{(m)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i(V_0^{(m)})$$

— инвариантное подмножество динамической системы (X, f) (тогда и $X_2 = X \setminus X_1$ является инвариантным для этой динамичесткой системы). При этом $X_1 \neq \varnothing$ по построению и $X_2 \neq \varnothing$, так как $X_1 \cap W_0^{(m)} = V_0^{(m)}$ и $W_0^{(m)} \setminus V_0^{(m)} = K \subset X \setminus X_1$.

Из условия (i) определения 1.1 следует, что множество $V_0^{(m)}$ (а вместе с ним и все $V_i^{(m)}$) открыто-замкнутое, тогда и множества X_1, X_2 открыто-замкнуты в X.

Итак, динамическая система (X, f) не является неразложимой.

Случай $\widetilde{W}_0^{(m)} \setminus W_0^{(m)} \neq \varnothing$ рассматривается аналогично.

2. Обратно, предположим, что динамическая система (X, f) не является неразложимой. Фиксируем разбиение $X = X_1 \cup X_2$ пространства X на два собственных непересекающихся инвариантных замкнутых подмножества. Отметим, что подмножества X_1 и X_2 будут также и открыты в X.

Фиксируем кроме того периодическое разбиение $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ динамической системы (X, f) длины m.

Непустые наборы множеств $\{V_i^{(m),\,1} = W_i^{(m)} \cap X_1\}_{i=0}^{m-1}$ и $\{V_i^{(m),\,2} = W_i^{(m)} \cap X_2\}_{i=0}^{m-1}$ удовлетворяют свойствам (i) – (iii) определения 1.1 (см. замечание 1.3).

Легко видеть, что

$$X_j = X_j \cap \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i^{(m)} =$$
$$= \bigcup_{i=0}^{m-1} (W_i^{(m)} \cap X_j) = \bigcup_{i=0}^{m-1} V_i^{(m),\,j}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Так как $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $V_r^{(m),\,1} \cap V_s^{(m),\,2} = \varnothing$ для любых $r, s \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Положим

$$\widetilde{W}_i^{(m)} = V_i^{(m),\,1} \cup V_{i-1}^{(m),\,2}\,, \quad i = 1, \ldots, m-1\,,$$
$$\widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m),\,1} \cup V_{m-1}^{(m),\,2}\,.$$

Элементарная непосредственная проверка показывает, что семейство множеств $\{\widetilde{W}_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины m. При этом $W_0^{(m)} \setminus \widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m),\,1} \neq \varnothing$, $\widetilde{W}_0^{(m)} \setminus W_0^{(m)} = V_{m-1}^{(m),\,2} \neq \varnothing$.

Следовательно, набор $\{\widetilde{W}_i^{(m)}\}$ не может быть получен из набора $\{W_i^{(m)}\}$ при помощи циклической перестановки индексов. $\square$

Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$, d и D — соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел m_1 и m_2.

Рассмотрим два периодических разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ пространства X длин m_1 и m_2.

Предложение 1.4. *Пусть пересечение $W_k^1 \cap W_l^2$ не пусто для некоторых $k \in \{0, \ldots, m_1-1\}$, $l \in \{0, \ldots, m_2-1\}$.*

Тогда набор множеств $\{V_s^{(D)} = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет условиям (i) — (iii) определения 1.1.

Доказательство. В силу определения 1.1 для периодических разбиений $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ множество $V_0^{(D)} = W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}$ открыто-замкнуто в X. Так как f — гомеоморфизм, то и все $V_s^{(D)}$ открыто-замкнуты в X и набор $\{V_s^{(D)}\}$ удовлетворяет условию (i) определения 1.1.

Снова, учитывая взаимную однозначность отображения f, получим

$$(1.1)\quad f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)})\ , \quad s \in \mathbb{Z}\ ,$$

в частности,

$$\begin{aligned} f(V_{D-1}^{(D)}) &= f^D(V_0^{(D)}) = f^D(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ &= f^D(W_k^{(m_1)}) \cap f^D(W_l^{(m_2)}) = W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} = V_0^{(D)}\ , \end{aligned}$$

так как по своему определению $D \equiv 0 \pmod{m_r}$, $r = 1, 2$. Этим доказано выполнение свойства (ii) определения 1.1.

С учетом свойства (ii) определения 1.1 и равенство (1.1), для доказательства свойства (iii) нам теперь достаточно проверить, что $V_0^{(D)} \cap V_s^{(D)} = \varnothing$, $s = 1, \ldots, D-1$.

Предположим, что $V_0^{(D)} \cap f^s(V_0^{(D)}) \neq \varnothing$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Тогда, в частности,

$$W_k^{(m_1)} \cap f^s(W_k^{(m_1)}) \neq \varnothing\ , \quad W_l^{(m_2)} \cap f^s(W_l^{(m_2)}) \neq \varnothing\ ,$$

а это возможно в силу замечания 1.2 только если $s \equiv 0 \pmod{m_1}$ и $s \equiv 0 \pmod{m_2}$, то есть только тогда, когда s — общее кратное чисел m_1 и m_2. Следовательно, $V_0^{(D)} \cap V_s^{(D)} = \varnothing$ при $s = 1, \ldots, D-1$ и набор множеств $\{V_s^{(D)}\}$ удовлетворяет свойству (iii) определения 1.1. $\Box$

Обозначим

$$V_s^{(D)}(k, l) = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\ , \quad s = 0, \ldots, D-1\ ,$$

$$A(k,l) = \bigcup_{s=0}^{D-1} V_s^{(D)}(k,l)\ .$$

Из предложения 1.4 следует, что $A(k,l)$ — открыто-замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (X,f) и если множество $V_0^{(D)}(k,l)$ не пусто, то набор множеств $\{V_s^{(D)}(k,l)\}_{s=0}^{D-1}$ является периодическим разбиением динамической системы $(A(k,l), f|_{A(k,l)})$ длины D.

Замечание 1.4. *Если динамическая система (X,f) неразложима, то либо $A(k,l)=\varnothing$, либо $A(k,l)=X$ и тогда $\{V_s^{(D)}(k,l)\}_{s=0}^{D-1}$ — периодическое разбиение динамической системы (X,f) длины D и $D \in \mathcal{P}(X,f)$.*

Из свойства (iv) определения 1.1 следует, что найдутся k,l, для которых множество $A(k,l)$ не пусто. Из сказанного заключаем, что предложение 1.2 справедливо для неразложимых динамических систем.

Если динамическая система (X,f) не является неразложимой, вообще говоря, не обязательно $A(k,l) \in \{\varnothing\} \cup \{X\}$.

Определение 1.5. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X,f)$. Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ динамической системы (X,f) называются* согласованными, *если для любых $k \in \{0,\ldots,m_1-1\}$, $l \in \{0,\ldots,m_2-1\}$ либо $A(k,l)=\varnothing$, либо $A(k,l)=X$.*

Замечание 1.5. *Из предложения 1.4 легко следует, что если $m_2=m_1$, то согласованность разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ означает, что эти два разбиения эквивалентны.*

Замечание 1.6. *Непосредственным следствием определений эквивалентности и согласованности периодических разбиений является следующее утверждение.*

Пусть периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы. Тогда если периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m_2)}$ эквивалентно разбиению $W^{(m_2)}$, то периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(m_2)}$ согласованы.

Если для некоторых m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ найдутся согласованные разбиения пространства X длин m_1 и m_2, то, повторяя рассуждения из замечания 1.4, можно утверждать, что наименьшее общее кратное D чисел m_1 и m_2 лежит в $\mathcal{P}(X, f)$. Следовательно, доказательство предложения 1.2 сводится к проверке того, что для любой пары m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ существуют соответствующие согласованные периодические разбиения динамической системы (X, f).

В оставшейся части раздела мы докажем несколько более общее

Предложение 1.5. *Пусть m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$. Для любого периодического разбиения $W^{(m_1)}$ динамической системы (X, f) длины m_1 найдется согласованное с ним периодическое разбиение $W^{(m_2)}$ длины m_2.*

Следствие 1.1. *Пусть динамическая система (X, f) неразложима. Тогда любые два периодических разбиения динамической системы (X, f) согласованы.*

Для доказательства предложения 1.5 изучим некоторые свойства конструкций, описанных выше.

Из замечания 1.3 следует, что набор $\{W_i^{(m_r)} \cap A(k, l)\}_{i=0}^{m_r}$, $r = 1, 2$, является периодическим разбиением длины m_r для динамической системы $(A(k, l), f|_{A(k,l)})$.

Следующее предложение дает ответ на вопрос, как связаны периодические разбиения $\{V_s^{(D)}(k, l)\}_{s=0}^{D-1}$ и $\{W_i^{(m_r)} \cap A(k, l)\}_{i=0}^{m_r}$, $r = 1, 2$, динамической системы $(A(k, l), f|_{A(k,l)})$.

Лемма 1.1. *Пусть* $V_0^{(D)}(k,l) \neq \varnothing$, $i \in \{0,\dots,m_1-1\}$, $j \in \{0,\dots,m_2-1\}$.

Если $j-i \equiv l-k \pmod d$, *то* $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \subseteq A(k,l)$. *При этом* $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} = V_s^{(D)}(k,l)$, *где* $s \in \{0,\dots,D-1\}$ *является решением системы сравнений*

$$\begin{cases} s \equiv i-k \pmod{m_1}, \\ s \equiv j-l \pmod{m_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если $j-i \not\equiv l-k \pmod d$, *то* $(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap A(k,l) = \varnothing$.

Замечание 1.7. *Напомним, что система (1.2) совместна тогда и только тогда, когда* $j-i \equiv l-k \pmod d$ *(см. [5]).*

Доказательство леммы 1.1. **1.** Пусть $j-i \equiv l-k \pmod d$. Тогда существует единственное $(\operatorname{mod} D)$ решение s системы (1.2) (см. [5]). Следовательно,

$$\begin{aligned} A(k,l) &\supseteq V_s^{(D)}(k,l) = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ &= f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)}) = f^{i-k}(W_k^{(m_1)}) \cap f^{j-l}(W_l^{(m_2)}) = \\ &= f^{i-k} \circ f^k(W_0^{(m_1)}) \cap f^{j-l} \circ f^l(W_0^{(m_2)}) = \\ &= f^i(W_0^{(m_1)}) \cap f^j(W_0^{(m_2)}) = W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что f — гомеоморфизм и, в частности, отображения f и f^{-1} взаимно–однозначны.

2. Предположим теперь, что $(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap A(k,l) \neq \varnothing$. Тогда найдется $s \in \{0,\dots,D-1\}$, такое что

$$\begin{aligned} &(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap (f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)})) = \\ &= (W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap V_s^{(D)}(k,l) \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_i^{(m_1)} \cap f^s(W_k^{(m_1)}) \neq \varnothing \text{ и } W_j^{(m_2)} \cap f^s(W_l^{(m_2)}) \neq \varnothing\,.$$

Из замечания 1.2 теперь вытекает, что s удовлетворяет системе (1.2), и, в частности, $i-k \equiv j-l \pmod d$. $\square$

Следствие 1.2. *Пусть множества $A(k_1,l_1)$, $A(k_2,l_2)$ не пусты для некоторых $k_1,k_2 \in \{0,\ldots,m_1-1\}$ и $l_1,l_2 \in \{0,\ldots,m_2-1\}$.*

Если $k_1-k_2 \equiv l_1-l_2 \pmod d$, то $A(k_1,l_1)=A(k_2,l_2)$. В противном случае $A(k_1,l_1)\cap A(k_2,l_2)=\varnothing$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $A(k_1,l_1)$ и $A(k_2,l_2)$ — замкнутые инвариантные подмножества динамической системы (X,f).

1. Пусть $k_1-k_2 \equiv l_1-l_2 \pmod d$. Тогда $(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \subseteq A(k_2,l_2)$ согласно лемме 1.1. Следовательно,

$$A(k_1,l_1) = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \subseteq \\ \subseteq \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(A(k_2,l_2)) = A(k_2,l_2)\,.$$

Меняя ролями $A(k_1,l_1)$ и $A(k_2,l_2)$, получим обратное включение.

2. Пусть теперь $k_1-k_2 \not\equiv l_1-l_2 \pmod d$. Тогда

$$\varnothing = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \cap f^s(A(k_2,l_2)) = \\ = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \cap A(k_2,l_2) = A(k_1,l_1)\cap A(k_2,l_2)\,.$$

Следствие доказано. $\square$

Следствие 1.3. *Если выполняется равенство* $A(k,l) = X$ *для* $k \in \{0,\ldots,m_1-1\}$ *и* $l \in \{0,\ldots,m_2-1\}$, *то периодические разбиения* $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы.*

Следствие 1.4. *Если для* $k \in \{0,\ldots,m_1\}$ *и* $l \in \{0,\ldots,m_2\}$ *найдется множество* $K \subseteq W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}$, *такое что*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K) = X\ ,$$

то периодические разбиения $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы.*

Доказательство . Утверждение следствия вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K) \quad &\subseteq \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ &= \quad \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{r=0}^{D-1} f^{r+Dm}(V_0^{(D)}(k,l)) = \\ &= \quad \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{Dm}\left(\bigcup_{r=0}^{D-1} f^r(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\right) = \\ &= \quad \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{Dm}(A(k,l)) = A(k,l) \end{aligned}$$

и следствия 1.3 $\square$

Следствие 1.5. *Предположим, что* $W_k^{(m_1)} \supseteq W_l^{(m_2)}$ *для некоторых* $k \in \{0,\ldots,m_1-1\}$ *и* $l \in \{0,\ldots,m_2-1\}$

Тогда

1) *разбиения* $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы;*
2) m_1 *делит* m_2.

Доказательство . 1. Возьмем $K = W_l^{(m_2)}$. Из свойства (iv) периодических разбиений и следствия 1.4 вытекает, что периодические разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы и $A(k, l) = X$.

2. Из леммы 1.1 следует, что $W_i^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $i \equiv k \pmod{d}$.

Предположим, что $d \neq m_1$. Тогда найдется такое $\tau \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$, $\tau \neq k$, что $\tau \equiv k \pmod{d}$. Следовательно, $W_\tau^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$. С другой стороны, $W_l^{(m_2)} \subseteq W_k^{(m_1)}$ по условию и $W_k^{(m_1)} \cap W_\tau^{(m_1)} = \varnothing$ по определению 1.1.

Полученное противоречие доказывает, что $d = m_1$ и m_1 делит m_2. $\square$

Следствие 1.6. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ и m_2 делится на m_1.*

Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы тогда и только тогда, когда разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы.

Найдем $k \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$ и $l \in \{0, \ldots, m_2 - 1\}$, для которых $W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$. Тогда $A(k, l) = X$.

Так как m_1 делит m_2, то $d = m_1$.

Фиксируем $j \in \{0, \ldots, m_2 - 1\}$. Из леммы 1.1 следует, что $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $i \equiv j - l + k \pmod{m_1}$. Существует единственное $\tau \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$, такое что $\tau \equiv j - l + k \pmod{m_1}$. Так как

$$X = \bigcup_{i=0}^{m_1 - 1} W_i^{(m_1)}$$

и $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} = \varnothing$ при $i \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$, $i \neq \tau$, то $W_j^{(m_2)} \subseteq W_\tau^{(m_1)}$.

Из-за произвола в выборе $j \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ заключаем, что разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$.

2. Достаточность вытекает из следствия 1.5. □

Доказательство предложения 1.5. Пусть $W^{(m_1)}$ — периодическое разбиение длины m_1. Фиксируем периодическое разбиение $W^{(m_2)}$ длины m_2.

Рассмотрим множества

$$A(0, j) = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s \left(W_0^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \right) , \quad j = 0, \dots, m_2 - 1 .$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} W_0^{(m_1)} &= W_0^{(m_1)} \cap \bigcup_{j=0}^{m_2-1} W_j^{(m_2)} = \\ &= \bigcup_{j=0}^{m_2-1} \left(W_0^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) . \end{aligned}$$

Так как $A(0, j)$, $j = 0, \dots, m_2 - 1$, — инвариантные подмножества динамической системы (X, f), то

$$\begin{aligned} &\bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) = \bigcup_{j=0}^{m_2-1} \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i(A(0, j)) = \\ &\qquad = \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i \left(\bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) \right) \supseteq \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i(W_0^{(m_1)}) = X . \end{aligned}$$

Из следствия 1.2 нам известно, что $A(0, j) = A(0, k)$ при $j \equiv k \pmod d$ и $A(0, j) \cap A(0, k) = \varnothing$ при $j \not\equiv k \pmod d$, поэтому

$$X = \bigcup_{j=0}^{d-1} A(0, j) \ .$$

В последнем равенстве все множества $A(0, j)$ попарно не пересекаются. Некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Пусть $A_1 = A(0, k_1), \dots, A_l = A(0, k_l)$ — все непустые множества из набора $\{A(0, j)\}_{j=0}^{d-1}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} V_s^{(D)}(j) \quad &= \quad V_s^{(D)}(0, k_j) = f^s \left(W_0^{(m_1)} \cap W_{k_j}^{(m_2)} \right) \ , \\ & \qquad j = 1, \dots, l \ , \quad s = 0, \dots, D-1 \ . \end{aligned}$$

Тогда

$$X = \bigcup_{j=1}^{l} A_j = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{s=0}^{D-1} V_s^{(D)}(j) = \bigcup_{s=0}^{D-1} \left(\bigcup_{j=1}^{l} V_s^{(D)}(j) \right) \ , \tag{1.3}$$

Заметим, что $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(j) = \varnothing$, если $s \neq r$ или $i \neq j$.

Действительно, $V_s^{(D)}(i) \subset A_i$, $V_r^{(D)}(j) \subset A_j$, поэтому по построению $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(j) \subset A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Пусть теперь $i = j$. Из предложения 1.4 мы знаем, что набор множеств $\{V_s^{(D)}(i)\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii) определения 1.1. Следовательно, $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(i) = \varnothing$ при $s \neq r$.

Обозначим

$$\widetilde{W}_0^{(D)} = \bigcup_{j=1}^{l} V_0^{(D)}(j) \ ,$$

$$\widetilde{W}_s^{(D)} = f^s \left(\widetilde{W}_0^{(D)} \right) = \bigcup_{j=1}^{l} V_s^{(D)}(j) \ , \quad s = 1, \dots, D-1 \ .$$

Из сказанного выше вытекает, что $\widetilde{W}_s^{(D)} \cap \widetilde{W}_r^{(D)} = \varnothing$ при $s \neq r$, то есть набор множеств $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет условию (iii) определения 1.1. Из формулы (1.3) следует, что этот набор удовлетворяет также и свойству (iv) указанного определения.

Вспомним, что все наборы множеств $\{V_s^{(D)}(i)\}_{s=0}^{D-1}$, $i = 1, \ldots, l$, удовлетворяют свойствам (i) – (iii) определения 1.1. Из этого, во первых, следует, что все множества набора $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}$ открыто замкнуты в X; во вторых,

$$f\left(\widetilde{W}_{D-1}^{(D)}\right) = \bigcup_{j=1}^{l} f(V_{D-1}^{(D)}(j)) = \bigcup_{j=1}^{l} V_0^{(D)}(j) = \widetilde{W}_0^{(D)} .$$

Итак, набор множеств $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}_{s=0}^{D-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины D. Этим мы полностью доказали предложение 1.2.

Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(D)}$ согласованы, так как $\widetilde{W}_0^{(D)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ по построению (см. следствие 1.5).

Обозначим

$$\widetilde{W}_k^{(m_2)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,D-1\}\ , \\ s\equiv k \ (\mathrm{mod}\ m_2)}} \widetilde{W}_s^{(D)}\ , \quad k = 0, \ldots, m_2 - 1\ .$$

Простая непосредственная проверка показывает, что $\{\widetilde{W}_k^{(m_2)}\}_{k=0}^{m_2-1}$ — периодическое разбиение длины m_2 (см. доказательство предложения 1.1).

Из следствия 1.4 следует, что периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(m_2)}$ согласованы, так как $W_0^{(m_1)} \cap \widetilde{W}_0^{(m_2)} \supseteq \widetilde{W}_0^{(D)}$.

Предложение 1.5 полностью доказано. $\square$

Замечание 1.8. *Вообще говоря, если динамическая система (X, f) не является неразложимой, исходя из произвольного фиксированного разбиения $W^{(m_2)}$, можно построить больше одного периодического разбиения длины*

m_2, согласованного с заранее заданным разбиением $W^{(m_1)}$ длины m_1.

А именно, используя обозначения, введенные при доказательстве предложения 1.5, положим

$$\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l) = \bigcup_{j=1}^{l} V_{t_j}^{(D)}(j) \ ,$$

где $t_j \equiv 0 \pmod{m_1}$, $t_j \in \{0, \ldots, D-1\}$, $j = 1, \ldots, l$. Тогда, пользуясь замечанием 1.2, заключаем, что

$$\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l) \subseteq W_0^{(m_1)} \ .$$

Обозначим

(1.4)
$$\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l) = \bigcup_{\substack{s \in \{0, \ldots, D-1\} , \\ s \equiv k \pmod{m_2}}} f^s(\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l)) \ , \quad k = 0, \ldots, m_2 - 1 \ .$$

Теперь рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 1.5, можно показать, что набор $\{\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l)\}_{k=0}^{m_2-1}$ является периодическим разбиением длины m_2, согласованным с разбиением $W^{(m_1)}$.

Пусть $\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l)$, $\widetilde{W}_r^{(m_2)}(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ — два периодических разбиения вида (1.4). Заменяя их на эквивалентные, не нарушая отношение согласованности, можно добиться, чтобы $t_1 = \tau_1 = 0$ (см. замечание 1.5). Легко *видеть, что*

$$\bigcup_{s=0}^{m_2-1}\Big(\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,t_2,\dots,t_l)\cap\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,\tau_2,\dots,\tau_l)\Big)=$$

$$=A_1\cup\bigcup_{\substack{t_j=\tau_j\ ,\\ j\in\{2,\dots,l\}}}A_j\ .$$

Таким образом, согласованность периодических разбиений $\{\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,t_2,\dots,t_l)\}$ *и* $\{\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,\tau_2,\dots,\tau_l)\}$ *эквивалентна тому, что* $t_j=\tau_j$ *при всех* $j\in\{2,\dots,l\}$.

Замечание 1.9. *Очевидно, отношение согласованности двух периодических разбиений рефлексивно и симметрично. Однако предыдущее замечание показывает, что это отношение вообще говоря не транзитивно.*

1.3. **Правильные последовательности периодических разбиений.** В этом подразделе мы докажем ряд утверждений, которые связаны с исследованием вопроса о транзитивности отношения согласованности периодических разбиений и будут использоваться в дальнейших построениях.

В дальнейшем изложении нам понадобятся следующие объекты.

Определение 1.6. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i\in\mathcal{P}(X,f)\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Назовем последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X,f) правильной*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) n_k *делит* n_{k+1}, $k\in\mathbb{N}$*;*
2) *разбиения* $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ *и* $\{W_{s_{k+1}}^{(n_{k+1})}\}$ *согласованы для всех* $k\in\mathbb{N}$.

Замечание 1.10. *Используя следствие 1.6, легко видеть, что любая правильная последовательность* $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f) *удовлетворяет условию*

3) *периодические разбиения* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *и* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *согласованы для всех* $k, l \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть k, $l \in \mathbb{N}$, $k < l$. *Согласно следствию 1.6 разбиение* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}$ *пространства* X *является измельчением разбиения* $\{W^{(n_{i+1})}_{s_{i+1}}\}$ *для каждого* $i \in \mathbb{N}$. *Следовательно, разбиение* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *является измельчением разбиения* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *и, вновь используя следствие 1.6, заключаем, что разбиения* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *и* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *согласованы.*

Предложение 1.6. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющая условию 1) определения 1.6.*

Существует правильная последовательность $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f).

Доказательство. Это утверждение легко доказывается при помощи индуктивного применения предложения 1.5. □

Предложение 1.7. *Пусть задана правильная последовательность* $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f).

Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ *и* m_1 *делит* m_2.

Тогда

а) *найдется периодическое разбиение* $\{W^{(m_1)}_i\}_{i=0}^{m_1-1}$ *длины* m_1 *динамической системы* (X, f), *согласованное с каждым из разбиений* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$;

b) *для любого периодического разбиения* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *из пункта a) найдется периодическое разбиение* $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и с каждым из разбиений* $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Доказательство предложения 1.7 опирается на три леммы.

Пусть $m_1, m_2, n \in \mathcal{P}(X, f)$, причем m_1 делит m_2.

Обозначим через d_i наибольший общий делитель чисел n и m_i, $i = 1, 2$; пусть также D_i — наименьшее общее кратное чисел n и m_i, $i = 1, 2$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$, $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$, $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *— периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1*,* m_2 *и* n*, соответственно. Пусть разбиения* $\{W_k^{(n)}\}$ *и* $\{W_j^{(m_2)}\}$ *согласованы.*

Если согласованы разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_j^{(m_2)}\}$*, то согласованы и разбиения* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}$*.*

Лемма 1.3. *Пусть* $d_1 = d_2$*.*

Пусть $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *— согласованные периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1*, и* n*, соответственно.*

Тогда любое периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с разбиением* $\{W_i^{(m_1)}\}$*, согласовано также и с разбиением* $\{W_k^{(n)}\}$*.*

Лемма 1.4. *Пусть* $D_1 = D_2$*.*

Пусть $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *согласованные периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1*, и* n*, соответственно.*

Тогда найдется периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с каждым из разбиений* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}$.

Доказательство леммы 1.2. Заменяя разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ на эквивалентное, можно считать, что $W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$ (см. замечание 1.6). Тогда $W_0^{(m_2)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ (см. следствие 1.6).

Аналогично, заменяя разбиение $\{W_k^{(n)}\}$ на эквивалентное, будем считать, что $K = W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$. Из определения 1.5 следует, что

$$\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} f^t(K) = \bigcup_{t=0}^{D_2-1} f^t\left(W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)}\right) = X\ .$$

С другой стороны, $K = W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)}$, поэтому из следствия 1.4 следует, что разбиения $W_i^{(m_1)}$ и $W_k^{(n)}$ согласованы. □

Доказательство леммы 1.3. Так как $d_1 = d_2$ и d_1 делит m_1, то и d_2 делит m_1.

Пользуясь тем, что замена периодического разбиения на эквивалентное не влияет на отношение согласованности (см. замечание 1.6), можно считать, что $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$ и $W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$. Так как разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы, то $W_0^{(m_2)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ (см. следствие 1.6). Следовательно, $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$.

Обозначим

$$A = \bigcup_{s=0}^{D_2-1} f^s(W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)})\ .$$

Учитывая следствие 1.3, для доказательства леммы нам достаточно проверить равенство $A = X$.

Рассмотрим пару согласованных разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$. Из определения 1.5, леммы 1.1 и следствия 1.6 следует, что

$$W_0^{(m_1)} = W_0^{(m_1)} \cap \bigcup_{s=0}^{m_2-1} f^s \left(W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)} \right) = \\ = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\dots,m_2-1\}\ , \\ s\equiv 0 \pmod{m_1}}} W_s^{(m_2)} \ .$$

Рассмотрим теперь периодические разбиения $\{W_k^{(n)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$.

Из леммы 1.1 получим

$$W_0^{(n)} \cap A = W_0^{(n)} \cap \bigcup_{\substack{r\in\{0,\dots,m_2-1\}\ , \\ r\equiv 0 \pmod{d_2}}} W_r^{(m_2)} \ .$$

Так как d_2 делит m_1, то сравнение $r \equiv 0 \pmod{d_2}$ есть следствием сравнения $r \equiv 0 \pmod{m_1}$ и

$$W_0^{(m_1)} = \bigcup_{\substack{r\in\{0,\dots,m_2-1\}\ , \\ r\equiv 0 \pmod{m_1}}} W_r^{(m_2)} \subseteq \bigcup_{\substack{r\in\{0,\dots,m_2-1\}\ , \\ r\equiv 0 \pmod{d_2}}} W_r^{(m_2)} \ .$$

Следовательно, $W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(n)} \cap A \subset A$. Но множество A является инвариантным относительно действия гомеоморфизма f, поэтому

$$A = \bigcup_{s=0}^{D_1-1} f^s(A) \supseteq \bigcup_{s=0}^{D_1-1} f^s \left(W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \right) = X \ .$$

Последнее равенство справедливо, так как периодические разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$ согласованы. $\square$

Доказательство леммы 1.4. Учитывая замечание 1.6, можно считать, что $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$. Обозначим

$$V_s = f^s\left(W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)}\right)\ , \quad s = 0, \ldots, D_1 - 1\ .$$

Так как периодические разбиения $\{W_k^{(n)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$ согласованы и $D_2 = D_1$ по условию леммы, то

$$X = \bigcup_{s=0}^{D_1-1} V_s = \bigcup_{s=0}^{D_2-1} V_s$$

и $\{V_s\}_{s=0}^{D_2-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины D_2.

Обозначим

$$W_j^{(m_2)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,D_2-1\}\ , \\ s\equiv j \ (\mathrm{mod}\ m_2)}} V_s\ , \quad j = 0, \ldots, m_2 - 1\ .$$

Получим периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ динамической системы (X, f) длины m_2 (см. доказательство предложения 1.1).

Докажем теперь, что это периодическое разбиение согласовано с каждым из разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$.

Так как $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_2)}$ по построению, то $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)}$. Теперь из свойства (iv) определения 1.1 и из следствия 1.4 следует, что периодические разбиения $\{W_i^{(m_2)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$ согласованы.

Аналогично, по построению $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ и $V_0 \subseteq W_0^{(m_2)}$. Следовательно, $V_0 \subseteq W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)}$ и из следствия 1.4 получим, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы. $\square$

Доказательство предложения 1.7.

a) Пусть d_k^1 — наибольший общий делитель чисел n_k и m_1. Из условия 1) предложения следует, что n_{k+l} делится на d_k^1 при всех $l \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$d_1^1 \leq d_2^1 \leq \ldots \leq d_k^1 \leq \ldots .$$

С другой стороны, $d_k^1 \leq m_1$ при $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, найдется $l \in \mathbb{N}$, такое что $d_k^1 = d_l^1$ при $k \geq l$.

Пользуясь предложением 1.5, найдем периодическое разбиение $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ длины m_1, согласованное с разбиением $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$. Покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ это разбиение согласовано с разбиением $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$.

Пусть $k > l$. Тогда $d_k^1 = d_l^1$. Из замечания 1.10 следует, что разбиения $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы. Применяя лемму 1.3 к периодическим разбиениям $\{W_i^{(m_1)}\}$, $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы.

Пусть теперь $k < l$. Снова из замечания 1.10 получим, что разбиения $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы. Применяя теперь к периодическим разбиениям $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$ лемму 1.2, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы.

b) Пусть d_k^2 — наибольший общий делитель чисел n_k и m_2. Повторяя рассуждения пункта a), заключаем, что найдется $\tau \in \mathbb{N}$, такое что $d_k^2 = d_\tau^2$ при $k \geq \tau$.

Для доказательства пункта b) нам теперь достаточно найти периодическое разбиение длины m_2, согласованное одновременно с разбиениями $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$. Тогда повторяя рассуждения пункта a), мы докажем, что оно будет согласовано с каждым $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим тройку чисел m_1, m_2, $n_\tau \in \mathcal{P}(X, f)$. Обозначим для удобства через d_k и D_k наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел n_τ и m_k, $k = 1, 2$.

Так как m_1 делит m_2 по условию предложения, то d_1 делит d_2 и D_1 делит D_2. Пусть

$$m = \frac{m_1}{d_1} \cdot d_2 \ .$$

Ясно, что m_1 делит m, так как число d_2/d_1 целое. С другой стороны,

$$\frac{m_2}{m} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{m_2 n_\tau}{d_2} \right) \left(\frac{m_1 n_\tau}{d_1} \right)^{-1} = \frac{D_2}{D_1} \in \mathbb{N} \ ,$$

то есть m делит m_2.

Пусть d и D — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел m и n_τ.

Очевидно, d_1 делит d и d делит d_2. Так как число m_1/d_1 целое, то m делится на d_2 и d_2 является общим делителем чисел m и n_τ. Следовательно, $d_2 = d$.

С другой стороны,

$$D = \frac{m n_\tau}{d} = \frac{m_1 d_2}{d_1} \cdot \frac{n_\tau}{d_2} = \frac{m_1 n_\tau}{d_1} = D_1 \ .$$

Из предложения 1.1 следует, что $m \in \mathcal{P}(X, f)$, так как m делит m_2 и $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$.

Применяя к числам m_1, m, $n_\tau \in \mathcal{P}(X, f)$ и согласованным периодическим разбиениям $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ лемму 1.4, найдем периодическое разбиение $\{W_k^{(m)}\}_{k=0}^{m-1}$ длины m, согласованное с каждым из этих разбиений.

Используя предложение 1.5, найдем периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ длины m_2, согласованное с разбиением $\{W_k^{(m)}\}$. Применяя лемму 1.3 к числам m, m_2, n_τ и периодическим разбиениям $\{W_k^{(m)}\}$, $\{W_j^{(m_2)}\}$, $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$, заключаем, что разбиения $\{W_j^{(m_2)}\}$ и $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ согласованы.

Согласно следствию 1.6 разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_k^{(m)}\}$, значит оно тем более является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$. Снова применяя следствие 1.6, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы.

Предложение 1.7 полностью доказано. $\square$

Замечание 1.11. *Пусть задана правильная последовательность* $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$ *периодических разбиений и*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{r_i}^{(n_i)} \neq \varnothing$$

для некоторой последовательности $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. *Тогда из следствия 1.6 получим*

$$W_{r_1}^{(n_1)} \supseteq W_{r_2}^{(n_2)} \supseteq \ldots W_{r_i}^{(n_i)} \supseteq \ldots .$$

Далее, если $K \subseteq X$ *— замкнутое подмножество компакта* X, *такое что* $K \cap W_{r_i}^{(n_i)} \neq \varnothing$ *для каждого* $i \in \mathbb{N}$, *то последовательность вложенных компактов*

$$\left(K \cap W_{r_1}^{(n_1)}\right) \supseteq \ldots \supseteq \left(K \cap W_{r_i}^{(n_i)}\right) \supseteq \ldots$$

имеет непустое пересечение, иными словами,

$$K \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{r_i}^{(n_i)}\right) \neq \varnothing\,.$$

Определение 1.7. *Назовем правильные последовательности периодических разбиений* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}^{n_i-1}_{s_i=0}$, $i \in \mathbb{N}$, *и* $\{W^{(m_j)}_{\tau_j}\}^{m_j-1}_{\tau_j=0}$, $j \in \mathbb{N}$, *динамической системы* (X, f) согласованными, *если согласованы при всех* i, $j \in \mathbb{N}$ *периодические разбиения* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}$ *и* $\{W^{(m_j)}_{\tau_j}\}$.

Непосредственно из предложения 1.7 следует

Предложение 1.8. *Пусть* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}^{n_i-1}_{s_i=0}$, $i \in \mathbb{N}$, *— правильная последовательность периодических разбиений динамической системы* (X, f).

Пусть $m_j \in \mathcal{P}(X, f)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* m_j *делит* m_{j+1} *для каждого* $j \in \mathbb{N}$.

Тогда найдется правильная последовательность $\{W^{(m_j)}_{\tau_j}\}^{m_j-1}_{\tau_j=0}$, $j \in \mathbb{N}$, *периодических разбиений динамической системы* (X, f), *согласованная с последовательностью* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.12. *Из следствия 1.1 немедленно следует, что если динамическая система* (X, f) *неразложима, то любые две правильные последовательности периодических разбиений этой динамической системы согласованы.*

Замечание 1.13. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющая условию 1) определения 1.6.*

Если динамическая система (X, f) *не является неразложимой, то найдутся два несогласованных периодических разбиения* $W^{(n_1)}$ *и* $\widetilde{W}^{(n_1)}$ *этой динамической системы (см. предложение 1.3 и замечание 1.5).*

Очевидно, правильные последовательности периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$, *построенные при* *помощи индуктивного применения предложения 1.5, исходя из разбиений $W^{(n_1)}$ и $\widetilde{W}^{(n_1)}$, соответственно, не будут согласованы.*

1.4. **Периодические разбиения и возвращаемость траекторий динамической системы.** Пусть (X, f) — некоторая динамическая система.

Лемма 1.5. *Пусть для некоторой рекуррентной точки $x \in X$ найдется замкнутая окрестность U, обладающая следующим свойством: существует $n \in \mathbb{N}$, для которого*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{kn}(x) \subset U\,.$$

Пусть

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{nk}(x) \in U \ \forall k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{1.5}$$

Тогда динамическая система $(\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}, f)$ обладает таким периодическим разбиением $\{W_i\}_{i=0}^{m-1}$ длины m, что $x \in W_0 \subseteq U$.

Доказательство. По теореме Биркгофа $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ является минимальным множеством д. с. (X, f). В частности, пространство $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ компактно.

Будем считать, что гомеоморфизм f задан на пространстве $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ с индуцированной с X топологией и все множества, которые возникнут в доказательстве, будем рассматривать именно в этой топологии.

Обозначим

$$W = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{mk}(x)}\,, \quad \widetilde{W} = \mathrm{Int} W\,.$$

Рассмотрим два набора множеств

$$\begin{aligned} W_0 = W\,,\quad & W_i = f^i(W) = f(W_{i-1})\,, && i = 1, \dots, m-1\,;\\ & \widetilde{W}_i = \mathrm{Int} W_i\,, && i = 0, \dots, m-1\,. \end{aligned}$$

Ясно, что для набора множеств $\{W_i\}$ выполняются свойства (ii) и (iv) определения 1.1. Все множества W_i замкнуты, поэтому свойство (i) есть непосредственное следствие свойств (ii) и (iii).

Итак, для того, чтобы доказать лемму, достаточно проверить условие (iii) определения 1.1.

Сначала покажем, что $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Действительно, по теореме Бэра о категориях[1] из (iv) следует, что по крайней мере одно из множеств $\{W_i\}$ не является множеством I-й категории (и имеет непустую внутренность в $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$). Так как f — гомеоморфизм, то все W_i имеют непустую внутренность, то есть $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$.

Теперь проверим соотношение $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Предположим, что это не так. Пусть $V = \widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j \neq \varnothing$ и, для определенности, $i < j$. Так как по построению множество $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{km+i}(x)$ плотно в $\widetilde{W}_i$, то $f^{ms+i}(x) \in V$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$.

$$f^{ms+i}(x) \in V \subseteq \widetilde{W}_j \subseteq W_j = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{km+j}(x)}\,,$$

поэтому найдется последовательность $\{l_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ целых чисел, для которой $f^{ml_r+j}(x) \to f^{ms+i}(x)$ при $r \to \infty$. Из этого следует, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$f^{m(l_r - s + k) + (j-i)}(x) \to f^{km}(x)\,.$$

То есть

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{km}(x) \subseteq \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{km+(j-i)}(x)} = W_{j-i}\,.$$

---

[1]Теорема Бэра о категориях применима в пространствах, полных по Чеху, а как известно, любой компакт является пространством, полным по Чеху (см. [1])

Переходя к замыканиям, получим $W_0 \subseteq W_{j-i}$. Меняя ролями i и j, получим обратное включение. Следовательно, $W_0 = W_{j-i}$.

Заметим, что

$$f^{(j-i)k}(x) \in f^{(j-i)k}(W_0) = f^{(j-i)(k-1)} \circ f^{j-i}(W_0) = \\ = f^{(j-i)(k-1)}(W_0) = \ldots = W_0 \subseteq U$$

при $k \geq 0$ и

$$\begin{aligned} f^{-|k|(j-i)}(x) \quad \in \quad & f^{-|k|(j-i)}(W_0) = f^{-|k|(j-i)}(W_{j-i}) = \\ & = f^{(-|k|+1)(j-i)} \circ f^{-(j-i)}(W_{j-i}) = \\ & = f^{(-|k|+1)(j-i)}(W_0) = \ldots = W_0 \quad \subseteq \quad U \end{aligned}$$

при $k < 0$ (напомним, что множество U замкнуто по условию леммы). То есть $f^{k(j-i)}(x) \in U$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Так как по предположению $0 < j - i < m$, то мы получили противоречие с выбором m (см. соотношение (1.5)). Следовательно, $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Проверим теперь равенства $\widetilde{W}_i = W_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Легко видеть, что

$$\widetilde{W}_i = \mathrm{Int} W_i = \mathrm{Int}(f(W_{i-1})) = f(\mathrm{Int}(W_{i-1})) = f(\widetilde{W}_{i-1}), \\ i = 1, \ldots, m-1,$$

и $\widetilde{W}_0 = f(\widetilde{W}_{m-1})$, так как f — гомеоморфизм. Обозначим

$$Q = \bigcup_{i=0}^{m-1} \widetilde{W}_i = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i(\widetilde{W}_0).$$

Q — открытое инвариантное подмножество динамической системы $(\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}, f)$. Пусть $K = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \setminus Q$. Очевидно, K — замкнутое инвариантное подмножество названной динамической системы.

Множество $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ минимально, поэтому либо $K = \varnothing$, либо $K = \overline{\mathrm{Orb}\, f(x)}$. Мы уже доказали, что $Q \neq \varnothing$, следовательно $K = \varnothing$ и

$$\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \widetilde{W}_i\,.$$

Так как множества из набора $\{\widetilde{W}_i\}$ попарно не пересекаются, то все они открыто-замкнутые и $\widetilde{W}_i = W_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. По доказанному выше из этого немедленно следует условие (iii) определения 1.1.

Лемма полностью доказана. $\square$

2. Супернатуральные числа и подмножества множества натуральных чисел.

2.1. **Супернатуральные числа.**

Определение 2.1. *Пусть* $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ *— множество всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность*

$$N = (N_2, N_3, \ldots, N_p, \ldots)\ , \qquad N_p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}\ , \quad p \in \mathcal{S}\ ,$$

называется супернатуральным числом*.*

Множество всех супернатуральных чисел мы будем обозначать через Σ.

Введем на множестве Σ отношение частичного порядка. Скажем, что

$$M \leq N\ , \quad M, N \in \Sigma\ ,$$

если $M_p \leq N_p$ для каждого $p \in \mathcal{S}$ (будем считать, что $k \leq \infty$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$). Элементарная непосредственная проверка показывает, что это определение корректно.

Зададим на множестве Σ бинарную операцию. Для $M = (M_p)$ и $N = (N_p)$ положим

$$M \cdot N = K = (K_p)\ ;$$

$$K_p = \left\{ \begin{array}{cl} M_p + N_p\ , & \text{если } M_p \neq \infty \text{ и } N_p \neq \infty\ , \\ \infty\ , & \text{в противном случае}\ . \end{array} \right\}\ , \quad p \in \mathcal{S}\ .$$

Тривиально проверяется, что $(\Sigma, \cdot)$ полугруппа с единицей $E = (E_p = 0)$.

Замечание 2.1. *Простая непосредственная проверка показывает, что уравнение $M \cdot X = N$ имеет решение в $(\Sigma, \cdot)$ тогда и только тогда, когда $M \leq N$.*

Однако решение такого уравнения может быть и не единственным.

Пример 2.1. *Пусть $M = N = (N_p)$,*

$$N_p = \left\{ \begin{array}{cl} \infty\ , & \textit{при } p = 2\ , \\ 0\ , & \textit{при } p \neq 2\ . \end{array} \right.$$

Тогда $X^{(n)} = (X_p^{(n)})$,

$$X_p^{(n)} = \left\{ \begin{array}{cl} n\ , & \textit{при } p = 2\ , \\ 0\ , & \textit{при } p \neq 2\ . \end{array} \right.$$

является решением уравнения $M \cdot X = N$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$.

Так же, как и в полугруппе $(\mathbb{N}, \cdot)$, для любых двух M, $N \in \Sigma$ определены их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Легко видеть, что

$$\text{НОД}(M, N) = (d_p)\ , \quad d_p = \min(M_p, N_p)\ ,\ p \in \mathcal{S}\ , \tag{2.1}$$

$$\text{НОК}(M, N) = (D_p)\ ,\ D_p = \max(M_p, N_p)\ ,\ p \in \mathcal{S}\ . \tag{2.2}$$

Здесь мы пользуемся следующими соглашениями:

$$\max(a, \infty) = \infty\ , \quad \min(a, \infty) = a\ , \quad a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}\ .$$

Определим мономорфизм $\Phi_0 : (\mathbb{N}, \cdot) \to (\Sigma, \cdot)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разложение

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

числа n на простые множители (мы предполагаем, что $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$). Положим $\Phi_0(n) = (\Phi_0(n)_p)$,

$$\Phi_0(n)_p = \begin{cases} \alpha_i \ , & \text{если } p = p_i \in \{p_1, \dots, p_k\} \ , \\ 0 \ , & \text{в противном случае} \ . \end{cases}$$

Замечание 2.2. *Отметим, что для всех m, $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \Phi_0(\text{НОД}(m,n)) &= \text{НОД}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)) \ , \\ \Phi_0(\text{НОК}(m,n)) &= \text{НОК}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)) \ . \end{aligned}$$

2.2. **Допустимые подмножества множества натуральных чисел.** Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Для каждого $p \in \mathcal{S}$ пусть

$$\Phi(A)_p = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists a \in A : p^k \text{ делит } a\} = \sup_{a \in A} \Phi_0(a)_p \ .$$

Обозначим через Φ отображение

$$\Phi : A \mapsto \Phi(A) = (\Phi(A)_p)$$

из класса всех непустых подмножеств множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в множество Σ супернатуральных чисел.

Замечание 2.3. *Легко проверяется, что определенное выше отношение порядка на множестве Σ превращает отображение Φ в изотонное, то есть для любых $A, B \subseteq \mathbb{N}$ из $A \subseteq B$ следует $\Phi(A) \leq \Phi(B)$.*

Пример 2.2. *Пусть $A = \{a\}$ — одноэлементное множество. Из определения легко следует, что $\Phi(\{a\}) = \Phi_0(a)$.*

Пример 2.3. *Пусть $A = \{a_1, \dots, a_j\}$ — конечное подмножество $\mathbb{N}$. Рассмотрим разложения чисел $a_1, \dots, a_j$ на* *простые множители*

$$a_i = \prod_{p\in\mathcal{S}} p^{n_p(i)}\ , \quad i=1,\dots,j$$

(здесь $n_p(i)\in\mathbb{Z}_+$, $p\in\mathcal{S}$, $i=1,\dots,j$*).*

По определению

$$\Phi(A)_p = \max\{n_p(1),\dots,n_p(j)\}\ , \quad p\in\mathcal{S}\ ,$$

то есть $\Phi(\{a_1,\dots,a_j\}) = \Phi(\{D\})$, *где* $D\in\mathbb{N}$ *— наименьшее общее кратное чисел* $a_1,\dots,a_j$.

Замечание 2.4. *Пусть* $A\subseteq\mathbb{N}$. *Непосредственно из определения следует, что* $\Phi(\{a\})\le\Phi(A)$ *для каждого* $a\in A$.

Замечание 2.5. *Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что для любых непустых* A, $B\subseteq\mathbb{N}$

$$\Phi(A\cup B) = \text{НОК}(\Phi(A),\Phi(B))\ .$$

Кроме того, если $A\cap B\ne\varnothing$, *то*

$$\Phi(A\cap B) \le \text{НОД}(\Phi(A),\Phi(B))\ .$$

Определение 2.2. *Непустое подмножество* $A\subseteq\mathbb{N}$ *назовем* допустимым, *если оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *если* $a\in A$ *и* $d\in\mathbb{N}$ *делит* a, *то* $d\in A$;

(ii) *для любых* $a,b\in A$ *их наименьшее общее кратное* D *также лежит в* A.

Обозначим набор всех допустимых множеств через $\mathcal{R}$.

Замечание 2.6. *Из предложений 1.1 и 1.2 следует, что множество* $\mathcal{P}(X,f)$ *допустимо для любой динамической системы* (X,f).

Лемма 2.1. *Пусть* $A\in\mathcal{R}$. *Тогда*

$$A = \{a\in\mathbb{N}\mid \Phi(\{a\})\le\Phi(A)\} = \{a\in\mathbb{N}\mid \Phi_0(a)\le\Phi(A)\}\ .$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $\Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)$. Пусть

$$a = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

— разложение числа a на простые множители. По определению соответствия Φ найдутся такие $b_1, \dots, b_k \in A$, что $p_i^{n_i}$ делит b_i, $i = 1, \dots, k$. Пусть b — наименьшее общее кратное чисел $b_1, \dots, b_k$. Тогда a делит b. Но $b \in A$ по определению допустимого множества. Следовательно, и $a \in A$. То есть

$$A \supseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\} .$$

Обратное включение

$$A \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\}$$

следует из замечания 2.4. $\square$

Непосредственным следствием леммы 2.1 является следующее

Предложение 2.1. *Отображение* $\Phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Sigma$ *биективно.*

Замечание 2.7. *Пусть* $A, B \in \mathcal{R}$. *Очевидно,* $1 \in A \cap B \neq \varnothing$. *Из леммы 2.1 немедленно следует соотношение*

$$\Phi(A \cap B) = \text{НОД}(\Phi(A), \Phi(B)) .$$

Определение 2.3. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Назовем последовательность* $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$ правильной*, если* a_i *делит* a_{i+1} *для каждого* $i \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.8. *Из замечания 2.3 следует, что для любого* $A \subseteq \mathbb{N}$ *и любой правильной последовательности* $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(A) .$$

Предложение 2.2. *Пусть $A \in \mathcal{R}$. Тогда найдется правильная последовательность $\{b_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$, такая что $\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(A)$.*

Доказательство. Так как $A \subseteq \mathbb{N}$ — не более чем счетное множество, можно занумеровать все элементы множества A при помощи натуральных чисел. Пусть $b_1 = a_1$, b_i — наименьшее общее кратное чисел a_i и b_{i-1} при $i > 1$.

Ясно, что

$$\Phi(\{b_i\}) \geq \Phi(\{a_1, \ldots, a_i\}) , \quad i \in \mathbb{N} ,$$

поэтому

$$\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \geq \Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(A) .$$

С другой стороны, $b_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, так как множество A допустимое. Следовательно, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ и

$$\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(A) .$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по построению b_i делит b_{i+1}, $i \in \mathbb{N}$, следовательно последовательность $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ правильная. □

Предложение 2.3. *Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Пусть заданы две правильные последовательности $\{a_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{b_j \in A\}_{j\in\mathbb{N}}$.*

Следующие условия эквивалентны:

1) *$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})$;*
2) *для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $j \in \mathbb{N}$, такое что a_i делит b_j.*

Доказательство. 1) Пусть $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Рассмотрим разложение

$$a = a_i = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

числа a_i на простые множители.

Из примера 2.2 и замечания 2.4 следует, что для $m = 1, \ldots, k$

$$\alpha_m = \Phi(\{a\})_{p_m} \leq \Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_{p_m} \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_{p_m} \; .$$

Поэтому, для каждого p_m, $m = 1, \ldots, k$, найдется $j_m \in \mathbb{N}$, такое что $p_m^{\alpha_m}$ делит b_{j_m}.

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что

$$j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k \; .$$

Последовательность $\{b_j\}$ правильная, поэтому b_{j_m} делит b_{j_k}, $m = 1, \ldots, k$. Следовательно, $p_m^{\alpha_m}$ делит b_{j_k}, $m = 1, \ldots, k$.

Числа $p_1, \ldots, p_k$ по построению взаимно простые, поэтому их произведение $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} = a$ делит b_{j_k}.

2) Предположим, что выполняется условие 2) предложения 2.3.

Пусть для некоторого $p \in \mathcal{S}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \gneqq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p \; .$$

Тогда $n = \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p < \infty$ и по определению отображения Φ для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$b_j = p^{n_j} \widetilde{b}_j \, , \quad n_j \leq n \, , \quad \text{НОД}(p, \widetilde{b}_j) = 1 \; .$$

С другой стороны, $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \geq n+1$, следовательно найдется $i_0 \in \mathbb{N}$, такое что p^{n+1} делит a_{i_0}. Воспользуемся теперь условием 2) предложения 2.3 и найдем $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что a_{i_0} делит b_{j_0}. Тем более, p^{n+1} делит b_{j_0}.

Однако, по построению $\text{НОД}(p^{n+1}, b_{j_0}) = p^{n_{j_0}} \leq p^n$.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p \, , \quad p \in \mathcal{S} \; ,$$

то есть справедливо условие 1) предложения 2.3. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Пусть* $\{a_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$ — *правильная последовательность.*

Для любой подпоследовательности $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *последовательности* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *имеет место равенство*

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}) .$$

3. Расширения одометров и периодические разбиения.

3.1. **Определение одометра.** Пусть $\{n_i \in \mathbb{N}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность, которая неограничено возрастает.

Рассмотрим последовательность конечных циклических групп $\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ и групповых гомоморфизмов

$$\varphi_i : \mathbb{Z}_{n_{i+1}} \to \mathbb{Z}_{n_i} ,$$
$$\varphi_i : 1 \mapsto 1 .$$

Возьмем обратный предел $A = \lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{inv} \mathbb{Z}_{n_i}$ этой последовательности групп и гомоморфизмов. Получим абелеву группу $(A, +)$.

Наделим каждое множество $\mathbb{Z}_{n_i} = \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$ дискретной топологией. Каждое из отображений φ_i является непрерывным в этой топологии. Пространство A с топологией $\mathcal{T}$ обратного предела гомеоморфно множеству Кантора Γ.

Легко видеть, что в группе $(A, +)$ операции сложения и перехода к противоположному элементу непрерывны в топологии $\mathcal{T}$, таким образом A превращается в топологическую группу.

Замечание 3.1. *Напомним, что обратный предел* $A = \lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{inv} \mathbb{Z}_{n_i}$ *можно представлять себе как подмножество*

$$A = \{\vec{a} = (a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}) \mid \varphi_i(a_{i+1}) = a_i\,,\ i \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

прямого произведения

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}\ . \tag{3.2}$$

В такой записи операция сложения в A *определяется покомпонентно, то есть* $\vec{a}+\vec{b}=(a_i+b_i)$ *для любых* $\vec{a}=(a_i)$, $\vec{b}=(b_i)\in A$.

Как известно, топология прямого произведения (3.2) задается при помощи базы, состоящей из так называемых цилиндрических множеств

$$U(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})=\{(a_i)\mid a_{i_s}=x_{i_s}\ ,\ s=1,\ldots,k\}\ ;\\ x_{i_s}\in\mathbb{Z}_{n_{i_s}}\ ,\ i_1<\ldots<i_k\ ,\ k\in\mathbb{N}\ .$$

Из определения множества A (см. соотношение (3.1)) легко видеть, что

$$U(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\cap A=U(x_{i_k})\cap A$$

для любых $k\in\mathbb{N}$, $i_1<\ldots<i_k$ и $x_{i_s}\in\mathbb{Z}_{n_{i_s}}$. Итак, набор множеств

$$\begin{gathered} V_{x_j}=U(x_j)\cap A=\{(a_i)\in A\mid a_j=x_j\}\quad= \\ =\left\{(a_i)\in A\ \middle|\ a_j=x_j\ ,\quad \begin{matrix} a_k=\varphi_k\circ\ldots\circ\varphi_{j-1}(x_j)\\ \text{при } k<j\end{matrix}\right\}\ ; \\ j\in\mathbb{N}\ ,\ x_j\in\mathbb{Z}_{n_j} \end{gathered} \tag{3.3}$$

является базой топологии пространства A.

Естественная метрика $\mathrm{d}: A\times A\to\mathbb{R}_+$ на A, ассоциированная с последовательностью $\{n_i\}$, определяется следующим образом:

$$\mathrm{d}(\vec{x},\vec{y})=n_m^{-1}\ ,$$

где $m=\min\{i\in\mathbb{N}\mid x_k=y_k \text{ при } k<i \text{ и } x_i\neq y_i\}$. Корректность этого определения проверяется непосредственно.

Рассмотрим элемент $\vec{e} = (1) = (1, \ldots, 1, \ldots) \in A$. Этот элемент называется *генератором* группы A и обладает тем свойством, что порожденная им циклическая подгруппа $\langle \vec{e} \rangle$ плотна в A в топологии $\mathcal{T}$.

Отображение сдвига на элемент $\vec{e}$

$$g : A \to A\ ,$$

$$g : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{e}$$

очевидно, является гомеоморфизмом.

Определение 3.1. *Динамическая система* (A, g) *называется* одометром.

Замечание 3.2. *Из того, что подгруппа* $\langle \vec{e} \rangle$ *плотна в* A*, немедленно следует, что каждая траектория д. с.* (A, g) *плотна в* A*, то есть одометр всегда является минимальной динамической системой.*

Лемма 3.1. *Для любых* $k \in \mathbb{N}$ *и* $x_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$ *набор множеств* $\{W_j^{(n_k)} = V_{x_k+j}\}_{j=0,\ldots,n_i-1}$ *является периодическим разбиением динамической системы* (A, g) *длины* n_k.

Доказательство. Очевидно,

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_s = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_{x_k+j}\ .$$

Следовательно, для набора $\{W_j^{(n_k)}\}$ выполнено условие (iv) определения 1.1.

Так как все множества V_{x_k+j}, $j \in \mathbb{Z}_{n_k}$, открыты по определению и попарно не пересекаются, то набор $\{W_j^{(n_k)}\}$ удовлетворяет также свойствам (i) и (iii) периодического разбиения.

Для завершения доказательства нам достаточно проверить, что $g(V_{a_k}) = V_{a_k+1}$ $(1 \in \mathbb{Z}_{n_k})$ для каждого $a_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$.

Пусть $\vec{b} = (b_i) \in V_{a_k}$. Тогда $b_k = a_k$ и $g(\vec{b}) = \vec{b} + \vec{e} = (b_i + 1) \in V_{a_k+1}$. Следовательно, $g(V_{a_k}) \subseteq V_{a_k+1}$.

Обратно, пусть $\vec{c} = (c_i) \in V_{a_k+1}$. Тогда $c_k = a_k + 1$ и $g^{-1}(\vec{c}) = \vec{c} - \vec{e} = (c_i - 1) \in V_{a_k}$. Следовательно, $g(V_{a_k}) \supseteq V_{a_k+1}$. $\square$

Замечание 3.3. *Из соотношения (3.3) немедленно следует, что*

$$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{d}(g(\vec{x}), g(\vec{y}))$$

для всех $\vec{x}$, $\vec{y} \in A$.

3.2. **Правильные последовательности периодических разбиений и ассоциированные с ними разбиения фазового пространства динамической системы.** Пусть (X, f) — динамическая система с компактным фазовым пространством, $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — неограниченная правильная последовательность. Пусть $\{W^{(n_i)}\}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $x \in X$. Заметим, что в силу свойств периодических разбиений для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует единственное $\alpha_i(x) \in \mathbb{Z}_{n_i}$, такое что $x \in W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$, то есть корректно определено отображение

$$F : X \to \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}\,,$$

$$F : x \mapsto (\alpha_i(x))\,, \quad x \in X\,.$$

Каждому $x \in X$ сопоставим подмножество

$$H(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)} \ni x$$

пространства X. Из определений 1.1, 1.6 и следствия 1.6 следует, что

1) все $H(x)$ — непустые замкнутые множества;
2) $H(x) = H(y)$, если $F(x) = F(y)$, $H(x) \cap H(y) = \varnothing$, если $F(x) \neq F(y)$;
3) $F(f^{\pm 1}(x)) = F(x) \pm \vec{e}$ для всех $x \in X$ (напомним, что $\vec{e} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in A$).

Для каждого $\vec{a} = (a_i) \in F(X)$ фиксируем $x \in F^{-1}(\vec{a})$ и обозначим $H_{\vec{a}} = H(x)$. Из 2) следует, что множество $H_{\vec{a}}$ не зависит от выбора $x \in F^{-1}(\vec{a})$.

Из 1) и 2) следует, что набор множеств $\mathfrak{H} = \{H_{\vec{a}}\}_{\vec{a} \in F(X)} = \operatorname{zer}(F)$ представляет собой разбиение пространства X, элементами которого являются полные прообразы точек пространства $F(X)$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{F} & F(X) \\ & & {\scriptstyle pr}\downarrow & & \| \\ X/\operatorname{zer}(F) & = & X/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & F(X) \end{array}$$

Предложение 3.1. *Отображение F непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим предбазу топологии

$$U_{x_j} = \{\vec{a} = (a_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i} \mid a_j = x_j\}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

пространства $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$.

Простая непосредственная проверка показывает, что

$$F^{-1}(U_{x_j}) = W_{x_j}^{(n_j)}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для завершения доказательства теперь остается вспомнить, что все множества $W_{x_j}^{(n_j)}$ открыты в X по определению. $\square$

Так как X — компакт, $\operatorname{fact} F$ — непререывное взаимно–однозначное отображение $X/\mathfrak{H}$ на $F(X)$ и пространство $F(X)$ хаусдорфово, то $\operatorname{fact} F$ — гомеоморфизм (см. [1]).

Для каждого $\vec{a} \in F(X)$ из 2) и 3) легко получается равенство $f(F^{-1}(\vec{a})) = F^{-1}(\vec{a} + \vec{e})$. Таким образом, если мы обозначим

$$g : F(X) \to F(X)\,, \quad g : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e}\,;$$

$$\overline{f} = \operatorname{fact} f : X/\mathfrak{H} \to X/\mathfrak{H}\,, \quad \overline{f} : H_{\vec{a}} \mapsto H_{\vec{a}+\vec{e}}\,;$$

то получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X, f) & \xrightarrow{F} & (F(X), g) \\ {\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\| \\ (X/\mathfrak{H}, \overline{f}) & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & (F(X), g) \end{array} \tag{3.4}$$

Зададимся теперь вопросом: что из себя представляет множество $F(X)$?

Фиксируем $x \in X$ и рассмотрим множество

$$F(\operatorname{Orb}_f(x)) = \{F(x) + n\vec{e} \mid n \in \mathbb{Z}\} = F(x) + \langle\vec{e}\rangle\,.$$

Ясно, что $F(x) + \langle\vec{e}\rangle \subseteq F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) \subseteq \overline{F(x) + \langle\vec{e}\rangle} = F(x) + \overline{\langle\vec{e}\rangle} = F(x) + A$ (A — адическая группа, построенная по последовательности $\{n_i\}$, см. выше).

Так как $\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ — компакт, то множество $F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)})$ замкнуто в $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$. Множество $F(x)+\langle\vec{e}\rangle$ плотно в $F(x)+A$, поэтому $F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) = F(x) + A$.

Пусть теперь y — другая точка пространства X. $\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (X, f). Следовательно (см. замечание1.3), $W_{s_i}^{(n_i)} \cap \overline{\operatorname{Orb}_f(x)} \neq \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$.

Пусть $F(y) = (\beta_i)$. Из замечания 1.11 следует, что множество $H_{(\beta_i)} \cap \overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ не пусто и

$$F(y) = F(H_{(\beta_i)}) \in F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) = F(x) + A\,.$$

В результате получим

$$F(X) = F(x) + A\,,$$

то есть $F(X)$ — смежный класс группы $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ по подгруппе A.

Замечание 3.4. *Очевидно, $F(X) = A$ тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} \neq \varnothing\,. \tag{3.5}$$

Определение 3.2. *Правильная последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f) называется* когерентной*, если она удовлетворяет соотношению (3.5).*

Из предложения 1.6, замечания 1.5 и конструкции, приведенной выше, следует

Предложение 3.2. *Пусть (X, f) — динамическая система, фазовое пространство которой хаусдорфово и компактно.*

Для любой неограниченной правильной последовательности $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$ на одометр (A, g), построенный по последовательности $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Пусть теперь $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность и пусть $\{W^{(n_i)}\}$ и $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}$ — две согласованные правильные последовательности периодических разбиений динамической системы (X, f). Тогда (см. замечание 1.5 и определение 1.3) периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(n_i)}$ эквивалентны для каждого $i \in \mathbb{N}$. Из этого немедленно заключаем, что

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}) = \mathfrak{H}(\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}) = \widetilde{\mathfrak{H}}\,.$$

Предложение 3.3. *Пусть задана правильная последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f).*

Набор множеств $\{pr(W^{(n_i)}_{s_i}) \mid i \in \mathbb{N}\,,\ s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) *это правильная последовательность периодических разбиений динамической системы $(X/\mathfrak{H}, \overline{f})$;*
2) *это база топологии пространства $X/\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Из сказанного выше немедленно следует, что последовательность $\{W^{(n_i)}\}$ можно считать когерентной.

Теперь предложение следует из соотношений

$$W^{(n_i)}_{s_i} = F^{-1}(V_{s_i})\,, \qquad s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\,, \quad i \in \mathbb{N}$$

(см. формулу (3.3), лемму 3.1 и следствие 1.6) и коммутативной диаграммы (3.4), нижняя стрелка которой является гомеоморфизмом. □

Предложение 3.4. *Пусть $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{m_j \in \mathcal{P}(X, f)\}_{j\in\mathbb{N}}$ — две правильные последовательности, такие что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \le \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ — согласованные правильные последовательности периодических разбиений динамической системы (X, f).

Тогда разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ пространства X, индуцированое последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$, является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$, индуцированого последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$.

Доказательство. Фиксируем точку $x \in X$. Найдутся такие $(\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ и $(\beta_j) \in \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{m_j}$, что

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i} \cap \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j}\,.$$

Согласно предложению 2.3 для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $k(i) \in \mathbb{N}$, такое что n_i делит $m_{k(i)}$. Так как периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(m_{k(i)})}$ согласованы, то по следствию 1.6 второе из них является измельчением первого.

Итак, $\widetilde{W}^{(m_{k(i)})}_{\beta_{k(i)}} \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$H_{(\alpha_i)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i} \supseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_{k(i)})}_{\beta_{k(i)}} \supseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j} = \widetilde{H}_{(\beta_j)} \,.$$

В силу произвола в выборе $x \in X$ из сказанного заключаем, что для произвольных $(\alpha_i) \in F(X)$ и $(\beta_j) \in \widetilde{F}(X)$ либо $H_{(\alpha_i)} \cap \widetilde{H}_{(\beta_j)} = \varnothing$, либо $H_{(\alpha_i)} \supseteq \widetilde{H}_{(\beta_j)}$. $\square$

Следствие 3.1. *Если в условиях предложения 3.3 имеет место равенство* $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$, *то разбиения* $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *пространства* X *совпадают.*

Предложение 3.5. *Пусть* $\{n_i \in \mathcal{P}(X,f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{m_j \in \mathcal{P}(X,f)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— две правильные последовательности.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X,f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Пусть последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *не являются согласованными.*

Тогда $H(x) \setminus \widetilde{H}(x) \neq \varnothing$ *и* $\widetilde{H}(x) \setminus H(x) \neq \varnothing$ *для каждого* $x \in X$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Найдутся такие $(\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ и $(\beta_j) \in \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{m_j}$, что

$$H(x) = H_{(\alpha_i)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i}\,, \quad \widetilde{H}(x) = \widetilde{H}_{(\beta_j)} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j}\,.$$

По определению $H(x) \cap \widetilde{H}(x) \neq \varnothing$.

Согласно условию предложения существуют такие $k, l \in \mathbb{N}$, что периодические разбиения $W^{(n_k)}$ и $\widetilde{W}^{(m_l)}$ не согласованы, то есть

$$x \in A_{k,l} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} f^t\Big(W^{(n_k)}_{\alpha_k} \cap \widetilde{W}^{(m_l)}_{\beta_l}\Big) \neq X\,.$$

Итак, пространство X распадается в объединение двух непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $A_{k,l}$ и $B_{k,l} = X \setminus A_{k,l}$ динамической системы (X, f) (см. предложение 1.4).

Очевидно, $H(x) \cap \widetilde{H}(x) \subseteq W^{(n_k)}_{\alpha_k} \cap \widetilde{W}^{(m_l)}_{\beta_l} \subseteq A_{k,l}$.

Однако,

$$H(x) \setminus \widetilde{H}(x) \supseteq H(x) \cap B_{k,l} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Big(W^{(n_i)}_{\alpha_i} \cap B_{k,l}\Big) \neq \varnothing$$

(см. замечания 1.3 и 1.11). Аналогично, $\widetilde{H}(x) \setminus H(x) \neq \varnothing$. □

Предложение 3.6. *Пусть* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ *и* $\{m_j \in \mathcal{P}(X, f)\}_{j \in \mathbb{N}}$ *— две правильные последовательности.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X, f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Если найдется $x \in X$, *такое что*

$$H(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)} \supseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(x)} = \widetilde{H}(x)\,,$$

то разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *является измельчением разбиения* $\mathfrak{H}$, *последовательности* $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *согласованы и* $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Следствие 3.2. *Пусть* $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X,f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Следующие утверждения эквивалентны:

1) *разбиение* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *является измельчением разбиения* $\mathfrak{H}$ *(соответственно,* $\mathfrak{H}=\widetilde{\mathfrak{H}}$*),*
2) $\Phi(\{n_i \mid i\in\mathbb{N}\}) \le \Phi(\{m_j \mid j\in\mathbb{N}\})$ *(соответственно,* $\Phi(\{n_i \mid i\in\mathbb{N}\}) = \Phi(\{m_j \mid j\in\mathbb{N}\})$*) и последовательности* $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *согласованы.*

Для доказательства предложения 3.6 нам понадобится следующая почти очевидная

Лемма 3.2. *Пусть* X *— хаусдорфово пространство,*

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_i \supseteq \ldots$$

— некоторая последовательность его непустых компактных подмножеств.

Для любой открытой окрестности U *множества*

$$K=\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$$

найдется $n\in\mathbb{N}$, *такое что* $K_i\subseteq U$ *при* $i\ge n$.

Доказательство . Предположим, найдется окрестность $U\supseteq K$ и последовательность $\{x_i\in K_i\setminus U\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Так как по построению $x_i\in K_1$, $i\in\mathbb{N}$, и K_1 — компакт, то эта последовательность имеет хотя-бы одну предельную точку $x\in K_1\setminus U\subseteq X\setminus U$.

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ из условия леммы $x_i\in K_i\subseteq K_m$, $i\ge m$. Следовательно, $x\in K_m$, $m\in\mathbb{N}$ и $x\in K\setminus U$.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Доказательство предложения 3.6. 1. Докажем, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $j(i) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

— n_i делит $m_{j(i)}$;

— периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ является измельчением разбиения $W^{(n_i)}$.

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, что открытая окрестность $W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$ множества $\widetilde{H}(x) \subseteq H(x) \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$ и последовательность замкнутых множеств

$$\widetilde{W}^{(m_1)}_{\widetilde{\alpha}_1(x)} \supseteq \widetilde{W}^{(m_2)}_{\widetilde{\alpha}_2(x)} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(x)} \supseteq \ldots$$

удовлетворяют условию леммы 3.2. Следовательно, найдется $j(i) \in \mathbb{N}$, для которого $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}_{\widetilde{\alpha}_{j(i)}(x)} \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$.

Из следствия 1.5 заключаем, что периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ согласованы и n_i делит $m_{j(i)}$. Теперь из следствия 1.6 вытекает, что разбиение $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ является измельчением разбиения $W^{(n_i)}$.

2. Проверим, что $H(y) \supseteq \widetilde{H}(y)$ для каждого $y \in X$, то есть разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$.

Действительно, из сказанного выше следует, что

$$\widetilde{H}(y) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(y)} \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_{j(i)})}_{\widetilde{\alpha}_{j(i)}(y)} \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(y)} = H(y)$$

для каждого $y \in X$.

3. Из предыдущего пункта и предложения 3.5 следует, что последовательности периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ согласованы.

4. Из пункта 1 и предложения 2.3 заключаем, что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$. $\square$

3.3. **Основные свойства одометров.** Покажем теперь на примере одометров, как работают утверждения, доказанные выше.

Предложение 3.7. *Пусть* (X, f) *и* (Y, g) *— динамические системы,* $p : (X, f) \to (Y, g)$ *— проекция. Если* $n \in \mathcal{P}(Y, h)$ *и* $W^{(n)} = \{W_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (Y, g)*, то* $n \in \mathcal{P}(X, f)$ *и* $\widetilde{W}^{(n)} = \{\widetilde{W}_i^{(n)} = p^{-1}(W_i^{(n)})\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (X, f).

Доказательство сводится к простой непосредственной проверке. □

Следствие 3.3. *Пусть* (Y, h) *— фактор-система динамической системы* (X, f)*. Тогда* $\mathcal{P}(Y, h) \subseteq \mathcal{P}(X, f)$.

Воспользовавшись замечанием 2.3, получим еще

Следствие 3.4. *В условиях следствия 3.3 выполняется неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(Y, h)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Замечание 3.5. *Итак, если топологически сопряжены динамические системы* (X, f) *и* (Y, g)*, то* $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) = \Phi(\mathcal{P}(Y, g))$*. Следовательно,* $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \in \Sigma$ *является топологическим инвариантом динамической системы* $(X, f) \in \mathcal{K}_0$.

Предложение 3.8. *Пусть* (A, g) *— одометр, построенный по правильной последовательности* $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда $\Phi(\{\mathcal{P}(A, g)\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$.

Пусть $\{W^{(m_j)}\}$ *— правильная последовательность периодических разбиений динамической системы* (A, g).

Набор множеств $\{W_{r_j}^{(m_j)} \mid r_j \in \mathbb{Z}_{m_j},\ j \in \mathbb{N}\}$ *является базой топологии пространства* A *тогда и только тогда, когда* $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{\mathcal{P}(A, g)\})$.

Доказательство. Из леммы 3.1 и соотношения (3.3) следует, что набор

$$W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = V_{s_i}\}_{s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

является правильной последовательностью периодических разбиений динамической системы (A, g). Построим по этой последовательности разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A. Так как набор (3.3) является базой топологии пространства A, то $H_{\vec{a}} = \{\vec{a}\}$ для каждого $\vec{a} \in A$.

1. Множество $\mathcal{P}(A, g)$ допустимое (см. замечание 2.6), следовательно найдется правильная последовательность $\{m_j \in \mathcal{P}(A, g)\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которой

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g)) \geq \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

(см. предложение 2.2 и замечание 2.8).

Построим теперь по этой последовательности правильную последовательность периодических разбиений $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, которая согласована с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ (см. предложение 1.8).

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$. А это может быть только если $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$. Теперь из предложения 3.6 следует

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})\,.$$

2. Пусть теперь $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — некоторая правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (A, g), $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$.

Из первой части предложения 3.8 и замечания 2.8 заключаем, что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \geq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Так как одометр (A, g) — минимальная динамическая система (см. замечание 3.2), то эта динамическая система неразложима и правильные последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ согласованы (см. замечание 1.12).

Применяя следствие 3.3, заключаем, что разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A является измельчением разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$, причем $\mathfrak{H} = \widetilde{\mathfrak{H}}$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g))\,.$$

Напомним, что набор $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ открытых подмножеств топологического пространства X является его базой топологии, когда выполняются следующие условия (см. [6]):

(a) если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ для некоторых α, $\beta \in \Lambda$, то найдется $\gamma \in \Lambda$, такое что $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$;
(b) для каждого $x \in X$ и любой открытой окрестности U точки x найдется $\alpha \in \Lambda$, такое что $x \in U_\alpha \in U$.

Заметим, что для любой правильной последовательности периодических разбиений свойство (a) всегда выполняется (это следует непосредственно из определения 1.6 и замечания 1.10).

Пусть $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) \subsetneqq \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$. Тогда разбиения $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ не совпадают (см. следствие 3.2) и и найдутся две точки x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, принадлежащие одному элементу разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Следовательно, для каждого $\widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)}$, $s_j \in \mathbb{Z}_{m_j}$, $j \in \mathbb{N}$, либо $\widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)} \cap \{x_1, x_2\} = \varnothing$, либо $\{x_1, x_2\} \subseteq \widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)}$ и свойство (b) не выполняется.

Пусть теперь $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$. В этом случае разбиения $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Пусть $x \in X$ и U — открытая окрестность точки x. По определению разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$ существует единственная последовательность $\{\alpha_j \in \mathbb{Z}_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, такая что

$$\{x\} = H(x) = \widetilde{H}(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\alpha_j}.$$

При этом все множества из пересечения в правой части компактны (как замкнутые подмножества компактного пространства A) и $\widetilde{W}^{(m_{j+1})}_{\alpha_{j+1}} \subseteq \widetilde{W}^{(m_j)}_{\alpha_j}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. определение 1.6). Применяя лемму 3.2, заключаем, что найдется $k \in \mathbb{N}$, для которого $x \in \widetilde{W}^{(m_{j_k})}_{\alpha_{j_k}} \subseteq U$. $\square$

Теперь из предложения 3.2, следствия 3.4, предложения 3.8, замечания 2.6 и предложения 2.2 получим такое утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть (X, f) — динамическая система с хаусдорфовым компактным фазовым пространством, (A, g) — одометр.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$;*
(ii) *выполняется неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.*

Для того, чтобы сформулировать следующее утверждение, мы нуждаемся в двух определениях.

Пусть (X, f) — динамическая система с компактным метрическим фазовым пространством (X, ρ).

Определение 3.3. *Пара точек x, $y \in X$, $x \neq y$, называется* дистальной, *если существует $\delta > 0$, такое что $\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$.*

Динамическая система (X, f) называется дистальной, *если любая пара точек x, $y \in X$, $x \neq y$, дистальна.*

Определение 3.4. *Динамическая система* (X, f) *называется* равностепенно непрерывной, *если семейство отображений* $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *является равностепенно непрерывным относительно метрики* ρ, *то есть если для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое что если* $\rho(x, y) < \delta$ *для некоторых* $x, y \in X$, *то* $\rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ *для каждого* $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 3.6. *Легко видеть, что дистальность и равностепенная непрерывность динамической системы* (X, f) *не зависят (в силу компактности* X*) от выбора метрики, порождающей заданную топологию на пространстве* X, *то есть дистальность и равностепенная непрерывность есть топологические свойства динамической системы* (X, f) *с метризуемым компактным фазовым пространством* X.

Теорема 3.2 (см. [7])**.** *Пусть* (Γ, f) *— минимальная динамическая система на множестве Кантора* Γ.

Тогда следующие условия равносильны:

1. *д. с.* (Γ, f) *топологически сопряжена с одометром;*
2. *д. с.* (Γ, f) *дистальна;*
3. *д. с.* (Γ, f) *равностепенно непрерывна.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2. и 3. для динамических систем с нульмерным компактным фазовым пространством непосредственно следует из результатов, полученных в работе [8].

Проверим импликацию 1. $\Rightarrow$ 3.

Пусть д. с. (Γ, f) топологически сопряжена при помощи гомеоморфизма $h : \Gamma \to A$ с одометром (A, g), который порожден допустимой последовательностью $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Перенесем естественную метрику d с пространства A на Γ при помощи соотношения

$$\rho(x, y) = \mathrm{d}(h(x), h(y)), \quad x, y \in \Gamma.$$

Из замечания 3.3 немедленно следует, что отображение f изометрично относительно метрики ρ. Таким образом, д. с. (Γ, f) равностепенно непрерывна.

Докажем импликацию 3. $\Rightarrow$ 1.

Фиксируем метрику $\rho : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}_+$. Пусть динамическая система (Γ, f) равностепенно непрерывна относительно метрики ρ.

Пусть $x \in \Gamma$, V — открыто-замкнутая окрестность точки x. Так как замкнутые множества V и $\Gamma \setminus V$ не пересекаются и Γ компактно, то

$$\rho(V, \Gamma \setminus V) = \varepsilon > 0\,.$$

Найдется $\delta > 0$, такое что для любых y_1, $y_2 \in \Gamma$

$$(\rho(y_1, y_2) < 2\delta) \Rightarrow (\rho(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \varepsilon\,, \quad n \in \mathbb{Z})\,.$$

Пусть $U = U_\delta(x)$. Тогда $\mathrm{Diam} U < 2\delta$ и $\mathrm{Diam} f^n(U) < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ либо $V \cap f^n(U) = \varnothing$, либо $f^n(U) \subseteq V$.

Так как динамическая система (Γ, f) минимальна, найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(x) \in U$. Тогда $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$. Ясно что, так как f — гомеоморфизм, то

$$f^{k+n}(U) \cap f^n(U) \neq \varnothing\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Проверим, что $f^{kn}(U) \subseteq V$, $n \in \mathbb{Z}$.

Проведем проверку по индукции для отрицательных n.

База индукции. Так как $\varnothing \neq f^{-k}(U) \cap U \subseteq f^{-k}(U) \cap V$, то $f^{-k}(U) \subseteq V$.

Шаг индукции. Пусть $f^{-ki}(U) \subseteq V$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\varnothing \neq f^{-k(i+1)}(U) \cap f^{-ki}(U) \subseteq f^{-k(i+1)}(U) \cap V$ и $f^{-k(i+1)}(U) \subseteq V$.

По индукции заключаем, что $f^{kn}(U) \subseteq V$ для всех $n < 0$.

Проверка этого включения для положительных n осуществляется аналогично.

Итак,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(x) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(U) \subseteq V\,.$$

Из леммы 1.5 заключаем, что найдутся $m \in \mathcal{P}(\Gamma, f)$ и периодическое разбиение $W^{(m)}$ динамической системы (Γ, f) длины m, такие что $x \in W_0^{(m)} \subseteq V$.

Фиксируем $x \in \Gamma$ и последовательность $\{\varepsilon_i \geq 0\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Найдем для каждого ε_i такое $\delta_i > 0$, что для всех y_1, $y_2 \in \Gamma$

$$(\rho(y_1, y_2) < \delta_i) \Rightarrow (\rho(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \varepsilon_i\,, \quad n \in \mathbb{Z})\,.$$

Построим теперь по индукции когерентную правильную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ динамической системы (Γ, f), такую что для каждого $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Diam} W_{s_i}^{(n_i)} < \varepsilon_i\,, \quad s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\,. \tag{3.6}$$

Пространство Γ нульмерно, поэтому существует последовательность $\{V_i \ni x\}_{i\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств, такая что $\mathrm{Diam} V_i < \delta_i$, $i \in \mathbb{N}$.

База индукции. Найдем периодическое разбиение $W^{(n_1)}$ динамической системы (Γ, f), такое что $x \in W_0^{(n_1)} \subseteq V_1$. Тогда $\mathrm{Diam} W_0^{(n_1)} < \delta_1$ и $\mathrm{Diam} W_{s_1}^{(n_1)} = \mathrm{Diam} f^{s_1}(W_0^{(n_1)}) < \varepsilon_1$, $s_1 \in \mathbb{Z}_{n_1}$, согласно выбору δ_1.

Шаг индукции. Пусть уже построен набор $\{W^{(n_i)}\}_{i=1}^k$ периодических разбиений динамической системы (Γ, f), такой что n_i делит n_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$,

$$W_0^{(n_1)} \supseteq \ldots \supseteq W_0^{(n_k)} \ni x$$

(из следствия 1.5 заключаем, что любые два периодических разбиения из этого набора согласованы), и для которого выполняются соотношения (3.6).

Обозначим $\widetilde{V}_{k+1} = V_{k+1} \cap W_0^{(n_k)} \ni x$. Очевидно, справедливо неравенство $\mathrm{Diam}\widetilde{V}_{k+1} < \delta_{k+1}$.

Найдем периодическое разбиение $W^{(n_{k+1})}$ динамической системы (Γ, f), такое что $x \in W_0^{(n_{k+1})} \subseteq \widetilde{V}_{k+1} \subseteq W_0^{(n_k)}$.

С одной стороны, $\mathrm{Diam}W_0^{(n_{k+1})} \leq \mathrm{Diam}\widetilde{V}_{k+1} < \delta_{k+1}$, поэтому $\mathrm{Diam}W_{s_1}^{(n_{k+1})} = \mathrm{Diam}f^{s_1}(W_0^{(n_{k+1})}) < \varepsilon_{k+1}$ для $s_{k+1} \in \mathbb{Z}_{n_{k+1}}$.

С другой стороны, n_k делит n_{k+1} и периодические разбиения $W^{(n_{k+1})}$ и $W^{(n_k)}$ согласованы по следствию 1.5.

По индукции получим когерентную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ динамической системы (Γ, f), все элементы которой удовлетворяют соотношению (3.6).

Построим по последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ разбиение $\mathfrak{H}$ пространства Γ и проекцию $F : (\Gamma, f) \to (A, g)$.

Пусть $y \in \Gamma$, $(\alpha_i) = F(y) \in A$. Заметим, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Diam}H(y) \leq \mathrm{Diam}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} W_{\alpha_i}^{(n_i)}\Big) = \mathrm{Diam}W_{\alpha_k}^{(n_k)} \leq \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Следовательно, $H(y) = \{y\}$ для каждого $y \in \Gamma$ и отображение проекции $pr : \Gamma \to \Gamma/\mathfrak{H}$ взаимно-однозначно. Следовательно, и отображение $F = (\mathrm{fact}\, F)\circ pr : \Gamma \to A$ взаимно-однозначно. Так как Γ — компакт, то F — гомеоморфизм, который сопрягает динамические системы (Γ, f) и (A, g) (см. коммутативную диаграмму (3.4)). $\square$

Замечание 3.7. *При определении одометра, построенного по правильной последовательности $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, мы требовали, чтобы эта последовательность была* неограничена.

Фактически это требование можно переписать в следующем виде:

$$\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Sigma \setminus \Phi_0(\mathbb{N})\,.$$

Посмотрим, что изменится, если $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi_0(m) \in \Phi_0(\mathbb{N})$. *В этом случае* $A = \lim\limits_{i\to\infty}\operatorname{inv}\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\vec{e} = 1 \in \mathbb{Z}_m$, *и динамическая система* (A, g) *состоит из единственной периодической траектории длины* m.

Расширим определение одометров, включив в него и случай, когда $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Phi_0(\mathbb{N})$.

Тривиально проверяется, что все сказанное в подразделах 3.2 и 3.3, кроме теоремы 3.2, справедливо и для нашего нового определения.

Теорема 3.3 (см. [9, 10, 13]). **1.** *Для каждого* $N \in \Sigma$ *существует одометр* (A, g), *такой что* $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.

2. *Одометры* (A_1, g_1) *и* (A_2, g_2) *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Доказательство. 1. Пусть $N \in \Sigma$. Найдем допустимое множество $\overline{A} \subseteq \mathcal{R}$, такое что $\Phi(\overline{A}) = N$ (см. предложение 2.1), и правильную последовательность $\{n_i \in \overline{A}\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\overline{A})$ (см. предложение 2.2). Построим по последовательности $\{n_i\}$ одометр (A, g). Из предложения 3.8 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\overline{A}) = N$.

2. (a) Пусть одометры (A_1, g_1) и (A_2, g_2) топологически сопряжены при помощи гомеоморфизма $h : A_1 \to A_2$.

Имеем две проекции

$$h : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2) \text{ и } h^{-1} : (A_2, g_2) \to (A_1, g_1)\,.$$

Следствие 3.4 дает нам $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

(b) Пусть теперь $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2)) = N \in \Sigma$.

Найдем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = N$ (см. выше), и построим по ней одометр (A, g).

Так как $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то из предложения 2.1 и замечания 2.6 получим $\mathcal{P}(A, g) = \mathcal{P}(A_1, g_1) = \mathcal{P}(A_2, g_2)$. Также из леммы 3.1 следует, что $n_i \in \mathcal{P}(A, g)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $n_i \in \mathcal{P}(A_k, g_k)$, $k = 1, 2$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем когерентную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A_1, g_1) и построим по ней разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A_1.

Аналогично, пусть $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — когерентная последовательность периодических разбиений динамической системы (A_2, g_2) и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A_2, индуцированное этой последовательностью.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
(A_1, g_1) & \xrightarrow{F} & (A, g) & \xleftarrow{\widetilde{F}} & (A_2, g_2) \\
{\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{pr}} \\
(A_1/\mathfrak{H}, \operatorname{fact} g_1) & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & (A, g) & \xleftarrow{\operatorname{fact} \widetilde{F}} & (A_2/\widetilde{\mathfrak{H}}, \operatorname{fact} g_2)
\end{array}$$

Мы уже знаем, что все отображения в нижней строке этой диаграммы являются изоморфизмами в категории $\mathcal{K}_0$.

Отображения pr и $\widetilde{pr}$ взаимно-однозначны по предложению 3.8. Так как пространства A_1 и A_2 компактны, то pr и $\widetilde{pr}$ изоморфизмы в категории $\mathcal{K}_0$.

Из сказанного следует, что морфизм

$$\widetilde{F}^{-1} \circ F = \widetilde{pr}^{-1} \circ (\operatorname{fact} \widetilde{F})^{-1} \circ (\operatorname{fact} F) \circ pr$$

является изоморфизмом и динамические системы (A_1, g_1) и (A_2, g_2) топологически сопряжены. $\square$

Замечание 3.8. *Пусть* (X, f), $(Y, g) \in \mathcal{K}_0$, $h : (X, f) \to (Y, g)$ *— морфизм. Если динамическая система* (Y, g) *минимальная, то* h *— проекция.*

Действительно, фиксируем $y \in Y$. По теореме Биркгофа имеем $\overline{\mathrm{Orb}_g(h(y))} = Y$. С другой стороны, так как X — компакт, то $h(X)$ — замкнутое подмножество пространства Y и, очевидно, $h(X) \supseteq \mathrm{Orb}_g(h(y)) = h(\mathrm{Orb}_f(y))$.

Предложение 3.9. *Пусть* (A, g) *— одометр,* $h : (A, g) \to (A, g)$ *— морфизм. Тогда* h *изоморфизм.*

Доказательство. Зафиксируем правильную последовательность $\{n_i \in \mathcal{P}(A, g)\}_{i \in \mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g))$ (см. замечание 2.6 и предложение 2.2).

Выберем правильную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$.

h — эпиморфизм согласно замечанию 3.8, поэтому из предложения 3.7 следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ набор множеств $\widetilde{W}^{(n_i)} = \{\widetilde{W}_{s_i}^{(n_i)} = h^{-1}(W_{s_i}^{(n_i)})\}_{i \in \mathbb{Z}_{n_i}}$ является периодическим разбиением динамической системы (A, g) длины n_i.

(A, g) — минимальная динамическая система, поэтому она неразложима. Применяя следствие 1.1, заключаем, что $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (A, g).

Из предложения 3.8 следует, что каждый из наборов множеств $\{W_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}, i \in \mathbb{N}\}$ и $\{\widetilde{W}_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}, i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому h — непрерывное взаимно-однозначное отображение. Так как A — компакт, то h — гомеоморфизм. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть* (Y_1, h_1), (Y_2, h_2) *— две динамические системы, топологически сопряженные с некоторыми одометрами.*

Если объекты (Y_1, h_1), $(Y_2, h_2) \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}_0$ *изоморфны, то любой морфизм* $\alpha : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. 1. Допустим, что динамическая система (Y_1, h_1) топологически сопряжена с одометром (A, g). Пусть $\rho : (Y_1, h_1) \to (Y_1, h_1)$ — некоторый морфизм. Тогда ρ — изоморфизм.

Действительно, фиксируем изоморфизм $\phi : (Y_1, h_1) \to (A, g)$ и рассмотрим морфизм $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1} : (A, g) \to (A, g)$. Согласно предложению 3.9, $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ — изоморфизм. Тогда и $\rho = \phi^{-1} \circ (\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ — изоморфизм.

2. Пусть существует изоморфизм $\psi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$.

Морфизм $\chi = \alpha \circ \psi^{-1} : (Y_2, h_2) \to (Y_2, h_2)$ является изоморфизмом (см. выше). Следовательно, и морфизм $\chi \circ \psi = \alpha \circ \psi^{-1} \circ \psi = \alpha$ является изоморфизмом. □

Пусть $(A, +)$ — адическая группа. Пусть $g : A \to A$,

$$g : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e}\,, \quad \vec{a} \in A\,.$$

Пусть (A, g) — соответствующий одометр.

Фиксируем $\vec{a}$, $\vec{b} \in A$. Расмотрим отображение

$$h_{\vec{a},\vec{b}} : A \to A\,,$$

$$h_{\vec{a},\vec{b}} : \vec{c} \mapsto \vec{c} + (\vec{b} - \vec{a})\,, \quad \vec{c} \in A\,.$$

Предложение 3.10. $h_{\vec{a},\vec{b}} \circ g = g \circ h_{\vec{a},\vec{b}}$.

Доказательство. Это очевидное следствие коммутативности группы (A, g). □

Замечание 3.9. *Пусть динамическая система* (X, f) *минимальна,* h_1*,* $h_2 : (X, f) \to (Y, g)$ *— два морфизма, такие что* $h_1(x) = h_2(x)$ *для некоторого* $x \in X$*.*

Тогда $h_1 = h_2$*.*

Действительно, для каждого $y = f^n(x) \in \mathrm{Orb}_f(x)$ имеем $h_1(y) = h_1 \circ f^n(x) = g^n \circ h_1(x) = g^n \circ h_2(x) = h_2 \circ f^n(x) = h_2(y)$. Поэтому $h_1|_{\mathrm{Orb}_f(x)} = h_2|_{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Так как $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ по теореме Биркгофа, то $h_1 = h_2$.

Комбинируя предложения 3.9, 3.10 и замечание 3.9, получим

Следствие 3.6. *Пусть* (A, g) *— динамическая система, топологически сопряженная с одометром. Для любой пары точек* x*,* $y \in A$ *существует единственный морфизм* $h_{x,y} : (A, g) \to (A, g)$*, такой что* $h_{x,y}(x) = y$*, и этот морфизм является изоморфизмом.*

3.4. **Отступление — одна категорная конструкция.** Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая категория.

Определение 3.5. *Скажем, что категория* $\mathfrak{L}$ *обладает свойством* **LU** *(Lifting Upstairs), если для любых объектов* A*,* $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ *и для произвольных морфизмов* $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ *и* $e_B \in H_{\mathfrak{L}}(B, B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ *найдется морфизм* $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$*, такой что*

$$\alpha e_B = e_A \alpha \ .$$

Определение 3.6. *Скажем, что категория* $\mathfrak{L}$ *обладает свойством* **LD** *(Lifting Downstairs), если для любых объектов* A*,* $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ *и для произвольных морфизмов* $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ *и* $f_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ *найдется морфизм* $f_B \in H_{\mathfrak{L}}(B, B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$*, такой что*

$$f_A \alpha = \alpha f_B \ .$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — категория. Для каждой пары объектов A, $B \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}$ определим на множестве $H_{\mathfrak{L}}(A,B)$ бинарное отношние $\sim$. Скажем, что $\alpha \sim \beta$, α, $\beta \in H_{\mathfrak{L}}(A,B)$, если существуют такие $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ и $e_B \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$, что

$$e_A\alpha = \beta e_B\ .$$

Легко видеть, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Класс эквивалентности морфизма α будем обозначать $[\alpha]$.

Предложение 3.11. *Пусть категория $\mathfrak{L}$ удовлетворяет одному из свойств* **LU** *или* **LD**.

Тогда корректно определена категория $\overline{\mathfrak{L}}$, объектами которой являются объекты категории $\mathfrak{L}$ и для любой пары объектов A, $B \in \overline{\mathfrak{L}}$ множество морфизмов $H_{\overline{\mathfrak{L}}}(A,B)$ есть множество классов эквивалентности морфизмов из $H_{\mathfrak{L}}(A,B)$.

Доказательство. Предположим, категория $\mathfrak{L}$ обладает свойством **LU**.

Тривиальная проверка показывает, что $\overline{\mathfrak{L}}$ удовлетворяет свойствам 1) и 2) категории.

Для того, чтобы корректно определить операцию композиции морфизмов в $\overline{\mathfrak{L}}$, проверим, что для любой тройки объъктов A, B, $C \in \mathfrak{L}$ и для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A,B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{L}}(B,C)$ выполняется равенство

$$[\alpha\beta] = [\alpha][\beta] = \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\}\ . \tag{3.7}$$

Пусть $\alpha' \in [\alpha]$, $\beta' \in [\beta]$. Тогда найдутся такие изоморфизмы $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$, e_B, $f_B \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ и $f_C \in H_{\mathfrak{L}}(C,C) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$, что

$$\alpha'\beta' = (e_A^{-1}\alpha e_B)(f_B^{-1}\beta f_C) = e_A^{-1}\alpha(e_B f_B^{-1})\beta f_C\ .$$

Очевидно, $e_B f_B^{-1} \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$. Из свойства **LU** заключаем, что существует $g_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$, для которого $\alpha(e_B f_B^{-1}) = g_A\alpha$. Следовательно,

$$\alpha'\beta' = e_A^{-1}\alpha(e_B f_B^{-1})\beta f_C = (e_A^{-1} g_A)\alpha\beta f_C \ ,$$

$\alpha'\beta' \in [\alpha\beta]$ и $[\alpha\beta] \supseteq \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\}$.

Обратно, пусть $\gamma \in [\alpha\beta]$. Это значит, что для некоторых $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ и $e_C \in H_{\mathfrak{L}}(C,C) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ имеет место соотношение

$$\gamma = e_A^{-1}(\alpha\beta)e_C = (e_A^{-1}\alpha)(\beta e_C) \ .$$

Очевидно, $e_A^{-1}\alpha = e_A^{-1}\alpha 1_B \in [\alpha]$ и $\beta e_C = 1_B^{-1}\beta e_C \in [\beta]$. Следовательно, $[\alpha\beta] \subseteq \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\}$.

Итак, мы установили, что частичное умножение классов эквивалентности морфизмов не зависит от выбора представителей, следовательно, оно определено корректно.

Ассоциативность умножения морфизмов в $\overline{\mathfrak{L}}$ следует из ассоциативности умножения морфизмов в категории $\mathfrak{L}$.

Для завершения доказательства нам остается заметить, что для любого $A \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}$ единичным морфизмом объекта A в $\overline{\mathfrak{L}}$ является $[1_A]$.

Если категория $\mathfrak{L}$ обладает свойством **LD**, доказательство проводится аналогично. □

Замечание 3.10. *Приведенная выше конструкция является частным случаем так называемой* фактор-категории *(см. [11]).*

3.5. **Основные свойства одометров (продолжение).** Пусть (A_1, g_1), (A_2, g_2) — динамические системы, топологически сопряженные с одометрами, $\pi_1,\ \pi_2 : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$ и $h : (A_2, g_2) \to (A_2, g_2)$ — морфизмы.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех морфизмов $f : (A_1, g_1) \to (A_1, g_1)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
(A_1, g_1) & \xrightarrow{f} & (A_1, g_1) \\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
(A_2, g_2) & \xrightarrow[h]{} & (A_2, g_2)
\end{array}$$

Из предложения 3.9 следует, что $h \in \operatorname{Iso}\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Iso}\mathcal{K}_0$.

Предложение 3.12. *Множество $\mathcal{F}$ не пусто.*

Для любых $y \in A_2$ и $x_1 \in \pi_1^{-1}(y)$ имеет место равенство

$$\mathcal{F} = \left\{ h_{x_1, x_2} \mid x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y)) \right\} .$$

Доказательство предложения 3.12 опирается на следующие леммы.

Лемма 3.3. *Пусть (X, f) — неразложимая динамическая система, (A, g) — динамическая система, топологически сопряженная с одометром, π_1, $\pi_2 : (X, f) \to (A, g)$ — проекции.*

Тогда разбиения $\operatorname{zer}\pi_1$ и $\operatorname{zer}\pi_2$ пространства X совпадают.

Лемма 3.4. *Пусть (X, f), (A, g), π_1, $\pi_2 : (X, f) \to (A, g)$ те же, что и в лемме 3.3.*

Для любого морфизма $h : (X, f) \to (X, f)$ определено непрерывное отображение $\operatorname{fact}\pi_2 \circ h : A \to A$, оно удовлетворяет соотношению $g \circ (\operatorname{fact}\pi_2 \circ h) = (\operatorname{fact}\pi_2 \circ h) \circ g$.

Следовательно, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (X,f) & \xrightarrow{h} & (X,f) \\ {\scriptstyle\pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ (A,g) & \xrightarrow[\operatorname{fact}\pi_2\circ h]{} & (A,g) \end{array}$$

Доказательство леммы 3.3. Фиксируем правильную последовательность $\{n_i \in \Phi(\mathcal{P}(A,g))\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что

$$\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A,g))$$

(см. замечание 2.6 и предложение 2.2).

Построим правильную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A,g). Согласно предложению 3.8 набор множеств $\{W^{(n_i)}_{s_i} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A.

Из предложения 3.7 следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ наборы множеств $\widetilde{W}^{(n_i)} = \{\widetilde{W}^{(n_i)}_{s_i} = \pi_1^{-1}(W^{(n_i)}_{s_i}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ и $\widehat{W}^{(n_i)} = \{\widehat{W}^{(n_i)}_{s_i} = \pi_2^{-1}(W^{(n_i)}_{s_i}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ являются периодическими разбиениям динамической системы (X,f) длины n_i.

Динамическая система (X,f) неразложима, поэтому из следствия 1.1 и замечания 1.12 заключаем, что $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widehat{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — согласованные правильные последовательности периодических разбиений этой динамической системы.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ — разбиения пространства X, индуцированные соответственно последовательностями $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widehat{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. По следствию 3.2 разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Набор множеств $\{\widetilde{W}^{(n_i)}_{s_i} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ является прообразом базы топологии $\{W^{(n_i)}_{s_i} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ под действием проекции π_1, поэтому разбиения $\operatorname{zer}\pi_1$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Аналогично, разбиения $\operatorname{zer}\pi_2$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ совпадают. $\square$

Доказательство леммы 3.4. Пусть $h : (X, f) \to (X, f)$ — морфизм.

Так как динамическая система (A, g) минимальна, то морфизм $\pi_2 \circ h : (X, f) \to (A, g)$ является проекцией. Из леммы 3.3 следует, что $\operatorname{zer}\pi_1 = \operatorname{zer}\pi_2 \circ h$. Для завершения доказательства нам остается применить лемму 0.2 к морфизмам $\varphi_1 = \pi_1$ и $\varphi_2 = \pi_2 \circ h$. $\square$

Доказательство предложения 3.12. (A_1, g_1) — минимальная динамическая система, поэтому она неразложима.

Фиксируем $y \in A_2$ и $x_1 \in \pi_1^{-1}(y)$. Пусть $x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y))$. Рассмотрим морфизм $h_{x_1,x_2} : (A_1, g_1) \to (A_1, g_1)$. Из леммы 3.4 следует, что корректно определен морфизм $\operatorname{fact}\pi_2 \circ h_{x_1,x_2} : (A_2, g_2) \to (A_2, g_2)$, и справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{fact}\pi_2 \circ h_{x_1,x_2}(y) &= (\operatorname{fact}\pi_2 \circ h_{x_1,x_2}) \circ \pi_1(x_1) = \\ &= \pi_2 \circ h_{x_1,x_2}(x_1) = \pi_2(x_2) = h(y) \,. \end{aligned}$$

Поэтому из следствия 3.6 заключаем, что $\operatorname{fact}\pi_2 \circ h_{x_1,x_2} = h$ и $\mathcal{F} \supseteq \{h_{x_1,x_2} \mid x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y))\}$.

С другой стороны, для любого $f \in \mathcal{F}$ должно выполняться соотношение $f(x_1) \in f(\pi_1^{-1}(y)) = \pi_2^{-1}(h(y))$ (см. лемму 3.3). Из следствия 3.6 получим $f = h_{x_1,f(x_1)}$ и $\mathcal{F} \subseteq \{h_{x_1,x_2} \mid x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y))\}$. $\square$

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{K}_0$, объектами которой являются все динамические системы, топологически сопряженные с одометрами.

Следствие 3.7. *Категория $\mathcal{A}$ обладает свойствами* **LU** *и* **LD**.

Доказательство. **1.** Выполнение условия **LU** следует из предложения 3.12, если $\pi_1 = \pi_2 = \alpha$, и из следствия 3.6.

2. Выполнение условия **LD** следует из леммы 3.4, если (X, f) и (A, g) топологически сопряжены с одометрами и $\pi_1 = \pi_2 = \alpha$, и из следствия 3.6. □

Фиксируем скелет $\mathcal{A}_0$ категории $\mathcal{A}$.

Замечание 3.11. *Из теоремы 3.3 и замечания 3.5 следует, что для каждого $N \in \Sigma$ категория $\mathcal{A}_0$ содержит ровно один объект (A, g), такой что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.*

Замечание 3.12. *Из теоремы 3.1 заключаем, что для любых двух объектов (A_1, g_1) и (A_2, g_2) категории $\mathcal{A}_0$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$;
(ii) $H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) \neq \varnothing$.

Воспользуемся предложением 3.11 и построим по категории $\mathcal{A}_0$ категорию $\overline{\mathcal{A}_0}$.

Из леммы 3.4 и следствия 3.6 получим

Следствие 3.8. *Пусть (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_0$.*
Если π_1, $\pi_2 \in H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$, то $[\pi_1] = [\pi_2]$.

Теперь из замечания 3.12 имеем

Следствие 3.9. *Пусть (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0}$.*
Тогда

(i) *если $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то мощность множества $H_{\overline{\mathcal{A}_0}}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ равна единице;*
(ii) *$H_{\overline{\mathcal{A}_0}}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \varnothing$, в противном случае.*

Построим по частично упорядоченному множеству Σ категорию $\mathfrak{L}(\Sigma)$, объектами которой являются элементы множества Σ, а морфизмами — всевозможные пары элементов

(M,N), в которых $M \geq N$. Для любых двух элементов M, $N \in \Sigma$ множество $H_{\mathfrak{L}(\Sigma)}(M,N)$ состоит из одного морфизма (M,N), если $M \geq N$ и является пустым — в противном случае.

Замечание 3.11 и следствие 3.9 дают нам следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Соответствие* $\Psi_0 : \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}(\Sigma)$,

$$\Psi_0 : (A,g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A,g))\,, \quad (A,g) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0}\,,$$

однозначно продолжается до функтора $\Psi : \overline{\mathcal{A}_0} \to \mathfrak{L}(\Sigma)$.

Функтор Ψ *задает изоморфизм категорий* $\overline{\mathcal{A}_0}$ *и* $\mathfrak{L}(\Sigma)$.

3.6. **Расширения одометров. Общий случай.** Пусть (X,f) — динамическая система с хаусдорфовым компактным фазовым пространством.

Напомним, что для любого одометра $(A,g) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ в категории $\mathcal{K}_0$ существует морфизм $h : (X,f) \to (A,g)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X,f))$ (см. теорему 3.1).

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}(X,f)$ категории $\mathcal{A}$, объектами которой являются динамические системы $(A,g) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X,f))$.

Из замечания 3.11 следует, что категория $\mathcal{A}(X,f)$ обладает свойствами **LU** и **LD**.

Фиксируем скелет $\mathcal{A}_0(X,f)$ категории $\mathcal{A}(X,f)$ и, воспользовавшись предложением 3.11, построим категорию $\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}$.

Точно так же, как и следствие 3.9, доказывается

Предложение 3.13. *Для* (A_1,g_1), $(A_2,g_2) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}$ *справедливы утверждения*

(i) *если* $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, *то мощность множества* $H_{\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ *равна единице;*

(ii) $H_{\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \varnothing$, *в противном случае.*

Рассмотрим подмножество $\Sigma(X, f) = \{N \in \Sigma \mid N \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))\}$ множества $(\Sigma, \leq)$ и построим по этому частично упорядоченному множеству категорию $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Так же, как и теорема 3.4, доказывается

Теорема 3.5. *Соответствие*

$$\Psi_0(X, f) : \operatorname{Ob}\overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \to \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) \ ,$$

$$\Psi_0(X, f) : (A, g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A, g)) \ , \quad (A, g) \in \operatorname{Ob}\overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \ ,$$

однозначно продолжается до функтора

$$\Psi(X, f) : \overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \to \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) \ .$$

Функтор $\Psi(X, f)$ *представляет собой изоморфизм категорий* $\overline{\mathcal{A}_0(X, f)}$ *и* $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Определим категорию $\mathfrak{B}(X, f)$ следующим образом:

— объектами $\mathfrak{B}(X, f)$ являются пары $(h, (A, g))$, где $(A, g) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}(X, f)$, $h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}_0}((X, f), (A, g))$;

— для любых $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X, f)$ множество $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ состоит из всех троек $((h_1, (A_1, g_1)), \pi, (h_2, (A_2, g_2)))$, таких что $\pi \in H_{\mathcal{A}(X,f)}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ и $h_2 = \pi \circ h_1$.

Корректность этого определения проверяется непосредственно.

Лемма 3.5. *Для* $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X, f)$ *справедливы утверждения*

(i) *в множестве* $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ *содержится не более одного элемента;*

(ii) *если множество* $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A_1,g_1)),(h_2,(A_2,g_2)))$ *не пусто, то* $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$.

Доказательство. (i) Пусть π_1, $\pi_2 : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$ — два морфизма, такие что $h_2 = \pi_1 \circ h_1 = \pi_2 \circ h_1$.

Пусть $x \in X$. Тогда $h_2(x) = \pi_1(h_1(x)) = \pi_2(h_1(x))$. Так как динамическая система (A_1,g_1) минимальна, то из замечания 3.9 следует, что $\pi_1 = \pi_2$.

(ii) Это утверждение непосредственно следует из теоремы 3.1. □

Лемма 3.6. *Пусть* $(h,(A,g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$, $N \in \Sigma(X,f)$ *и выполняется неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq N$.

Тогда найдется $(h_1,(A_1,g_1)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$, *такое что*

(i) $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = N$;

(ii) $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A_1,g_1)),(h,(A,g))) \neq \varnothing$.

Доказательство. По условию леммы и по определению множества $\Sigma(X,f)$ справедливы неравенства $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq N \leq \Phi(\mathcal{P}(X,f))$.

Из предложения 2.1 следует, что существует единственное допустимое множество $Q \in \mathbb{N}$, такое что $\Phi(Q) = N$. Так как множества $\mathcal{P}(A,g)$ и $\mathcal{P}(X,f)$ допустимы (см. замечание 2.6), то из леммы 2.1 получим цепочку включений $\mathcal{P}(A,g) \subseteq Q \subseteq \mathcal{P}(X,f)$.

Воспользуемся предложением 2.2 и найдем правильные последовательности $\{n_i \in \mathcal{P}(A,g)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{m_j \in Q\}_{j\in\mathbb{N}}$, такие что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A,g))$ и $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(Q) = N$.

Фиксируем правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A,g). Рассмотрим прообразы $W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = h^{-1}(V^{(n_i)}_{s_i})\}_{s_i\in\mathbb{Z}_{n_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений последовательности

$\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Из предложения 3.7, определения 1.6 и следствий 1.5 и 1.6 заключаем, что $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$. Согласно предложению 3.8, набор множеств $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому разбиение $\mathfrak{H}$ совпадает с разбиением $\operatorname{zer} h$.

Воспользуемся предложением 1.8 и замечанием 1.6 и построим когерентную последовательность $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f), согласованную с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$. Учитывая замечание 3.4, имеем коммутативную диаграмму (см. соотношение (3.4))

$$\begin{array}{ccc} (X, f) & \xrightarrow{F} & (A_1, g_1) \\ {\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\| \\ (X/\widetilde{\mathfrak{H}}, \widetilde{f}) & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & (A_1, g_1) \end{array} \tag{3.8}$$

В этой диаграмме (A_1, g_1) — одометр, F — проекция, $\operatorname{fact} F$ — гомеоморфизм и

$$\Phi(\mathcal{P}(X/\widetilde{\mathfrak{H}}, \widetilde{f})) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = N\,.$$

Из следствия 3.2 заключаем, что разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}} = \operatorname{zer} F$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H} = \operatorname{zer} h$ пространства X. Обозначим $h_1 = F$. Применяя теперь лемму 0.2 к проекциям $\varphi_1 = h_1$ и $\varphi_2 = h$, заключаем, что найдется $\psi \in H_{\mathcal{K}_0}((A_1, g_1), (A, g))$, для которого $h = \psi \circ h_1$. $\square$

Определим “забывающий” функтор

$$\Theta : \mathfrak{B}(X,f) \to \mathcal{A}(X,f)$$

при помощи соотношений

$$\Theta : (h,(A,g)) \mapsto (A,g)\,, \quad (h,(A,g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$$
$$\Theta : ((h_1,(A_1,g_1)),\pi,(h_2,(A_2,g_2))) \mapsto \pi\,,$$
$$((h_1,(A_1,g_1)),\pi,(h_2,(A_2,g_2))) \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{B}(X,f))\,.$$

Рассмотрим полный прообраз $\mathfrak{B}'(X,f)$ скелета $\mathcal{A}_0(X,f)$ под действием функтора Θ. Непосредственная проверка показывает, что $\mathfrak{B}'(X,f)$ является полной подкатегорией категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Замечание 3.13. *Пусть $\mathfrak{L}'$ — полная подкатегория категории $\mathfrak{L}$. Пусть A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}'$. По определению $H_{\mathfrak{L}'}(A,B) = H_{\mathfrak{L}}(A,B)$.*

Следовательно, объекты A и B изоморфны в $\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда, когда они изоморфны в $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ — скелет категории $\mathfrak{B}'(X,f)$. Очевидно, $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ — полная подкателогия категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Предложение 3.14. *Категория $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ является скелетом категории $\mathfrak{B}(X,f)$.*

Доказательство. Из определения категории $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и замечания 3.13 следует, что эта подкатегория содержит не более чем по одному представителю из каждого классса изоморфных объектов категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Докажем, что для каждого $(h,(A,g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$ найдется изоморфный ему объект, лежащий в $\mathfrak{B}'_0(X,f)$.

Рассмотрим $(A,g) = \Theta(h,(A,g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}(X,f)$. Подкатегория $\mathcal{A}_0(X,f)$ является скелетом категории $\mathcal{A}(X,f)$, поэтому существует ровно один объект $(A',g') \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_0(X,f)$, изоморфный (A,g). Пусть $\rho : (A,g) \to (A',g')$ — изоморфизм.

Обозначим $h' = \rho \circ h : (X,f) \to (A',g')$. Рассмотрим объект $(h',(A',g'))$ категории $\mathfrak{B}(X,f)$. Очевидно, $(h',(A',g')) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и $((h,(A,g)),\rho,(h',(A',g'))) \in \operatorname{Iso}\mathfrak{B}(X,f)$. $\square$

Зададим на классе $\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ бинарное отношение $\preceq$. Скажем, что

$$(h_1,(A_1,g_1)) \preceq (h_2,(A_2,g_2)) ,$$

если

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2,(A_2,g_2)),(h_1,(A_1,g_1))) \neq \varnothing .$$

Предложение 3.15. *Отношение $\preceq$ является отношением частичного порядка и справедливы следующие утверждения:*

(i) *каждый элемент $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ мажорируется некоторым $(h',(A',g')) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A',g')) = \Phi(\mathcal{P}(X,f))$;*

(ii) *элемент $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ является максимальным относительно порядка $\preceq$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) = \Phi(\mathcal{P}(X,f))$.*

Перед тем, как приступить к доказательству предложения 3.15, мы докажем одну лемму.

Лемма 3.7. *Пусть $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и для некоторого $N \in \Sigma(X,f)$ справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq N$.*

Найдется такой объект $(h',(A',g')) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, что

(i) *$\Phi(\mathcal{P}(A',g')) = N$;*

(ii) *$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h',(A',g')),(h,(A,g))) \neq \varnothing$.*

Доказательство . Согласно лемме 3.6, найдется такой $(h_1, (A_1, g_1)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}(X, f)$, что $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = N$ и

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h, (A, g))) \neq \varnothing\,.$$

Из предложения 3.14 заключаем, что найдется объект $(h', (A', g'))$ категории $\mathfrak{B}_0'(X, f)$, изоморфный объекту $(h_1, (A_1, g_1))$. Из леммы 3.5 следует, что

$$\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = N\,.$$

Кроме того, $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h', (A', g')), (h, (A, g))) \neq \varnothing$ по построению. $\Box$

Доказательство предложения 3.15. По определению категории для каждого объекта $B \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}_0'(X, f)$ существует единичный морфизм 1_B, поэтому отношение $\preceq$ рефлексивно.

Композиция любой пары морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B')$ и $\beta \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B'')$ является элементом множества $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B'')$, следовательно отношение $\preceq$ транзитивно.

Пусть $\alpha \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B')$, $\beta \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B)$ для некоторых B, $B' \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}_0'(X, f)$. Согласно лемме 3.5 имеем $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B) = \{1_B\}$, $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B') = \{1_{B'}\}$. Следовательно, $\alpha\beta = 1_B$, $\beta\alpha = 1_{B'}$ и объекты B и B' изоморфны в категории $\mathfrak{B}(X, f)$. Так как $\mathfrak{B}_0'(X, f)$ — полная подкатегория в $\mathfrak{B}(X, f)$, то B и B' изоморфны в категории $\mathfrak{B}_0'(X, f)$ (см. замечание 3.13). Из сказанного заключаем, что отношение $\preceq$ антисимметрично.

Итак, $\preceq$ является отношением частичного порядка.

Утверждение (i) предложения 3.15 следует из леммы 3.7 и теоремы 3.1.

Докажем теперь утверждение (ii).

Пусть $(h, (A, g))$, $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}_0'(X, f)$. Пусть $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $(h, (A, g)) \preceq (h', (A', g'))$. Из леммы 3.5 и теоремы 3.1 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq$

$\Phi(\mathcal{P}(A', g')) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$. Следовательно, $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f)) = \Phi(\mathcal{P}(A, g))$ и любой морфизм $\rho : (A', g') \to (A, g)$ является изоморфизмом (см. теорему 3.3 и следствие 3.5).

Так как множество $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h', (A', g')), (h, (A, g)))$ не пусто по нашему предположению, то объекты $(h', (A', g'))$ и $(h, (A, g))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ изоморфны. Следовательно, $(h', (A', g')) = (h, (A, g))$ (см. предложение 3.14) и $(h, (A, g))$ — максимальный элемент относительно порядка $\preceq$.

Пусть теперь $(h, (A, g))$ — максимальный элемент относительно порядка $\preceq$. Из утверждения (i) предложения 3.15 и теоремы 3.1 получим равенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$. $\square$

По определению

$$\Theta(\operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)) = \operatorname{Ob} \mathcal{A}_0(X, f) = \operatorname{Ob} \overline{\mathcal{A}_0(X, f)}\,,$$

следовательно корректно определено отображение

$$\Lambda_0 = \Psi_0 \circ \Theta : \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f) \to \operatorname{Ob} \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) = (\Sigma(X, f), \leq)\,.$$

Из леммы 3.5 и предложения 3.15 получаем

Следствие 3.10. *Отображение Λ_0 сохраняет отношение порядка.*

Полный прообраз $\Lambda_0^{-1}(\Phi(\mathcal{P}(X, f)))$ наибольшего элемента множества $(\Sigma(X, f), \leq)$ совпадает с классом всех максимальных элементов из $(\operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f), \preceq)$.

Из определения категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$, леммы 3.5 и следствия 3.10 получим

Следствие 3.11. *Отображение*

$$\Lambda_0 : \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f) \to \operatorname{Ob} \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$$

однозначно продолжается до функтора

$$\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X, f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) \ .$$

Для любых двух объектов $B,\ B' \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}'_0(X, f)$ *отображение*

$$\Lambda_{B,\,B'} : H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(B, B') \to H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(\Lambda(B), \Lambda(B'))$$

инъективно.

Замечание 3.14. *1). Из леммы 3.5 следует, что необходимым условием изоморфности двух объектов* $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$ *является равенство* $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

2). Из следствия 3.5 получаем такое утверждение: если выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, *то объекты* $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда хотя бы одно из множеств*

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2))) \ ,$$
$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1)))$$

не пусто.

3.7. **Расширения одометров. Неразложимые динамические системы.** У нас возникает естественное желание как-то “сравнить” категории $\mathfrak{B}(X, f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Ниже мы увидим, что в том случае, когда динамическая система (X, f) неразложима, категория $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ изоморфна скелету категории $\mathfrak{B}(X, f)$ (и изоморфизм задается функтором Λ).

Если же динамическая система (X, f) не является неразложимой, вообще говоря непонятно, как “сравнивать” категории $\mathfrak{B}(X, f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$, как показывает следующая

Лемма 3.8. *Пусть* $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}_0'(X,f)$, $N \in \Sigma(X,f)$ *и справедливо строгое неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \lneqq N$.

Объект $(h',(A',g')) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}_0'(X,f)$, *удовлетворяющий лемме 3.7, определен однозначно тогда и только тогда, когда динамическая система* (X,f) *неразложима.*

Доказательство. 1). Предположим, что динамическая система (X,f) неразложима.

Пусть $(h_1,(A_1,g_1))$, $(h_2,(A_2,g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}_0'(X,f)$, $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2)) = N$ и $(h,(A,g)) \preceq (h_i,(A_i,g_i))$, $i=1,2$.

Так как $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$, то динамические системы (A_1,g_1) и (A_2,g_2) топологически сопряжены. Мы фиксируем изоморфизм $\rho : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$.

Из замечания 3.8 и леммы 3.4 заключаем, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
(X,f) \arrow[r, equal] \arrow[d, "h_1"'] & (X,f) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho^{-1}\circ h_2"'] & (X,f) \arrow[d, "h_2"] \\
(A_1,g_1) \arrow[r, "\mathrm{fact}(\rho^{-1}\circ h_2)"'] & (A_1,g_1) \arrow[r, "\rho"'] & (A_2,g_2)
\end{tikzcd}$$

Согласно следствию 3.5, отображение $\rho \circ \mathrm{fact}(\rho^{-1}\circ h_2) : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$ является изоморфизмом.

Так как $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ скелет категории $\mathfrak{B}(X,f)$, то справедливо равенство $(h_1,(A_1,g_1)) = (h_2,(A_2,g_2))$.

2). Пусть теперь динамическая система (X,f) не является неразложимой.

Обозначим $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) = M \in \Sigma(X,f)$. Так как $M \lneqq N$ по условию леммы, то найдется простое $p \in \mathcal{S}$, такое что $M_p \lneqq N_p$. Из этого следует, что $M_p \neq \infty$. Пусть $M_p = k$. Тогда $N_p \geq k+1$.

Фиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = M$ (см. предложение 2.2). Из определения функции Φ следует, что

— $n_i = p^{k_i}a_i$, $k_i \le k$, НОД$(a_i, p) = 1$, $i \in \mathbb{N}$;
— существует такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что $k_{i_0} = k$.

Так как последвательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ правильная, то $k_i = k$ для всех $i \ge i_0$. Не ограничивая общности рассуждений (см. следствие 2.1), можно считать что

$$n_i = p^k a_i\,, \quad \text{НОД}(a_i, p) = 1\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Еще раз воспользуемся следствием 2.1 и будем считать, что $n_1 = p^k$.

Фиксируем правильную последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = N$ (см. начало доказательства леммы 3.6). Последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ правильная и $N_p \ge k+1$, поэтому найдется $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что m_j делится на p^{k+1} для каждого $j \ge j_0$.

Вновь пользуясь следствием 2.1, можно считать, что m_j делится на p^{k+1} для всех $j \in \mathbb{N}$ и $m_1 = p^{k+1}$.

Фиксируем правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A, g). Рассмотрим прообразы $W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = h^{-1}(V^{(n_i)}_{s_i})\}_{s_i\in\mathbb{Z}_{n_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений последовательности $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.6, заключаем, что $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f) и разбиение $\mathfrak{H}$ пространства X, индуцированое этой последовательностью, совпадает с разбиением $\operatorname{zer} h$.

Так как $N \le \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ по условию леммы, то существует когерентная правильная последовательность

$\{U^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X,f), согласованая с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ (см. предложение 1.8).

Мы предположили, что динамическая система (X,f) не является неразложимой. Поэтому, найдется разбиение $X = X_1 \coprod X_2$ пространства X на два инвариантных замкнутых подмножества X_1 и X_2.

Наборы множеств $\{P_{s_1}^{(m_1)} = U_{s_1}^{(m_1)} \cap X_1\}_{s_1\in\mathbb{Z}_{m_1}}$ и $\{Q_{s_1}^{(m_1)} = U_{s_1}^{(m_1)} \cap X_2\}_{s_1\in\mathbb{Z}_{m_1}}$ являются периодическими разбиениями динамических систем $(X_1, f|_{X_1})$ и $(X_2, f|_{X_2})$, соответственно (см. замечание 1.3 и доказательство предложения 1.3). Поэтому набор множеств

$$\widetilde{U}_{s_1}^{(m_1)} = P_{s_1}^{(m_1)} \cup f^{n_1}(Q_{s_1}^{(m_1)}) = P_{s_1}^{(m_1)} \cup f^{p^k}(Q_{s_1}^{(m_1)}), \quad s_1 \in \mathbb{Z}_{m_1} ,$$

является периодическим разбиением динамической системы (X,f) длины $m_1 = p^{k+1}$ (см. доказательство предложения 1.3).

Периодические разбиения $U^{(m_1)}$ и $W^{(n_1)}$ согласованы и n_1 делит m_1, следовательно, найдется $\tau \in \mathbb{Z}_{n_1}$, такое что $U_0^{(m_1)} = P_0^{(m_1)} \cup Q_0^{(m_1)} \subseteq W_\tau^{(n_1)}$ (см. следствие 1.6).

Заметим, что так как $f : X \to X$ — гомеоморфизм, то

$$\begin{aligned} f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)} \cap W_\tau^{(n_1)}) = \\ = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) \cap f^{n_1}(W_\tau^{(n_1)}) = \\ = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) \cap W_\tau^{(n_1)} \subseteq W_\tau^{(n_1)} . \end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{U}_0^{(m_1)} \subseteq W_\tau^{(n_1)}$. Из следствия 1.5 делаем вывод, что периодические разбиения $\widetilde{U}^{(m_1)}$ и $W^{(n_1)}$ согласованы.

Применяя индуктивно предложение 1.7 и замечание 1.6, получим когерентную последовательность $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X,f), согласованную с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Пусть $\mathfrak{T}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$ — разбиения пространства X, индуцированные последовательностями $\{U^{(m_j)}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$, соответственно.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.6, найдем $(h_1,(A'_1,g'_1))$, $(h_2,(A'_2,g'_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X,f)$, для которых $\mathfrak{T} = \operatorname{zer} h_1$, $\widetilde{\mathfrak{T}} = \operatorname{zer} h_2$ и

$$h_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_i,(A'_i,g'_i)),(h,(A,g))) \neq \varnothing\,, \quad i=1,2\,.$$

Найдем $(\pi_1,(A_1,g_1))$, $(\pi_2,(A_2,g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, которые изоморфны объектам $(h_1,(A'_1,g'_1))$ и $(h_2,(A'_2,g'_2))$ соответственно. Очевидно,

$$h_{\mathfrak{B}(X,f)}((\pi_i,(A_i,g_i)),(h,(A,g))) \neq \varnothing\,, \quad i=1,2\,.$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости неравенства $(\pi_1,(A_1,g_1)) \neq (\pi_2,(A_2,g_2))$, нам достаточно показать, что объекты $(h_1,(A'_1,g'_1))$ и $(h_2,(A'_2,g'_2))$ не изоморфны. Воспользуемся для этого замечанием 3.14 (напомним, что $\Phi(\mathcal{P}(A'_1,g'_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A'_2,g'_2)) = N$ по построению, следовательно, динамические системы (A'_1,g'_1) и (A'_2,g'_2) топологически сопряжены).

Проверим равенство

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A'_1,g'_1)),(h_2,(A'_2,g'_2))) = \varnothing\,. \tag{3.9}$$

Предположим, что это равенство не верно и существует морфизм $\alpha : (h_1,(A'_1,g'_1)) \to (h_2,(A'_2,g'_2))$. Тогда морфизм $\widetilde{\alpha} = \Theta(\alpha) : (A'_1,g'_1) \to (A'_2,g'_2)$ является изоморфизмом (см. следствие 3.5). Следовательно, $\operatorname{zer}(\widetilde{\alpha}\circ h_1) = \operatorname{zer} h_1$. Так как $h_2 = \widetilde{\alpha}\circ h_1$ по определению, то $\widetilde{\mathfrak{T}} = \operatorname{zer} h_2 = \operatorname{zer}(\widetilde{\alpha}\circ h_1) = \operatorname{zer} h_1 = \mathfrak{T}$.

С другой стороны, последовательности $\{U^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ не являются согласованными. Действительно, по построению $\varnothing \neq U_0^{(m_1)} \cap \widetilde{U}_0^{(m_1)} = P_0^{(m_1)} \subseteq X_1$, следовательно

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U_0^{(m_1)} \cap \widetilde{U}_0^{(m_1)}) \subseteq X_1$$

и периодические разбиения $U^{(m_1)}$ и $\widetilde{U}^{(m_1)}$ не согласованы. Поэтому из следствия 3.2 заключаем, что $\mathfrak{T} \neq \widetilde{\mathfrak{T}}$.

Полученное противоречие доказывает равенство (3.9).

Равенство

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2,(A_2',g_2')),(h_1,(A_1',g_1'))) = \varnothing$$

доказывается аналогично. $\square$

Замечание 3.15. *Очевидно, множество* $(\Sigma,\leq)$ *обладает наименьшим элементом* $E = (E_p = 0)_{p\in\mathcal{S}} = \Phi_0(1)$.

Следовательно, объект E *является правым нулем категории* $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ *для любой динамической системы* (X,f).

В категории $\mathcal{A}_0(X,f)$ *элементу* E *соответствует динамическая система* $(\{pt\},Id)$ *с фазовым пространством, состоящим из одной точки (соответствует в том смысле, что* $\Phi(\mathcal{P}(\{pt\},Id)) = E$*).*

Предложение 3.16. *Категория* $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ *обладает правым нулем* $0_R \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}_0'(X,f)$.

Доказательство. Очевидно, существует ровно одна проекция $\pi_0 : X \to \{pt\}$ и она удовлетворяет соотношению $\pi_0 \circ f = Id \circ \pi_0$. Обозначим $0_R = (\pi_0,(\{pt\},Id))$.

Пусть $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}_0'(X,f)$. Очевидно, однозначно определена проекция $\pi : A \to \{pt\}$ и для нее выполняются соотношения $\pi \circ g = Id \circ \pi$ и $\pi \circ h = \pi_0 : (X, f) \to (\{pt\}, Id)$. $\square$

Замечание 3.16. *Так как любые два различных объекта категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ не изоморфны (по определению скелета категории), то правый ноль определен однозначно.*

Теперь из леммы 3.8 мы можем извлечь следующие утверждения.

Следствие 3.12. *Пусть $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $N \in \Sigma(X, f)$ и $N \neq E$.*

Найдется $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$, и эквивалентны следующие утверждения:

(i) *объект $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, такой что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$, определен однозначно;*
(ii) *динамическая система (X, f) неразложима.*

Доказательство. Применим леммы 3.7 и 3.8 к объекту $0_R \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ и числу $N \in \Sigma(X, f)$. $\square$

Замечание 3.17. *Следствие 3.12 допускает другую формулировку:*

— *отображение $\Lambda_0 : \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f) \to \operatorname{Ob} \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ сюръективно;*
— *если $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, то инъективность отображения Λ_0 эквивалентна тому, что динамическая система (X, f) неразложима.*

Следствие 3.13. *Если динамическая система (X, f) неразложима, то для любых двух объектов $(h_1, (A_1, g_1))$ и $(h_2, (A_2, g_2))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ неравенство*

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing$$

выполняется тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \le \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Доказательство. Пусть

$$(h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)\,.$$

Если $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing$, то из леммы 3.5 следует, что $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \le \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Пусть теперь $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \le \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$. Воспользуемся леммой 3.7 и найдем $(h'_2, (A'_2, g'_2)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A'_2, g'_2)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$ и

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h'_2, (A'_2, g'_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing\,.$$

Равенство $(h'_2, (A'_2, g'_2)) = (h_2, (A_2, g_2))$ получается из следствия 3.12. □

Лемма 3.9. *Пусть* $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *категория* $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ *обладает левым нулем* $0_L \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$*;*

(ii) *динамическая система* (X, f) *неразложима.*

Доказательство. 1). Предположим, что динамическая система (X, f) неразложима.

Из следствия 3.12 вытекает, что существует единственный объект $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, для которого выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Теорема 3.1 гарантирует нам, что для любого объекта $(h', (A', g'))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) \le \Phi(\mathcal{P}(A, g))$. Теперь следствие 3.13 и лемма 3.5 показывают, что множество

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h, (A, g)), (h', (A', g')))$$

содержит ровно один элемент для каждого $(h', (A', g')) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}'_0(X, f)$, следовательно $(h, (A, g))$ левый нуль категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$.

2). Пусть динамическая система (X, f) не является неразложимой.

Предположим, что существует левый ноль $(h, (A, g))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$. Из теоремы 3.1 и леммы 3.5 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Из следствия 3.12 вытекает, что в категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ существует другой объект $(h', (A', g'))$, для которого выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

$\mathfrak{B}'_0(X, f)$ — скелет категории $\mathfrak{B}(X, f)$ (см. предложение 3.14), поэтому объекты $(h', (A', g'))$ и $(h, (A, g))$ не изоморфны в категории $\mathfrak{B}(X, f)$. Из замечания 3.14 следует, что

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h, (A, g)), (h', (A', g'))) = \varnothing$$

и объект $(h, (A, g))$ не может быть левым нулем категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$.

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 3.6. *Пусть $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $\mathfrak{B}_0(X, f)$ — скелет категории $\mathfrak{B}(X, f)$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *динамическая система (X, f) неразложима;*
(ii) *категории $\mathfrak{B}_0(X, f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ изоморфны.*

Доказательство. По определению, категория $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ обладает левым нулем $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$. Следовательно, необходимым условием изоморфности категорий $\mathfrak{B}_0(X, f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ является существование левого нуля в категории $\mathfrak{B}_0(X, f)$.

Подкатегория $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ является скелетом категории $\mathfrak{B}(X,f)$ (см предложение 3.14), следовательно, она изоморфна скелету $\mathfrak{B}_0(X,f)$. Если динамическая система (X,f) не является неразложимой, то из леммы 3.9 заключаем, что в категории $\mathfrak{B}_0(X,f)$ нет левого нуля и она не изоморфна категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Пусть теперь (X,f) — неразложимая динамическая система. Докажем, что функтор $\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X,f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ (см. следствие 3.11) задает изоморфизм между категориями $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Из замечания 3.17 следует биективность отображения $\Lambda_0 : \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f) \to \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Пусть $M,\ N \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$. Из следствия 3.13 заключаем, что неравенства

$$H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N)) \neq \varnothing$$

эквивалентны. Так как множества морфизмов $H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N)$ и $H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N))$ содержат не более чем по одному элементу (см. определение категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ и лемму 3.5), то отображение

$$\Lambda_{\Lambda_0^{-1}(M),\,\Lambda_0^{-1}(N)} : \\ : H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N)) \to H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N)$$

биективно для любой пары $M,\ N \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Итак, $\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X,f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ задает изоморфизм категорий $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$. Следовательно, категории $\mathfrak{B}_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ также изоморфны. $\square$

3.8. **Расширения одометров и почти периодические точки.**

Предложение 3.17. *Пусть* $(A,g) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}(X,f)$.

Пусть существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такая что для некоторого $x \in X$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *точка $x \in X$ почти периодическая точка динамической системы (X, f);*

(ii) *для любой точки $y \in X$ выполняется включение $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y) \cap \omega(y)$ (следовательно, $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ — единственное минимальное множество динамической системы (X, f), в частности динамическая система (X, f) неразложима;*

(iii) $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$;

(iv) *для любой проекции $\pi' : (X, f) \to (A', g')$, $(A', g') \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, следующие условия эквивалентны:*

a) $(\pi')^{-1}(\pi'(x)) = \{x\}$,

b) $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$;

(v) *если динамическая система (X, f) минимальна, то для каждой почти периодической точки $y \in X$ динамической системы (X, f) выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.*

Прежде, чем доказывать предложение 3.17 и извлекать из него следствия, докажем три леммы.

Лемма 3.10. *Рассмотрим два объекта (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, и морфизм $h : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$.*

Если найдется $x \in A_1$, для которого $h^{-1}(h(x)) = \{x\}$, то $h \in \mathrm{Iso}\,A$.

Доказательство . Так как (A_2, g_2) — минимальная динамическая система (см. замечание 3.2), то h — проекция (см. замечание 3.8).

Пусть $y \in A_1$. Обозначим через $H(y)$ элемент разбиения $\mathrm{zer}\,h$ пространства A_1, содержащий y.

Из следствия 3.6 нам известно, что существует единственный изоморфизм $h_{y,x} : (A_1, g_1) \to (A_1, g_1)$, такой что $h_{y,x}(y) = x$. Рассмотрим проекцию $\widetilde{h} = h \circ h_{y,x} : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$. Обозначим через $\widetilde{H}(y)$ элемент разбиения $\operatorname{zer} \widetilde{h}$ пространства A_1, содержащий y.

Пусть $z = h(x) \in A_2$. Ясно, что

$$\widetilde{h}^{-1}(z) = h_{y,x}^{-1}(h^{-1}(z)) = h_{y,x}^{-1}(x) = \{y\} = \widetilde{H}(y) \,.$$

Динамическая система (A_2, g_2) минимальна, поэтому она неразложима. Из леммы 3.3 заключаем, что $\operatorname{zer} h = \operatorname{zer} \widetilde{h}$. Следовательно, $h^{-1}(h(y)) = H(y) = \widetilde{H}(y) = \{y\}$. $\square$

Лемма 3.11. *Пусть динамическая система (X, f) минимальна и $x \in X$ — почти периодическая точка этой динамической системы.*

Тогда существуют одометр $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ и проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Доказательство. Зафиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, и правильную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x \in W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. замечание 1.6).

Пусть $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ и пусть

$$F : (X, f) \to (X/\mathfrak{H}, \overline{f}) = (A, g)$$

— проекция на динамическую систему $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ (см. соотношение (3.4), замечание 3.4 и предложение 3.3). Тогда $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Так как $\operatorname{zer} F = \mathfrak{H}$, то для завершения доказательства нам достаточно проверить равенство

$$\{x\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Предположим, что это равенство не выполняется и найдется $y \neq x$, такое что

$$y \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Пространство X хаусдорфово, поэтому найдется замкнутая окрестность $U \subseteq X \setminus \{y\}$ точки x. Так как точка x почти периодическая, то из леммы 1.5 заключаем, что найдется $m \in \mathcal{P}(X, f)$ и периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m)}$ динамической системы (X, f), такое что $x \in \widetilde{W}_0^{(m)} \subseteq U$.

Очевидно, постоянная последовательность $\{m_j = m\}_{j\in\mathbb{N}}$ является правильной. Из леммы 2.1 заключаем, что

$$\Phi_0(m) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f)) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}).$$

Поэтому из предложения 2.3 следует, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $m_1 = m$ делит n_k.

Динамическая система (X, f) минимальна, поэтому она неразложима. Из следствия 1.1 вытекает, что периодические разбиения $\widetilde{W}^{(m)}$ и $W^{(n_k)}$ согласованы, поэтому (см. следствие 1.6) имеет место включение

$$x \in W_0^{(n_k)} \subseteq \widetilde{W}_0^{(m)} \subseteq U \subseteq X \setminus \{y\}$$

и

$$y \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 3.12. *Пусть $x \in Y_1$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_1, h_1). Пусть $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ — проекция.*

Тогда $y = \pi(x) \in Y_2$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_2, h_2).

Доказательство. Пусть $U \subseteq Y_2$ — открытая окрестность точки y. Так как отображение $\pi : Y_1 \to Y_2$ непрерывно, то $V = \pi^{-1}(U)$ — открытая окрестность почти периодической точки x. Следовательно, существует $n(V) \in \mathbb{N}$, такое что

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_1^{kn(V)}(x) \subseteq V\ .$$

Тогда

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_2^{kn(V)}(y) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_2^{kn(V)} \circ \pi(x) = \\ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \pi \circ h_1^{kn(V)}(x) \subseteq \pi(V) = U\ .$$

Из произвола в выборе окрестности U следует, что $y = \pi(x)$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_2, h_2). $\square$

Доказательство предложения 3.17. **(i)** Фиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g))$. Построим правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A, g). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $z = \pi(x) \in V_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. замечание 1.6).

Согласно предложению 3.8 набор множеств $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\ i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому

$$\{z\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_0^{(n_i)} \ .$$

Кроме того, так как последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ правильная, то $V_0^{(n_{i+1})} \subseteq V_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. следствие 1.6).

Рассмотрим прообразы $\{W_{s_i}^{(n_i)} = \pi^{-1}(V_{s_i}^{(n_i)}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $W_0^{(n_{i+1})} \subseteq W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, и

$$\{x\} = \pi^{-1}(z) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_0^{(n_i)} \ .$$

Из предложения 3.7 и следствия 1.5 делаем вывод, что $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $U \subseteq X$ — открытая окрестность точки x. Так как пространство X компактно, то все множества $W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, компактны. Применяя лемму 3.2, найдем $k \in \mathbb{N}$, такое что $x \in W_0^{(n_k)} \subseteq U$.

По определению периодического разбиения имеем

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^{mn_k}(x) \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^{mn_k}(W_0^{(n_k)}) = W_0^{(n_k)} \subseteq U \ .$$

Из-за произвола в выборе окрестности U точка x является почти периодической.

(ii) Пусть $y \in X$, $t = \pi(y) \in A$. Так как динамическая система (A, g) минимальна (см. замечание 3.2), то $\alpha(t) = \omega(t) = \overline{\mathrm{Orb}_g(t)} = A$. Следовательно, найдется монотонная неограниченно возрастающая последовательность чисел $\{n_i \in \mathbb{Z}\}_{i \in \mathbb{N}}$, такая что $z = \pi(x) = \lim_{i \to \infty} g^{n_i}(t)$.

Рассмотрим последовательность $\{f^{n_i}(y) \in X\}_{i\in\mathbb{N}}$. Пространство X компактно, поэтому эта последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку $x' \in X$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $x' = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(y)$. Следовательно, $x' \in \omega(y)$.

С другой стороны, $\pi \circ f^{n_i}(y) = g^{n_i} \circ \pi(y) = g^{n_i}(t)$, следовательно

$$\pi(x') = \lim_{i\to\infty} \pi \circ f^{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} g^{n_i}(t) = \pi(x)$$

и $x = x' \in \omega(y)$. Так как $\omega(y)$ — замкнутое инвариантное множество динамической системы (X, f), то $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \omega(y)$.

Соотношение $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y)$ доказывается аналогично.

(iii) Рассмотрим $(\pi, (A, g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$. Из теоремы 3.1 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$. Применим лемму 3.6 и найдем $(\pi', (A', g')) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$, такой что $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и существует

$$h \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}((\pi', (A', g')), (\pi, (A, g)))\ .$$

Иными словами, существуют $(A', g') \in \mathcal{A}(X, f)$ и морфизм $h : (A', g') \to (A, g)$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi = h \circ \pi'$.

Из замечания 3.8 заключаем, что отображение $\pi' : X \to A'$ сюръективно. Следовательно для любого подмножества $B \subseteq A'$ выполняется равенство $\pi'((\pi')^{-1}(B)) = B$.

Пусть $z' = \pi'(x) \in A'$. Тогда $h(z') = h \circ \pi'(x) = z$. Имеет место цепочка равенств $(\pi')^{-1}(h^{-1}(z)) = \pi^{-1}(z) = \{x\}$, следовательно

$$h^{-1}(h(z')) = h^{-1}(z) = \pi'((\pi')^{-1}(h^{-1}(z))) = \{\pi'(x)\} = \{z'\}\ .$$

Применяя лемму 3.10, заключаем, что $h : (A', g') \to (A, g)$ — изоморфизм. Следовательно,

$$\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f)) .$$

(iv) То, что из условия **a)** следует условие **b)**, мы уже проверили в пункте (iii).

Пусть $(A'g') \in \mathcal{A}(X, f)$, $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi' : (X, f) \to (A', g')$ — проекция.

Динамическая система (X, f) неразложима (см. пункт (ii)), поэтому из леммы 3.8 следует, что объекты $(\pi', (A', g'))$ и $(\pi, (A, g))$ категории $\mathfrak{B}(X, f)$ изоморфны (напомним, что $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ скелет категории $\mathfrak{B}(X, f)$). Найдем изоморфизм $\rho : (A, g) \to (A', g')$, такой что $\pi' = \rho \circ \pi$. Кроме того, очевидно $\pi = \rho^{-1} \circ \pi'$. Применяя лемму 0.2, заключаем, что разбиения $\operatorname{zer} \pi$ и $\operatorname{zer} \pi'$ совпадают.

Множества $\pi^{-1}(\pi(x))$ и $(\pi')^{-1}(\pi'(x))$ являются элементами разбиений $\operatorname{zer} \pi$ и $\operatorname{zer} \pi'$ соответственно, и содержат точку x. Следовательно, $(\pi')^{-1}(\pi'(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

(v) Пусть динамическая система (X, f) минимальна и $y \in X$ — почти периодическая точка этой динамической системы.

Применяя лемму 3.11, найдем проекцию $\pi' : (X, f) \to (A', g')$, $(A', g') \in \mathcal{A}(X, f)$, такую что $(\pi')^{-1}(\pi')(y) = \{y\}$. Тогда меняя ролями проекции π и π', из пункта (iv) получим $(\pi)^{-1}(\pi)(y) = \{y\}$. $\square$

Определение 3.7. *Динамическая система* (Y_1, h_1) *называется* почти взаимно-однозначным расширением *динамической системы* (Y_2, h_2)*, если для некоторой проекции* $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *существует всюду плотное подмножество* $Q \subseteq Y_1$*, такое что для любого* $y \in Q$ *выполняется условие* $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Следствие 3.14 (см. [13]). *Динамическая система* (X, f) *является почти взаимно-однозначным расширением одометра тогда и только тогда, когда* $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ *для почти периодической точки* $x \in X$.

Доказательство . Пусть $\pi : (X, f) \to (Y, h)$ — проекция и для некоторой точки $x \in X$ справедливо равенство $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Заметим, что так как $f : X \to X$ и $h : Y \to Y$ — гомеоморфизмы, то для каждого $n \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\{x\} = \pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}(h^{-n} \circ \pi \circ f^n(x)) = \\ = (h^n \circ \pi)^{-1}(\pi \circ f^n(x)) = \\ = (\pi \circ f^n)^{-1}(\pi \circ f^n(x)) = f^{-n}(\pi^{-1}(\pi(f^n(x)))) ,\end{aligned}$$

следовательно

$$\{f^n(x)\} = f^n \circ f^{-n}(\pi^{-1}(\pi(f^n(x)))) = \pi^{-1}(\pi(f^n(x))) .$$

Иными словами, для каждого $y \in \mathrm{Orb}_f(x)$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Если динамическая система (X, f) минимальна, то $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ и динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением динамической системы (Y, h).

1. Пусть $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ для некоторой почти периодической точки $x \in X$. Тогда динамическая система (X, f) минимальна по теореме Биркгофа и, применяя лемму 3.11 и рассуждения, приведенные выше, заключаем, что динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением одометра.

2. Пусть динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением одометра (A, g).

Фиксируем проекцию $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такую что для каждой точки y из некоторого всюду плотного множества $Q \subseteq X$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Из предложения 3.17, пункт (i), заключаем, что любая точка $y \in Q$ является почти периодической точкой динамической системы (X, f). Следовательно, для каждого $y \in Q$ множество $\overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$ является минимальным множеством динамической системы (X, f).

Отсюда заключаем, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in Q$ либо $\overline{\mathrm{Orb}_f(y_1)} \cap \overline{\mathrm{Orb}_f(y_2)} = \varnothing$, либо $\overline{\mathrm{Orb}_f(y_1)} = \overline{\mathrm{Orb}_f(y_2)}$.

Фиксируем $x \in Q$. Для любого $y \in Q$ имеем включения (см. предложение 3.17, пункт (ii)) $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y) \cap \omega(y) \subseteq \overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$. Следовательно, $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = \overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$, в частности, $y \in \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Так как Q плотно в X, то $X = \overline{Q} = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$. $\square$

Следствие 3.15. *Пусть (Y_1, h_1) — почти взаимно-однозначное расширение одометра, $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ — проекция.*

Тогда динамическая система (Y_2, h_2) является почти взаимно-однозначным расширением одометра.

Доказательство . Так как отображение $\pi : Y_1 \to Y_2$ сюръективное и непрерывное, то для любого всюду плотного подмножества Q пространства Y_1 его образ $\pi(Q)$ всюду плотен в пространстве Y_2.

Из следствия 3.14 заключаем, что найдется почти периодическая точка $x \in Y_1$, такая что $Y_1 = \overline{\mathrm{Orb}_{h_1}(x)}$. Из леммы 3.12 заключаем, что $\pi(x)$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_2, h_2), причем $\overline{\mathrm{Orb}_{h_2}(\pi(x))} = Y_2$ (см. выше).

Снова применяя следствие 3.14, приходим к выводу, что (Y_2, h_2) — почти взаимно-однозначное расширение одометра. $\square$

Следствие 3.16. *Пусть (X, f) — почти взаимно-однозначное расширение одометра, $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ и $\pi : (X, f) \to (A, g)$ — проекция.*

Пусть $Q = \{y \in X \mid \pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}\}$.

Если $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, то множество Q совпадает с множеством всех почти периодических точек динамической системы (X, f).

Если $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \neq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, то $Q = \varnothing$.

Доказательство. Из следствия 3.14 и теоремы Биркгофа заключаем, что динамическая система (X, f) минимальна.

Первая часть нашего утверждения получается из леммы 3.11 и предложения 3.17, пункты (i), (iv) и (v).

Вторая часть следует из предложения 3.17, пункт (iii). $\square$

Следствие 3.17 (см. [13]). *Пусть (X, f) — транзитивная динамическая система.*

Динамическая система (X, f) топологически сопряжена с одометром тогда и только тогда, когда каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X, f).

Доказательство. 1. Пусть каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X, f). Так как динамическая система (X, f) транзитивна, то по определению найдется $x \in X$, для которого $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Применяя следствие 3.14, заключаем, что (X, f) — почти взаимно-однозначное расширение одометра (в частности, динамическая система (X, f) минимальна по теореме Биркгофа). Воспользуемся леммой 3.11 и найдем $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ и проекцию $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такую что $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Из следствия 3.16 заключаем, что отображение $\pi : X \to A$ взаимно-однозначно. Пространство X компактно, следовательно π — гомеоморфизм и $\pi : (X, f) \to (A, g)$ — изоморфизм в категории $\mathcal{K}_0$.

2. Пусть $(X, f) \in \mathcal{A}$. Пусть $Id : (X, f) \to (X, f)$ — единичный морфизм. Так как отображение $Id : X \to X$ взаимно-однозначно, то из предложения 3.17, пункт (i), заключаем, что каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X, f). □

Следствие 3.18 (см. [13]). *Пусть динамическая система (A, g) топологически сопряжена с одометром, $\pi : (A, g) \to (X, f)$ — проекция.*

Тогда динамическая система (X, f) топологически сопряжена с одометром.

Доказательство . Динамическая система (A, g) минимальна (см. замечание 3.2), поэтому она транзитивна. Тогда и динамическая система (X, f) транзитивна (см. доказательство следствия 3.15).

Из следствия 3.17 и леммы 3.12 заключаем, что каждая точка пространства X почти периодическая точка динамической системы (X, f).

Для завершения доказательства нам остается еще раз применить следствие 3.17. □

Список литературы

[1] *R. Engelking* General topology — Sigma Series in Pure Math., 6. — Heldermann Verlag, Berlin, 1989. — 529 p.

[2] *Gottshalk W., Hedlund G.* Topological dynamics — AMS Colloq. Publ., — Vol. 36, — AMS, Providence, R. I. — 1955. — 151 p.

[3] *Alekseev, V. M.* Symbolic dynamics. (Russian) — Eleventh Mathematical School (Summer School, Kolomyya, 1973) (Russian). — Kiev: Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1976. — P. 5–210

[4] *Birkgoff* Dynamical systems — AMS Colloq. Publ. — V. 9, — AMS, Providence, R. I., — 1927

[5] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел — М: Наука, 1965. — 172 с.

[6] *Kelley John L.* General topology — D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 1955. — 298 p.

[7] *Christian Skau* Minimal dynamical systems, ordered Bratteli diagrams and associated $\mathbb{C}^*$ – crossed products // Current topics in operator algebras (Nara, 1990). — World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. — P. 264–280

[8] *Robert Ellis* Distal transformation groups // Pasific Journ. of Math. — 1958 — 8, N 3. — P. 401 – 405

[9] *James G. Glimm* On a certain class of operator algebras // Trans. of AMS — 1960 — 95, N 2. — P. 318 – 340

[10] *G. Barat, T. Downarowicz, A. Iwanik & P. Liardet* Propriétes topologiques et combinatoires des échelles de numération // Colloq. Math. — 2000 — 84/85, part 2. — P. 285-306;

[11] *S. MacLane* Categories for the working mathematician. — Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5., — Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. — 262 p.

[12] *H. Furstenberg* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory — M. B. Porter Lectures. — Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1981. — 203 p.

[13] *Louis Block, James Keesling* A characterization of adding machine maps (to appear)

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 423-430

UDC 519.41/47

N. S. Chernikov

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: `chern@imath.kiev.ua`

Groups with the minimal condition for nonabelian subgroups

Для деяких дуже широких класів $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ груп автор доводить, що довільна (неабелева) група $G \in \mathfrak{D}$ (відповідно, $G \in \mathfrak{B}$) задовольняє умову мінімальності для (неабелевих) підгруп тоді і тільки тоді, коли вона є черніковською.

Для некоторых очень широких классов $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ групп автор доказывает, что произвольная (неабелева) группа $G \in \mathfrak{D}$ (соответственно, $G \in \mathfrak{B}$) удовлетворяет условию минимальности для (неабелевых) подгрупп тогда и только тогда, когда она является черниковской.

For some very wide classes $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ of groups, the author proves that an arbitrary (nonabelian) group $G \in \mathfrak{D}$ (respectively $G \in \mathfrak{B}$) satisfies the minimal condition for (nonabelian) subgroups iff it is Chernikov.

Recall that a group G is called Shunkov, if for any its finite subgroup K every subgroup of the quotient group $N_G(K)/K$, generated by two its conjugated elements of prime order, is finite. Recall that a group is called locally graded, if any its finitely generated subgroup $\neq 1$ contains a subgroup of finite index $\neq 1$ (S.N.Chernikov). The class of all periodic Shunkov groups is wide and contains, for instance, all binary finite and 2-groups. The class of all locally graded groups is very wide and contains, for instance, all abelian, locally finite, residually finite groups. It is easy to see that this class is local and any group having a series with locally graded factors is locally graded, and any residually (locally graded) group is locally graded. At the same time, the class of all locally graded groups contains all groups having a series with locally finite factors, all RN- (and so all groups of all Kurosh-Chernikov classes), locally solvable, locally hyperabelian, radical in the sense of B.I.Plotkin, residually solvable groups.

Below, as usual, $\pi(G)$ is the set of all primes p for which the group G has a p-element $\neq 1$.

Let $\mathfrak{A}$ be the class of all groups G for which the following conditions are fulfilled:

(i) If G is not torsion-free, then for any $p \in \pi(G)$ and p-element $g \neq 1$ of G and $h \in C_G(g^p)$, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a subgroup of finite index $\neq 1$ or $\langle g, h \rangle$ is not periodic.

(ii) If G is not periodic, then for any element g of infinite order of G and $h \in G$, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a subgroup of finite index $\neq 1$.

The class $\mathfrak{A}$ is very wide and contains, for instance, all periodic Shunkov groups and all locally graded groups.

Let $\mathfrak{C}$ be the class of all groups G for which (i), with "periodic $\neq 1$" instead of "not torsion-free" and deleted "or $\langle g, h \rangle$ is not periodic", is fulfilled (and (ii) is not necessary fulfilled). Then $\mathfrak{A}$ is contained in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ contains all nonperiodic groups and the class of all periodic $\mathfrak{A}$-groups is just the class of all periodic $\mathfrak{C}$-groups.

Let $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{D}$) be the minimal local class of groups containing $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{C}$) such that any group possessing a series with $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{D}$)-factors belongs to $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{D}$). Put $\mathfrak{B}_o = \mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{C}$) and for ordinals $\beta > 0$ by induction: if for some ordinal α, $\beta = \alpha + 1$, then $\mathfrak{B}_\beta$ (resp. $\mathfrak{D}_\beta$) be the class of all groups which have a local system of subgroups possessing a series with $\mathfrak{B}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{D}_\alpha$)-factors, and if there is no such α, then $\mathfrak{B}_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{B}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{D}_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{D}_\alpha$). It is easy to see that $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{D}$) is the union of classes $\mathfrak{B}_\beta$ (resp. $\mathfrak{D}_\beta$). It is easy to show by induction that all $\mathfrak{B}_\beta$ and, at the same time, $\mathfrak{B}$ are closed with respect to subgroups.

The known Shunkov's [1] and S.N.Chernikov's [2] Theorems establish that a nonabelian group satisfying the minimal condition for nonabelian subgroups is Chernikov, if it is locally finite or has a series with finite factors resp. The next Theorem contains them.

Its proof below uses some results [2] and Suchkova-Shunkov Theorem [3], which asserts that a Shunkov group with the minimal condition for abelian subgroups is Chernikov.

Theorem. *A (nonabelian) group $G \in \mathfrak{D}$ (resp. $G \in \mathfrak{B}$) satisfies the minimal condition for (nonabelian) subgroups iff it is Chernikov.*

Note that Ol'shanskii's nonabelian groups, in which all proper subgroups are finite (see [4]), satisfy the minimal condition for subgroups and are non-Chernikov. Thus, in Theorem, the condition "$G \in \mathfrak{D}$" is essential. Note that Ol'shanskii's nonabelian torsion-free groups, in which all proper subgroups are cyclic (see [4]), satisfy the minimal condition for nonabelian subgroups, are Shunkov and non-Chernikov. In particular, in Theorem, the condition "$G \in \mathfrak{B}$" is essential.

Below min and min $-\overline{ab}$ are the minimal conditions for subgroups and nonabelian subgroups resp. Other notations are standard. (Remark that a group with min is periodic and an abelian group with min is Chernikov.)

Proof. *Sufficiency* is obvious.

Necessity. Let G be non-Chernikov.

(a) *Reduction to the case when G satisfies* min $-\overline{ab}$ *and also* $G \in \mathfrak{A}$. Let ζ be minimal among all ordinals α, for which $\mathfrak{B}_\alpha$

(resp. $\mathfrak{D}_\alpha$) contains a non-(Chernikov or abelian) group (resp. a non-Chernikov group) with min $-\overline{ab}$ (resp. min). We may assume that $G \in \mathfrak{B}_\zeta$ (resp. $G \in \mathfrak{D}_\zeta$). Suppose $\zeta > 0$. Clearly, for some ordinal ξ, $\zeta = \xi + 1$. So G possesses a local system of subgroups having a series with $\mathfrak{B}_\xi$ (resp. $\mathfrak{D}_\xi$)-factors. Every factor is, obviously, Chernikov or abelian (resp. Chernikov). So G is locally graded. Thus $G \in \mathfrak{B}_0$ (resp. $G \in \mathfrak{D}_0$), which is a contradiction. So $\zeta = 0$ and $G \in \mathfrak{A}$ (resp. $G \in \mathfrak{C}$). In the case of min, $G \in \mathfrak{C}$ and G is, obviously, periodic nonabelian with min $-\overline{ab}$. In particular, $G \in \mathfrak{A}$. Taking this into account, we may consider later on only the case of $G \in \mathfrak{A}$ with min $-\overline{ab}$.

Since G satisfies min $-\overline{ab}$, it contains a non-(Chernikov or abelian) subgroup L such that any its proper subgroup is Chernikov or abelian. We may assume that $G = L$. Then for every normal subgroup N of G, any proper subgroup of G/N is Chernikov or abelian.

(b) *Show that a subgroup H of G is Chernikov or abelian, if it has a subgroup K of finite index $\neq 1$ or if it is almost solvable.* Since $K \neq G$, K and so H are almost abelian. If H is almost solvable, then in view of Corollary to Theorem 1 [2], Corollary 2 [2] and Lemmas 1,2 [2], it is Chernikov or abelian.

(c) *Show that G is periodic.* Let G have elements g of infinite order. Since $G \in \mathfrak{A}$, every $\langle g, g^h \rangle$ has a proper subgroup of finite index and so is abelian (see (b)). Then for any $u \in G$, $\langle g^h : h \in G \rangle \langle u \rangle$ is non-Chernikov solvable and so is abelian (see (b)). Thus $g \in Z(G)$. Let $v \in G$ and $|\langle v \rangle| < \infty$. Then vg is of infinite order. So $v = (vg)g^{-1} \in Z(G)$. Thus G is abelian, which is a contradiction.

(d) *Show that $G/Z(G)$ is Shunkov.* Let $K/Z(G)$ be a finite subgroup of $G/Z(G)$. In view of Kalužnin's Theorem (see [5]),

$C_G(K/Z(G))/C_G(K)$ is abelian. So $N_G(K)/C_G(K)$ is almost abelian.

If $K/Z(G) \neq 1$, then $C_G(K) \neq G$ and so $C_G(K)$ is almost abelian. Thus $N_G(K)$ is almost solvable. So $N_G(K)$ is Chernikov or abelian (see (b)). Clearly, $N_G(K)/Z(G) = N_{G/Z(G)}(K/Z(G))$. Consequently, the quotient group $N_{G/Z(G)}(K/Z(G))/(K/Z(G))$ is Chernikov or abelian. Therefore any two its elements of prime order generate a finite subgroup.

Let $K/Z(G) = 1$ and $R/Z(G)$ be a subgroup of $G/Z(G)$ generated by two its conjugated element of some prime order p. Obviously, because of $Z(G)$ is periodic (see (c)), for some p-element$g \in G$ such that $g^p \in Z(G)$ and some $h \in G$, $R = \langle g, g^h \rangle Z(G)$. Clearly, $R/Z(G)$ is isomorphic to a quotient group of the group $\langle g, g^h \rangle / \langle g^p \rangle$. Since $G \in \mathfrak{A}$, $\langle g, g^h \rangle$ has a subgroup of finite index $\neq 1$. So, with regard to (b), $\langle g, g^h \rangle$ is finite. Therefore $R/Z(G)$ is finite.

(e) *Show that $G/Z(G)$ has an abelian non-Chernikov non-normal maximal subgroup $A/Z(G)$ such that*

(0.10)
$$A/Z(G) \cap (A/Z(G))^g = 1, \quad g \in (G/Z(G)) \backslash (A/Z(G)).$$

If all proper subgroups of $G/Z(G)$ are Chernikov, then it satisfies min. So because of $G/Z(G)$ is Shunkov (see (d)), by Suchkova-Shunkov Theorem [3] it is Chernikov. So G is almost solvable, which is a contradiction (see (b)). So some maximal abelian subgroup $A/Z(G)$ of $G/Z(G)$ is non-Chernikov. An arbitrary proper subgroup $H \supseteq A$ of G is non-Chernikov. So it is abelian. Therefore $H/Z(G) = A/Z(G)$ and $H = A$. Thus A is an abelian maximal subgroup of G. If A is normal in G, then $|G : A|$ is prime and G is solvable, which is a contradiction (see (b)). Consequently, for any $g \in G \backslash A$, $G = \langle A, A^g \rangle$. Then $A \cap A^g \subseteq Z(G)$. But, clearly, $Z(G) \subseteq A, A^g$. Thus $A \cap A^g = Z(G)$. Therefore (1) is valid.

(f) *Show that $A/Z(G)$ has some element a of odd prime order.* Suppose that this is not the case. Since $A/Z(G)$ is periodic (see (c)) and neither cyclic nor quasicyclic, it has some elements b and $c \neq b$ of order 2. Let $h \in (G/Z(G)) \backslash (A/Z(G))$. Then $\langle b, c^h \rangle = \langle bc^h \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle = \langle bc^h \rangle \leftthreetimes \langle c^h \rangle$ and $|\langle bc^h \rangle| < \infty$ (see (c)). If $|\langle bc^h \rangle|$ is odd, then for some $s \in \langle bc^h \rangle$, $b = c^{hs}$. Since $A/Z(G)$ is abelian and $b, c \in A/Z(G)$, $hs \notin A/Z(G)$. But $b \in A/Z(G) \cap (A/Z(G))^{hs}$, which is a contradiction (see (1)). So $\langle bc^h \rangle$ contains some element w of order 2. But then $w \in C_{G/Z(G)}(b) \cap C_{G/Z(G)}(c^h) = A/Z(G) \cap (A/Z(G))^h$, which is a contradiction.

(g) *Final contradiction.* Let a be from (f). Since $G/Z(G)$ is Shunkov (see (d)), for any $h \in G/Z(G)$, $|\langle a, a^h \rangle| < \infty$. So with regard to (1) by Sozutov-Shunkov Theorem [6], for some normal subgroup $N/Z(G)$ of $G/Z(G)$, $G/Z(G) = (A/Z(G))(N/Z(G))$ and $A/Z(G) \cap N/Z(G) = 1$. Since $N \neq G$ and G/N is abelian, G is almost solvable, which is a contradiction (see (b)).

The following new proposition is contained in Theorem.

Proposition 1. *Let G be a nonabelian group. Assume that G is locally graded or periodic Shunkov. Then G satisfies* $\min -\overline{ab}$ *iff it is Chernikov.*

In view of Mal'cev Theorem (see Theorem 4.2 [7]), a linear group over a field is locally residually finite. Further, for a commutative and associative ring R with 1 and any finitely generated unital module M over R, $\mathrm{Aut}_R(M)$ is hyperabelian-by-residually (linear over fields) (Theorem 13.5 [7]). Consequently, $\mathrm{Aut}_R(M)$ is locally graded. Hence follows that any

$\mathbf{GL}_n(R)$ is locally graded. Therefore, in virtue of Theorem, the following proposition is valid.

Proposition 2. *A (nonabelian) group $G \subseteq \mathrm{Aut}_R(M)$ or $G \subseteq \mathbf{GL}_n(R)$ satisfies* min *(resp.* min $-\overline{ab}$*) iff it is Chernikov.*

Finally, let $\mathfrak{C}$ be the class of all groups G for which the following conditions are fulfilled:

(i) If G is not torsion-free, then for any $p \in \pi(G)$ and p-element $g \neq 1$ of G and $h \in C_G(g^p)$, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a $\mathfrak{B}$-homomorphic image $\neq 1$ or $\langle g, h \rangle$ is not periodic.

(ii) If G is not periodic, then for any element g of infinite order of G and $h \in G$, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a $\mathfrak{B}$-homomorphic image $\neq 1$.

Let $\mathfrak{F}$ be the class of all groups G for which the following condition is fulfilled:

If G is periodic $\neq 1$, then for any $p \in \pi(G)$ and p-element $g \neq 1$ of G and $h \in C_G(g^p)$, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a $\mathfrak{D}$-homomorphic image $\neq 1$.

Proposition 3. *A (nonabelian) group $G \in \mathfrak{F}$ (resp. $G \in \mathfrak{C}$) satisfies* min *(resp.* min $-\overline{ab}$*) iff it is Chernikov.*

Proof. *Necessity.* A corresponding homomorphic image of $\langle g, g^h \rangle$ is generated by two elements. In the case when it is not abelian, by Theorem, it is finite. In the case when it is abelian, it has a subgroup of finite index $\neq 1$. Consequently, $\langle g, g^h \rangle$ possesses a subgroup of finite index $\neq 1$. So $G \in \mathfrak{C}$ (resp. $G \in \mathfrak{A}$). Therefore by Theorem, G is Chernikov.

Sufficiency is obvious.

References

[1] *Shunkov V.P.* On abstract characterizations of some linear groups // Algebra. Matrices and matrix groups. – Krasnoyarsk: L.V.Kirenskii In-te Physics Sib. Dept. Acad. Sci USSR, 1970. – P. 5–54 (in Russian).

[2] *Chernikov S.N.* Groups with the minimal condition for nonabelian subgroups // Groups with restrictions for subgroups. – Kyiv: Naukova dumka, 1971. – P. 96–106. (in Russian).

[3] *Suchkova N.G., Shunkov V.P.* On groups with the minimal condition for abelian subgroups // Algebra i logika. – 1986. – **25**, №4. – P. 445–469 (in Russian).

[4] *Ol'shanskii A.Yu.* Geometry of defining relations in groups. – Moscow: Nauka, 1989. – 448 p. (in Russian).

[5] *Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I.* Foundations of the theory of groups. – Moscow: Nauka, 1972. – 240 p. (in Russian).

[6] *Sozutov A.I., Shunkov V.P.* A generalization of the Frobenius theorem to infinite groups // Mat. sb. – 1976. – **100**, №4. – P. 495–506 (in Russian).

[7] *Wehrfritz B.A.F.* Infinite linear groups. – Berlin etc.: Springer, 1973. – 228 p.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 431-442

УДК 512.662.5

Ю. В. Шарко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Імпульсні градієнтні системи

В роботі розглядається система диференціальних рівнянь з імпульсною дією побудована в області евклідового простору R^n . В ході дослідження якісної поведінки інтегральних кривих цієї системи приводиться критерій існування замкнених орбіт і умова існування їх орбітальної стійкості.

Investigate system of differential equations with impulse action. Gradient system of differential equations is considered in domain of Euclidean space R^n. By the investigation of the qualitative behaviour of integral curves of this system is given the criterion of existence of closed orbits and the condition of their orbital stability.

1. Вступ.

За останні 20 років бурхливо розвивається теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Рівняння такого типу використовують для опису реальних фізичних процесів, які миттєво змінюють свою поведінку. Основи теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією були закладені в Києві М.М. Криловим, М.М.Боголюбовим і Ю.О. Митропольским. Визначальний вклад в розвиток теорії диференціальних рівнянь з імпульсною вніс А.М. Самойленко. Найбільш яскраві результати в цій області висвітлена в монографії А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [1] .

Ми розглядаємо в області евклідового простору R^n дві градієнтні системи диференціальних рівнянь для однієї функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ але відносно різних скалярних добутків в R^n. Природнім чином виникає система диференціальних рівнянь з імпульсною дією (розривна динамічна система з "биттям") [1], [2]. Ми даємо опис поведінки її траєкторій, приводимо топологічний критерій існування, так званих, замкнених траєкторій та доводимо одну теорему про їх орбітальну стійкість. На завершення хочу подякувати Ользі Сергіївні Черніковій за можливість познайомитися з чудовим розділом сучасної математики - диференціальними рівняннями з імпульсною дією.

2. Попередні відомості.

Ми наводимо деякі визначення і твердження, якими будемо користуватися і які можна знайти в літературі. Нагадаємо, що функція $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задана в області D з R^n називається диференційованою (класу C^∞, якщо у неї існують всі частинні похідні .

Точка $y \in D$ називається **критичною точкою** функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо частинні похідні $\partial f(y)/\partial x$ функції в цій точці рівні нулеві.

Точка $y \in D$ називається **регулярною точкою** функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо хоча б одна частинна похідна $\partial f(y)/\partial x$ функції в цій точці відмінна від нуля. Нехай a належить множині значень функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Замкнена множина $f^{-1}(a) = M_a$ називається **поверхнею рівня функції**.

Якщо на поверхні рівня (взагалі кажучи незв'язною) $f^{-1}(a)$ функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не лежать критичні точки то така поверхня рівня називається **гіперповерхнею**.

Нехай в R^n задана додатньо визначена, симетрична, невироджена білінійна форма $B(X, Y)$ (скалярний добуток). Якщо функція $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

задана в області D з R^n, тоді в D можна побудувати векторне **поле градієнта** $\overrightarrow{grad}_B f(x)$, яке визначається з рівності

$$B(\overrightarrow{grad}_B f(x), Y) = Y(f(x)),$$

де Y - довільне векторне поле в D, $Y(f(x))$ - похідна функції
$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вздовж поля Y в точці x. Відомо [3,4], що поле $\overrightarrow{grad}_B f(x)$ ортогональне (відносно форми $B(X, Y)$) поверхням рівня функції
$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а його інтегральні криві направлені в сторону зростання функції.

Позначимо через $\sum(f)$ - множину всіх критичних точок функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. **Теорема Сарда** стверджує що образ $f(\sum(f))$ є замкнена множина і має на прямій міру нуль [5].

Нехай $F_o(x)$ і $F_1(x)$ - два неперервних відображення компактного простору K в топологічний простір L. Кажуть, що відображення $F_o(x)$ і $F_1(x)$ - **гомотопні**, якщо існує неперервне сімейство неперервних відображень $G_t(x), t \in [0, 1]$ із K в L для якого $G_o(x) = F_o(x)$, $G_1(x) = F_1(x)$.

Для неперервного відображення $F: K \longrightarrow K$, де K - компактний простір можна за допомогою груп гомологій простору K можна визначити число **Лєфшеця** $\Lambda(F)$ [5]. Це число використовують для відповіді на питання про існування нерухомих точок відображення F.

Ейлерову характеристику компактного простору K теж можна визначити через групи гомологій простору K [5].

Користуючись двома різними скалярними добутками в R^n, можна побудувати в області евклідового простору R^n

дві градієнтні системи диференціальних рівнянь для однієї функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Природнім чином виникає система диференціальних рівнянь з імпульсною дією (розривна динамічна система з "биттям").

Дослідження якісної поведінки інтегральних кривих цієї розривна динамічна система з "биттям"приводить до двох наслідків:

a) Топологічні інваріанти (ейлерова характеристика) гіперповерхонь функції f дають критерій існування, розривної динамічної системи з "биттям"так званих, замкнених орбіт .

b) Умова притягування для відповідної нерухомої точки гомеоморфізму, являється достатньою для того щоб замкнена орбіта розривної динамічної системи з "биттям" була орбітально стійкою.

3. Імпульсні градієнтні системи .

Нехай D^n - область в R^n обмежена гладкою компактною зв'язною гіперповерхнею Ω. Припустимо, що в $\overline{D} = D^n \bigcup \Omega$ задана гладка функція
$f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$ з скінченою кількістю критичних точок, що лежать в D^n і $f^{-1}(0) \subset D^n$, $f^{-1}(1) = \Omega$. Відомо, що скалярний добуток в R^n задається невиродженою, симетричною, додатньо визначеною білінійною формою $B = B(a, b)$. Користуючись різними скалярними добутками в D^n ми можемо для однієї і тієї ж гладкої функції $f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$, задавати різні векторні поля $grad_B f$. Цією обставиною ми скористаємося, для побудови в D^n градієнтної динамічної системи з імпульсною дією.

Нагадаємо, що **градієнтне векторне поле** $grad_B f$ **відносно скалярного добутку** $B = B(a, b)$, заданого в D^n визначається з рівності

$$B(grad_B f(x), Z) = Z(f(x)),$$

де Z - довільне векторне поле в D^n, а $Z(f(x))$ - похідна в точці $x \in D^n$ функції f вздовж поля Z.

Зауваження 3.1. *Незалежно від скалярного добутку $B = B(a, b)$, ненульовий вектор в точці $x \in D^n$ з векторного поля $grad_B f$ утворює з дотичним вектором до поверхні рівня функції f в цій точці ненульовий кут. Іншими словами, інтегральна крива векторного поля $grad_B f$, що проходить через точку $x \in D^n$ перетинає поверхню рівня функції f в цій точці під ненульовим кутом.*

Нехай зафіксована гладка функція $\overline{D} = D^n \bigcup \Omega$ $f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$ з скінченою кількістю критичних точок, що лежать в D^n і $f^{-1}(1) = \Omega$, $f^{-1}(0) \subset D^n$. Припустимо, що $0 = c_1 < c_2 < ... < c_{k-1} < c_k < 1$ - всі критичні значення функції f. Виберемо регулярні значення функції f

$$0 < p_1 < q_1 < c_2 < p_2 < q_2 < c_3 < ... < c_{k-1} < p_{k-1} < q_{k-1} < c_k < p_k < 1,$$

і розглянемо гіперповерхні

$$M_{p_i} = f^{-1}(p_i) \text{ та } M_{q_i} = f^{-1}(q_i).$$

Наступний факт добре відомий [6] (ст. 201, теорема 2.2)

Теорема 3.1. *Гіперповерхні M_{p_i} та M_{q_i}, $(i = 1, 2, ..., k-1)$, M_k та Ω - гомеоморфні. Гомеоморфізм $\varphi_i : M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i}$, $\varphi_k : M_{p_k} \longrightarrow \Omega$ можна побудувати за допомогою інтегральних кривих довільного векторного поля $grad_B f$. А саме : через точку $x \in M_{p_i}$ проходить інтегральна крива поля $grad_B f$, яка перетинає гіперповерхню M_{q_i} в точці y. Гомеоморфізм φ_i відображає точку x в точку y. Аналогічно для гомеоморфізму $\varphi_k(x)$.*

Гомеоморфізм φ_i залежить від вибору векторного поля $grad_B f$. Очевидно, що має місце рівність $\varphi_i^{-1}(x) \cdot \varphi_i(x) =$

$Id_{M_{p_i}}$. Якщо позначити через $\varphi_{i(grad_{B_1} f)}$ та $\varphi_{i(grad_{B_2} f)}$ гомеоморфізми

$$M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i},\ M_{p_k} \longrightarrow \Omega,$$

які побудовані за допомогою градієнтних векторних відносно різних скалярних добутків B_1 і B_2 в R^n, то гомеоморфізм

$$\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)}$$

вже не буде тотожнім на M_{p_i}. Має місце наступна лема.

Лема 3.1. *Гомеоморфізм*

$$\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$$

гомотопний тотожньому відображенню для довільних скалярних добутків B_1 та B_2.

Доведення. З лінійної алгебри відомо, що множина додатньо визначених, симетричних, невироджених білінійних форм утворює випуклу відкриту множину в скінченовимірному евклідовому просторі. Другими словами, якщо B_1 і B_1 - дві додатньо визначені, симетричні, невироджені білінійні форми то для кожного $t \in [0,1]$ білінійна форма $B_t = tB_1 + (1-t)B_2$, буде додатньо визначеною, симетричною і невиродженою. Значить, для кожного $t \in [0,1]$ векторне поле $(grad_{tB_1+(1-t)B_2} f$ коректно задане і являється градієнтним для функції f. Якщо розглянути сімейство гомеоморфізмів

$$\Phi_i(grad_{(1-t)B_2+tB_1} f, grad_{B_1} f) =$$
$$\varphi^{-1}_{i(grad_{(1-t)B_2+tB_1} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)} : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i},$$

то очевидно, що воно задає необхідну гомотопію між тотожнім відображенням і гомеоморфізмом $\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)}$. $\square$

Взагалі кажучи, відображення $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f)$:$M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ може не мати нерухомих точок. Наступна лема дає достатні умови існування у відображення $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ нерухомої точки.

Лема 3.2. *Якщо ейлерова характеристика гіперповерхні $\chi(M_{p_i}) \neq 0$, тоді гомеоморфізм $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ має нерухому точку. Множина нерухомих точок гомеоморфізма $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f)$ є компактна підмножина в M_{p_i}.*

Доведення. Відомо, [7] (стр. 261), що число Лєфшеця для тотожнього відображення довільної гіперповерхні самої в себе дорівнює ейлеровій характеристиці гіперповерхні. Для гомотопних відображень числа Лєфшеця співпадають [7] (стр. 261). За теоремою Лєфшеця[5] (ст. 397) , якщо число Лєфшеця відображення відмінне від нуля, то це відображення має нерухому точку. Множина нерухомих точок завжди замкнена і значить в $M_{p_i} \subset R^n$ вона є компактною [7] (ст. 257). □

Добре відомо [8], що поведінка гомеоморфізму в околі нерухомої точки може бути досить складною. Нам знадобиться для подальшого викладу наступне означення.

Означення 3.1. *Нехай X - компактний простір, $F : X \longrightarrow X$ - гомеоморфізм, у якого точка $y \in X$ є нерухомою точкою відображення F. Скажемо, що точка y є притягуючою, якщо для кожного околу U точки y знайдеться менший окіл $V \subset U$ цієї точки, такий що $F(V) \subset U$.*

Користуючись гомеоморфізмами $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ побудуємо динамічну систему з імпульсною дією в $\overline{D}$.

В наших позначеннях, розгляньмо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією, які також називають розривними динамічними системами. Спочатку задамо в $\overline{D}^n$ систему звичайних диференціальних рівнянь (в векторних позначеннях)

$$dx/dt = grad_{B_2} f(x).$$

Зафіксуємо гіперповерхні

$$M_{p_i} = f^{-1}(p_i) \text{ та } M_{q_i} = f^{-1}(q_i).$$

Використовуючи попередні побудови, задамо гомеоморфізми

$$\Psi_i = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} : M_{q_i} \longrightarrow M_{p_i},$$
$$\Psi_k = \varphi^{-1}_{k(grad_{B_2} f)} : \Omega \longrightarrow : M_{p_k}.$$

Користуючись позначеннями монографії [1] покладемо

$$\Gamma = \cup_i M_{q_i} \cup \Omega, \quad \Gamma_o = \cup_i M_{p_i}, \quad A = \Psi_i \cup \Psi_k \quad \text{ і } A : \Gamma \longrightarrow \Gamma_o$$
.

Припустимо, що на множині $\overline{D}^n \backslash (M_{q_i} = f^{-1}(q_i) \cup \Omega)$ задана система звичайних диференціальних рівнянь (в векторних позначеннях)

$$dx/dt = grad_{B_1} f(x).$$

Розривну динамічну систему запишемо у вигляді

$$\begin{array}{l} dx/dt = grad_{B_1} f(x), x\overline{\in}\Gamma, \\ \Delta x \mid_{x\in\Gamma} = Ax - x = I(x). \end{array} \tag{2}$$

Рух точки в фазовому просторі $\overline{D^n}$ такої системи відбувається по одній з інтегральних траєкторій системи $dx/dt = grad_{B_1} f(x)$ в проміжках між двома послідовними попаданнями цієї інтегральної траєкторії на множину Γ, а в момент попадання точка $x(t)$ "миттєво"переводиться оператором A в точку $y = A(x)$ множини Γ_o.

Таким чином, фактично інтегральні криві належать множинам

$$\mathcal{D}_i = f^{-1}(q_i, q_{i+1}] \text{ та множині } \mathcal{D}_{k-1} = f^{-1}(q_{k-1}, 1].$$

Після попадання інтегральних кривих на множину $M_{q_{i+1}}$ або Ω вони вже будуть належати множині

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Очевидно, що для траєкторій, які починаються в точках, що належать множині

$$\mathcal{S}_i = f^{-1}(q_i, c_{i+1}) \text{ або } \mathcal{S}_{k-1} = f^{-1}(q_{k-1}, c_k).$$

є дві можливості :

a) потрапити в точку рівноваги, яка відповідає критичній точці функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що належить поверхні рівня $f^(-1(c_i)$;

b) потрапити в точку, що належить множині M_{q_i} або Ω і далі весь час залишатися на множинах

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Другими словами, буде "биття"інтегральних кривих в множину Г. Серед інтегральних кривих другого типу можуть бути такі, які після першої "зустрічі"з множиною M_{q_i} або Ω знову повертаються за допомогою відображення A в ту ж саму точку на множині M_{p_i}, яку вони вже "проходили". Назвемо такі інтегральні криві **замкненими**.

Разом з тим серед інтегральних кривих другого типу можуть бути такі, які після першої "зустрічі"з множиною M_{q_i} або Ω повертаються за допомогою відображення A в іншу точку на множині M_{p_i}, ніж ту яку вони вже "проходили". Але після скінченої кількості таких ітерацій вони повертаються знову в ту ж саму точку на множині M_{p_i}, яку вони "проходили перший раз". Назвемо такі інтегральні криві **періодичними**.

I накінець, підмножину інтегральних кривих S другого типу назвемо **інваріантною**, якщо відображення A переводить підмножину S саму в себе.

Користуючись класифікацією точок і інваріантних множин гомеоморфімів можна визначити аналогічні поняття і в нашій ситуації - градієнтній динамічній системі з імпульсною дією. В цій роботі ми цього робити не будемо.

Наступне твердження є наслідком леми 4.2, воно дає достатню умову існування у системи (2) замкненої інтегральної кривої.

Пропозиція 3.1. *Нехай в* $\overline{D}^n$ *задана система* (2). *Якщо ейлерова характеристика гіперповнрхності* $\chi(M_{p_{i+1}}) \neq 0$, *тоді існує в*

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або в } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

замкнена інтегральна крива . Множина всіх замкнених інтегральних кривих утворює компактну підмножину в

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або в } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Якщо розглянути довільну інтегральну криву другого типу системи 2 , то із-за "биття"інтегральних кривих говорити про їх стійкість за Ляпуновим не має сенсу, бо вони не задані на всьому проміжку часу від (t_o, ∞). Можна говорити про **орбітальну стійкість** інтегральних кривих другого типу системи 2 [9] (стр. 96).

Означення 3.2. *Якщо* γ *- інтегральна крива другого типу системи* (2), *то скажемо, що вона орбітально стійка, якщо довільна інтегральна крива* γ_1 *в певний момент часу проходить досить близько біля* γ, *то вона залишається поблизу неї і надалі (після застосування відображення A).*

Теорема 3.2. *Нехай в* $\overline{D}^n$ *задана система* (2). *Припустимо, що* γ *- замкнена інтегральна крива системи* (2) *, яка перетинає множину* M_{p_i} *в точці* x. *Розглянемо гомеоморфізм*

$$\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}.$$

Якщо точка x *- притягуюча нерухома точка то інтегральна крива* γ *буде орбітально стійкою.*

Доведення. Точка x завжди має окіл U який не перетинає критичну поверхню рівня$f^{-1}(c_{i-1}$ функції f Нехай точка y знаходиться в цьому околі. Інтегральна крива γ_1, що проходить через точку y буде очевидно інтегральною кривою другого типу системи (2). Використовуючи той факт, що довжини відрізків інтегральних кривих γ і γ_1 від точок x і y і до перетину з множиною M_{q_i} є скінченими, можна зробити висновок, що γ_1 буде близькою до γ. Це завжди можна зробити, зменшуючи величину околу U. Оскільки точка x є притягуючою нерухомою точкою, то і після застосування відображення A наступна інтегральна крива буде близькою до γ. □

Література

[1] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев:Вища школа, 1987 - С. 287.

[2] *Перестюк Н.А., Черникова О.С.* Устойчивость решений импульсных систем // Украинский мат. журнал -1997.- № 49.- С. 98-111.

[3] *Торп Д.* Начальные главы дифференциальной геометрии. М.:Мир, 1982 - С. 359 .

[4] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М. : "Мир", 1970 - С. 412.

[5] *Борисович Ю., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.:Наука, 1995 - С. 415.

[6] *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.:Мир, 1979 - С. 279.

[7] *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.:Мир, 1976 - С. 403.

[8] *Палис Ж., Димелу В.* Геометрическая теория динамических систем. М.:Мир, 1986 - С. 301.

[9] *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.:Издательство иностранной литературы, 1961 - С. 387.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 443-473

УДК 517.938.5

В. В. Шарко

Институт математики НАН Украины, Киев,
Терещенковская, 3
E-mail: `sharko@imath.kiev.ua, sharko@ukrpack.net`

Гладкие функции на некомпактных поверхностях[1]

Введение.

Пусть N - гладкая поверхность. Обозначим через $C^\infty(N)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций на N. Изучению функций на компактных поверхностях было посвящено немало работ, укажем лишь некоторые из них [2-3,6-10,13,15,18-21]. В случае, если N - некомпактная поверхность, строение функций резко отличается от компактного случая. Например, на каждой некомпактной поверхности существует функция из пространства $C^\infty(N)$ без критических точек [4]. В этой работе изучаются некоторые свойства функций из пространства $C^\infty(N)$ с изолированными критическими точками на некомпактных поверхностях. В частности, дается необходимое и достаточное условие, когда граф является графом Кронрода-Риба

[1]Работа выполнена в рамках целевой программы НАН Украины “Современные методы иследования математических моделей в задачах природоведения и общественных науках” НИР № 0107U00233

собственной гладкой функции с изолированными критическими точками на компактной или некомпактной поверхности.

1. Распределение особенностей гладких функций и векторных полей на некомпактных поверхностях.

Под гладкой поверхностью N (с краем или без) понимается двумерное сепарабельное, гладкое многообразие. Край гладкой поверхности N, если он присутствует, обозначается через ∂N. Гладкая поверхность может иметь не более чем счетное множество связных компонент края, среди которых могут быть как компактные так и некомпактные компоненты. Очевидно, что компактная компонента края гладкой поверхности диффеоморфна окружности S^1, а некомпактная компонента диффеоморфна числовой прямой R. Если у некомпактной поверхности отсутствует край, то такую поверхность будем называть **открытой**. Слово гладкий всегда будет указывать на принадлежность классу C^∞. В случае, когда минимальное число образующих фундаментальной группы поверхности N, $\pi_1(N)$ - конечно (бесконечно), то поверхность N имеет конечный (бесконечный) род.

Пусть N - некомпактная поверхность, **концом** в N называется убывающая последовательность $M_1 \supset M_2 \supset ...$ связных поверхностей с краем в N таких, что :

a) край каждой поверхности M_i является компактным;
b) для каждого ограниченного множества X в N (т.е. когда замыкание X в N является компактом) $M_i \bigcap X = \varnothing$ для достаточно большого i.

Два конца $M_1^1 \supset M_2^1 \supset ...$ и $M_1^2 \supset M_2^2 \supset ...$ называются эквивалентными, если для каждого i найдется такое j, что $M_i^1 \subset M_j^2$ и и наоборот. Через M^* будет обозначаться класс эквивалентности конца представленный последовательностью $M_1 \supset M_2 \supset ....$ По определению **идеальной границей** $i\partial N$ называется топологическое пространство, образованное классами эквивалентности концов. Это компактное подмножество канторового множества. Среди идеальной границы $i\partial N$ имеется замкнутое подмножество непланарных $i\partial N_{np}$ и замкнутое подмножество неориентированных $i\partial N_{no}$ концов. Очевидно, что имеет место включение $i\partial N \supset i\partial N_{np} \supset i\partial N_{no}$. Теорема Каракерьярто-Рихардса утверждает , что две некомпактные поверхности N_1 и N_2 одного и того же рода и класса ориентируемости гомеоморфны тогда и только тогда, когда их идеальные границы $i\partial N_1 \supset i\partial N_{1np} \supset i\partial N_{1no}$ и $i\partial N_2 \supset i\partial N_{2np} \supset i\partial N_{2no}$ - гомеоморфны (как тройки пространств) [16]. Далее, теорема Рихардса утверждает, что для произвольной тройки $(X \supset Y \supset Z)$ замкнутых подпространств канторового множества найдется проверхность N с идеальной границей $(i\partial N \supset i\partial N_{np} \supset i\partial N_{no})$, которая гомеоморфна (как тройка пространств) $(X \supset Y \supset Z)$ [16].

Пусть f - гладкая функция, заданная на поверхности N. Точка $m \in IntN$ называется критической точкой функции f, если все частные производные f в этой точке равны нулю. Предположим, что $m \in IntN$ - изолированная критическая точка функции f. Выберем в окрестности точки m локальную систему координат (x, y), так чтобы точка m имела координаты $(0, 0)$. Известно [15,17], что функцию f из класса $C^\infty(N)$ в окрестности изолированной критической точки m, которая не является локальным экстремумом, **непрерывной** заменой координат можно привести к виду $f = Rez^n + c$ $(n \geq 2)$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m изменяется $(z = x + iy)$. Будем называть ее **существенной критической точкой** или **вырожденностью порядка** n . Либо к виду $f = Rez$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m не изменяется (т.е. в этом случае от критической точки m можно вообще избавится). Будем называть ее **несущественной критической точкой**. В случае, если точка m - локальный экстремум, то функцию f в окрестности точки m **непрерывной** заменой координат можно привести к виду $f = x^2 + y^2 + c$ или к виду $f = -x^2 - y^2 + c$.

Рассмотрим в окрестности нуля U плоскости R^2 с координатами (x, y) функцию $f = Rez^n + c$ $(n \geq 2,\ z = x + iy)$. Очевидно, что линия уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ функции f в окрестности U содержит критическую точку o и состоит из $2n$ интервалов, пересекающихся в точке o или, как мы будем в дальнейшем говорить, $2n$ ребер, выходящих из одной вершины. Каждая соседняя пара ребер образует сектор, во внутренности которого функция f принимает значение больше c или меньше c. Будем называть в дальнейшем белый или черный сектор. Таким образом, в U будет $2n$, последовательно чередующихся, белых и черных секторов (т.е. образовывает цветной спин см. определение 2.1).

Когда $n = 2$, то такая критическая точка называется невырожденной. Гладкая функция f на поверхности N называется функцией Морса, если все ее критические точки - невырожденые, т.е. для каждой критической точки существует окрестность, в которой f имеет вид невырожденной квадратичной формы. Число минусов этой квадратичной формы называется индексом критической точки [12,17].

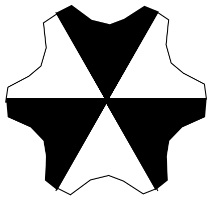


Рис. 1. Цветной спин в окрестности критической точки функции $f = Rez^n + c$ $(n = 3)$.

Известно [12,17], что вырожденную критическую точку функции f можно путем малых возмущений функции f превращать в объединение конечного числа невырожденных критических точек (распад вырожденной особенности). В случае функции $f = Rez^n$ $(n > 2)$ малое возмущение можно выбрать так : $f_1 = Re(z - \varepsilon_1)...(z - \varepsilon_n)$, где действительные числа $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ при $i \neq j$. Вырожденная особенность порядка n распалась в объединение $n - 1$ невырожденных критических точек индекса 1.

Наоборот, пусть в окрестности нуля U плоскости R^2 с координтами (x, y) задана функция Морса $f = f(x, y)$ у которой в точности $n - 1$ критических точек $m_1, ..., m_{n-1}$ индекса 1 таких, что $f(m_i) = 0$ для $i = 1, ..., n - 1$. Тогда в окрестности U найдется путь l гомеоморфный отрезку, который содержит начало координат вместе с критическими точками $m_1, ..., m_{n-1}$ и гладкое отображение $h : U \to U$, такое что $h(l) = 0, h = Id$ вне некоторой ε-окрестности $V \subset U$ пути l, так что функция $g = f \circ h^{-1}$ топологически эквивалентна в U функции Rez^n.

Поведение гладких функций на некомпактных поверхностях существенно отличается от поведения гладких функций на компактных поверхностях. К примеру, на компактных поверхностях гладкие функции всегда имеют критические точки.

Лемма 1.1. *На открытой поверхности N существует гладкая функция с любым конечным (включая пустое) или бесконечным множеством $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных критических точек, имеющих вырожденности любых порядков.*

Доказательство. Пусть $(\omega_1, ..., \omega_n, ...)$ - последовательность неотрицательных целых чисел, являющихся порядками вырожденностей особенностей $(m_1, ..., m_n, ...)$. Представим поверхность $N = \bigcup_i N_i$ в виде объединения возрастающей последовательности связных компактных поверхностей с краем N_i так, что $... \subset N_i \subset IntN_{i+1} \subset ...$ $(i = 1, 2, ...)$. Замыкание множества $K_i = N_{i+1} \setminus N_i$ является поверхностью с краем. Зададим на N_1 функцию Морса $f_1 : N_1 \to [0, 1]$, такую что $f^{-1}(1) = \partial N_1$ и имеющую критические точки с помощью, которых можно сконструировать особенность порядка ω_1. Заменим функцию f_1 на гладкую функцию $g_1 : N_1 \to [0, 1]$ такую что $g_1^{-1}(1) = \partial N_1$ и имеющую особенность порядка ω_1 в $IntN_1$. Затем продолжим функцию g_1 с N_1 до гладкой функции на N_2 $f_2 : N_2 \to [0, 2]$ такой, что сужение f_2 на поверхность K_1 есть функция Морса со следующими свойствами:

a) $f_2^{-1}(1) = \partial N_1$, $f_2^{-1}(2) = \partial N_2$;
b) имеет критические точки тех индексов с помощью, которых можно сконструировать особенность порядка ω_2 в $IntK_1$.

Заменим функцию f_2 на гладкую функцию $g_2 : N_2 \to [0, 2]$ такую, что :

a) $g_2 = g_1$ на N_1, $g_2^{-1}(2) = \partial N_2$;

b) имеет особенность порядка ω_2 в $IntK_1$.

Повторим эту конструкцию с поверхностью N_3 и т.д.. После счетного числа шагов построим гладкую функцию g_∞ на поверхности N, у которой имеется конечное или бесконечное подмножество $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных критических точек с вырождениями порядка $(\omega_1, ..., \omega_n, ...)$.

Рассмотрим триангуляцию τ поверхности N. Пусть N^1 - ее одномерный остов и $U(N^1)$ - его регулярная окрестность. С помощью диффеоморфизма $H : N \longrightarrow N$, изотопного тождественному, добьемся, чтобы критические точки из подмножества Ω попали на N^1, а остальные критические точки лежали вне $U(N^1)$. Рассмотрим функцию $g = g_\infty \circ H^{-1}$. По теореме Уайтхеда [22] существует гладкое вложение $\varphi : N \longrightarrow U(N^1)$. Взяв ограничение функции g на $\varphi(N)$, получим искомую функцию. $\square$

Рассмотрим векторные поля на гладких поверхностях с изолированными нулями. Для компактной поверхности N теорема Пуанкаре устанавливает взаимосвязь между числом и индексами изолированных нулей векторного поля V на N и эйлеровой характеристикой поверхности N. Другими словами, множество изолированых нулей векторного поля V на поверхности N не может быть произвольным. По этому поводу см.[5]. Для некомпактных поверхностей имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2. *На открытой поверхности N существует гладкое векторное поле с любым конечным или бесконечным множеством $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных нулей, имеющих любые значения индексов из совокупности* $0, \pm 1, \pm 2, ...$

Доказательство. Индекс изолированного нуля градиентного векторного поля $grad(f)$ на поверхности N может принимать только значения $1, 0, -1, -2, \ldots$ [5]. Изолированный нуль индекса λ, где $\lambda = 2, 3, \ldots$ можно добавить, путем изменения вектореного поля $grad(f)$ только в окрестности U источника (т.е. особенности векторного поля с индексом равным 1) на векторное поле V, имеющее в этой окрестности U следующие особенности:

a) один нуль индекса λ;
b) $(\lambda - 1)$ нулей индекса 1;
c) $(2\lambda - 2)$ нулей индекса -1.

На рисунке 2 представлен случай, когда $\lambda = 3$.

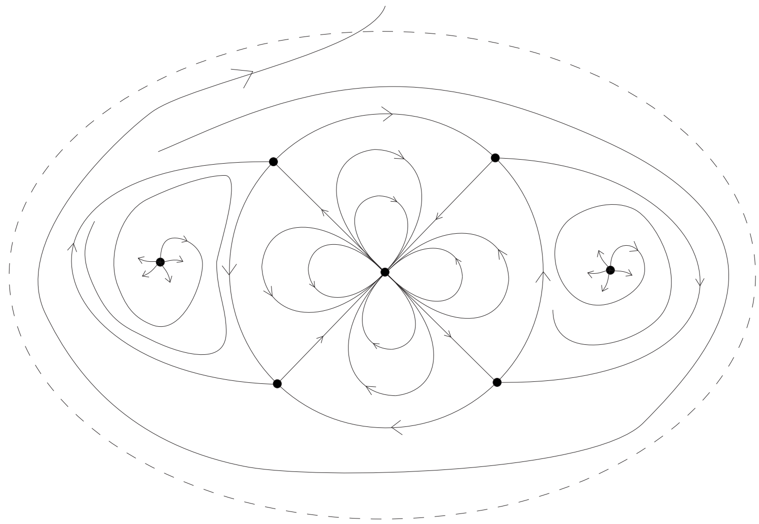


Рис. 2

Используя предыдущую конструкцию, построим гладкую функцию f на поверхности N, градиентное векторное поле которой, $grad(f)$ имеет необходимое подмножество

$\Omega_1 = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных нулей со значениями индексов $1, 0, -1, -2, ...$ Понятно, что локальных минимумов у функции f должно быть "больше чтобы у векторного поля $grad(f)$ хватило нулей индекса 1 для построения особенностей положительных индексов больших единицы. Заменим теперь вектореное поле $grad(f)$ в окрестностях нулей индекса 1 на вектореное поле V, имеющее в этих окрестностях изолированные нули нужных положительных индексов. Теперь будем действовать по описанной в лемме 1 схеме. Пусть N^1 - одномерный остов триангуляции τ поверхности N и $U(N^1)$ - его регулярная окрестность. С помощью диффеоморфизма $H : N \longrightarrow N$, изотопного тождественному, добьемся, чтобы изолированные нули нужных индексов вектореного поля Vпопали на N^1, а остальные нули лежали вне $U(N^1)$. Рассмотрим вектореное поле $W = H(V)$. По теореме Уайтхеда [22] найдем гладкое вложение $\varphi : N \longrightarrow U(N^1)$. Взяв ограничение вектореного поля W на $\varphi(N)$, получим искомое вектореное поле.

□

Гладкая функция на поверхности называется собственной, если каждая ее линия уровня - компактное множество. Очевидно, что на открытой поверхности N отличной от S^1xR^1 у собственной гладкой функции, заданной на N всегда имеются критические точки.

Лемма 1.3. *На открытой поверхности N существует гладкая собственная функция $f : N \to R$ с изолированными критическими точками не являющимися локальными экстремумами.*

Доказательство. Известно, что открытая поверхность N имеет каноническое представление в смысле Рихардса [16]. А имеенно: поверхность N диффеоморфна сфере S^2

с выброшенным замкнутым, вполне разрывным, сепарабельным множеством X и вклеенным конечным или счетным числом ручек (листов Мебиуса) в ориентированном (неориентированном) случае, которые сходятся к X. Выберем на сфере S^2 (т.е. на поверхности N) окружность S^1 и рассмотрим $N \setminus S^1$. Понятно, что окружность S^1 разбивает поверхности N на две несвязные части, замыкание которых обозначим через N_1 и N_2. Окружность можно выбрать так, чтобы в некоторой ее окрестности не содержались концы поверхности N а обе части N_1 и N_2 содержали и ручки (листы Мебиуса) и концы. Очевидно что краем у N_1 (N_2) будет окружность. Пусть Y_i (Y_j) - исчерпание N_1 (N_2), компактными поверхностями, начиная с воротника края. Легко построить, исходя из Y_i (Y_j) на N_1 (N_2), собственные гладкие функции $f_1 : N_1 \longrightarrow [0, \infty)$ $(f_2 : N_2 \longrightarrow [0, -\infty))$ с изолированными критическими точками не являющимися локальными экстремумами (функции Морса например). Положив $f = -f_2 \bigcup f_1$, получим искомую гладкую собственную функцию с изолированными критическими точками, которые не являются локальными экстремумами. $\square$

2. Цветные спин-графы и атомы гладких функций на поверхностях.

Под графом (V, E) будем понимать клеточный одномерный комплекс, где (V) - нульмерные клетки (вершины), (E) - одномерные клетки (ребра) [11,14]. В дальнейшем мы будем рассматривать и графы со счетным множеством вершин и ребер и с петлями, т.е. когда начало и конец одного и того же ребра принадлежат одной и той же вершине.

Определение 2.1. *Пусть граф Δ, состоит из $2n$ ребер a_i, которые соединяют вершину x с $2n$ вершинами y_i. Цветным спином в вершине x (обозначается $\lessdot x$) называется циклический порядок $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{2n}}, a_{i_1})$ на ребрах a_i с указанием черного или белого цвета* $\mathrm{col}(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$ *на соседних ребрах, удовлетворяющий следующим условиям:*

a) *каждое ребро a_i, образовывает только одну белую и только одну черную пару в точности с двумя разными соседними ребрами a_{i-1} и a_{i+1} ;*
b) *последовательность пар* $\mathrm{col}(a_{i_1}, a_{i_2}), \mathrm{col}(a_{i_2}, a_{i_3}), \ldots,$ *$col(a_{i_{2n}}, a_{i_1})$ является цветочередующайся [20].*

Пусть Δ_1 и Δ_2 - графы у которых по $2n$ ребер a_i^1 и a_i^2 соответственно. Ребра a_i^1 (a_i^2) соединяют вершину x^1 (x^2) с $2n$ вершинами y_i^1 (y_i^2). Предположим, что в вершинах x^1 и x^2 заданы цветные спины $\lessdot x^1$ и $\lessdot x^2$. Изоморфизм между графами $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_1$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер графа Δ_1 с белым (черным) цветом переходит в пару ребер графа Δ_2 с белым (черным) цветом.

Замечание 2.1. *Очевидно, что граф Δ с $2n$ ребрами и цветным спином в вершине $\lessdot x$ можно вложить в окрестность U критической точки o, функции Rez^n, так чтобы его образ лежал на $\Gamma = f^{-1}(0) \cap U$ и это вложение сохраняло цветные спины в вершины в точке o. Другими словами, граф Δ можно не только расширить до диска, но и задать на расширении функцию Rez^n.*

Определение 2.2. *Пусть у графа Δ порядок каждой вершины четный и больше двух. Цветным спином графа Δ называется задание цветного спина в каждой его вершине. Граф Δ с заданным на нем цветным спином называется цветным спин-графом и обозначать $\lessdot\Delta$.*

В дальнейшем, если задан цветной спин-граф $\lessdot\Delta$, то цветной спин, который есть в вершине x, будем обозначать через $\lessdot\Delta(x)$. Ясно, что на одном и том же графе можно различными способами задать цветной спин.

Определение 2.3. *Пусть $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$ - два цветных спин-графа. Изоморфизм графов φ: $\lessdot\Delta_1 \to \lessdot\Delta_2$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot\Delta_1(x_i)$ в вершине x_i, переходит в пару ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot\ \Delta_2\ \varphi\ (x_i)$ в вершине $\varphi(x_i)$.*

Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(N)$ на поверхности N и пусть c - ее критическое значение. Предположим, что компонента связности Γ из линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит только изолированные критические точки не являющимися экстремумами. Компонента Γ является образом вложенного в поверхность N графа, у которого порядок каждой вершины четный. Вершинами вложенного графа являются критические точки функции f. Если рассмотреть непересекающиеся окрестности существенных критических точек, лежащих на Γ, то в каждой из них, исходя из функции f, возникает цветной спин. Следовательно Γ получает структуру цветного спин-графа.

Определение 2.4. *Компонента связности Γ линии уровня $f^{-1}(c)$ функции f из пространства $f \in C^\infty(N)$, содержащей только изолированные критические точки не являющимися экстремумами, с заданной на ней цветным спином в каждой существенной критической точке, исходя из функции f, называется атомом критического значения c функции f. В дальнейшем атом обозначается через $A(f,c)$.*

Замечание 2.2. *Если прообраз критического значения функции f состоит из k связных компонент, на которых находятся только изолированные критические точки, то имеется k атомов этого критического значения.*

В дальнейшем, если говорится об **изоморфизме** атомов критических значений, то понимается изоморфизм, который сохраняет цветные спины, заданные на них.

Циклом (ориентированным) на ориентированном графе Δ называется совокупность ребер (ориентированных) из Δ, которые образуют гомеоморфный образ окружности (ориентированной). Некомпакатным циклом (ориентированным)на ориентированном графе Δ называется бесконечная совокупность ребер (ориентированных) из Δ, которые образуют гомеоморфный образ прямой (ориентированной). Пусть $\lessdot\Delta$ - цветной спин-граф. Определим на нем два типа циклов (некомпакатных циклов): b-циклы (b-некомпакатные циклы) и w-циклы (w-некомпакатные циклы).

Определение 2.5. *b-циклом (w - циклом) на цветном спин-графе $\lessdot\Delta$ называется цикл, состоящий из ребер $(a_1, a_2, ..., a_n)$, таких что $a_i \cap a_{i+1} = x_i$ – есть вершина и пара ребер (a_i, a_{i+1}) являются черного (белого) цвета цветного спина $\lessdot\Delta(x_i)$ в вершине x_i. b-некомпакатные циклы (w-некомпакатные циклы)определяются аналогично, за исключением того, что проследовательность вершин $(a_1, a_2, ...$ является бесконечной.*

Очевидно, что изоморфизм между цветными спин- графами $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$, сохраняющий цветные спины, переводит b-циклы (w-циклы) из $\lessdot\Delta_1$ в b-циклы (w-циклы) $\lessdot\Delta_2$. Это имеет место и для
b-некомпакатных (w-некомпакатных) циклов.

Лемма 2.1. *Пусть задан цветной спин-граф* $\sphericalangle\Delta$ *(конечный или бесконечный), у которого вершины* $a_1, a_2, \ldots$ *имеют порядок* $2d_1, 2d_2, \ldots$, *больший двух. Предположим, что у него* s *(*s *может равнятся* ∞*)* b*-циклов,* t *(*t *может равнятся* ∞*)* w*-циклов,* u *(*u *может равнятся* ∞*)* b*-некомпактных циклов и* v *(*v *может равнятся* ∞*)* w*-некомпактных циклов. Существует поверхность* N *с краем* $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$ *и гладкая функция* $f : N \to R^1$, *имеющая изолированные критические точки, находящиеся в биекции с вершинами* $a_1, a_2, \ldots$, *в окрестностях, которых она имеет вид* Rez^{d_i}. *Число компактных компонент связности края* ∂N, *входящих в* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *равно* s (t). *Число некомпактных компонент связности края* ∂N, *входящих в* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *равно* u (v). *На компонентах* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *функция* f *принимает значение* -1 (1) *и все ее критические точки лежат на линии уровня* $\Gamma = f^{-1}(0)$. *Граф* $\Gamma = f^{-1}(0)$ *снабженный цветным спином, исходя из функции* f *и цветной спин-граф* $\sphericalangle\Delta$ *изоморфны с сохранением цветных спинов. В дальнейшем поверхность* N *называется* ***расширением*** *цветного спин-графа* $\sphericalangle\Delta$.

Доказательство. В начале построим поверхность N с краем ∂N. Пусть $D(\varepsilon) = (x, y)$: $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$ – ε-окрестность нуля на плоскости R^2, в которой заданы функции $g_i = Re(x + iy)^{d_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим пересечение множеств $D(\varepsilon)$ и $\Phi = (x, y) : -\delta \leq Re(x + iy)^{d_i} \leq \delta$, которые обозначим через Cr_i. Граница множества Cr_i состоит из 2 d_i дуг окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ и 2 d_i кусков линий уровня функции $Re(x + iy)^{d_i} = \pm\delta$. В силу замечания 2.1 существует вложение φ окрестности каждой вершины графа Δ в линию уровня функции g_i, содержащую критическую точку, которое сохраняет цветные спины. Возьмем несвязное объединение счетного числа экземпляров множества

Cr_i и вложим в них окрестности вершин графа Δ, используя вложение φ. Выберем счетное множество полосок Υ_i, которые будем подклеивать к множествам Cr_i. На каждом экземпляре множества Cr_i задана функция g_i, которую мы используем для подклейки нужным образом к ним полосок Υ_i. А именно: вдоль каждого ребра графа Δ склеим меньшие стороны полоски Υ_{i_0} с соответствующими дугами a^i двух (или одного) экземпляров множеств Cr_i. Подклейку полосок надо производить таким образом, чтобы функции g_i с каждого экземпляра множества Cr_i продолжались во внутрь полосок Υ_i без критических точек. В результате мы получили поверхность N_1 с заданной на ней функцией f_1. По построению, множество компонент края $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ поверхности N_1, которые состоят из длинных сторон полосок и кусков линий уровня $Re(x+iy)^{d_i} = \pm\delta$ соответствуют b-циклам (w-циклам), на которых функция f_1 принимает отрицательные (положительные) значения находится в биекции с множеством b-циклов (w-циклов) компактных и некомпактных графа Δ. Подклеив к каждой компоненте края поверхности N_1 воротники и продолжив на них функцию f_1, мы получим искомые поверхность N и функцию f на ней. Тот факт, что граф $\Gamma = f^{-1}(0)$ снабженный цветным спином, исходя из функции f, и цветной спин-граф $\lessdot\Delta$ изоморфны с сохранением цветных спинов следует способа построения поверхности N и функцию f. $\square$

Поверхность N_1, построенная при доказательстве леммы 2.1 называется **замкнутой** ε-окрестностью атома функции f. Ясно, что выбор цветного спина на графе может менять топологический тип его расширения. Очевидно, что на конечном графе можно задать только **конечное число** различных (не изоморфных) цветных спинов. Следующая лемма имеется в [20].

Лемма 2.2. *Существует конечное число попарно не изоморфных (как графов) конечных графов Δ_i с заданными на них цветными спинами, расширения которых - гомеоморфные поверхности.*

Для бесконечных графов ситуация более сложная. Так например, утолщение любого бесконечного дерева с четным порядком вершин является некомпактной поверхностью с краем, которая гомеоморфна единичному кругу D^2 с удаленным канторовым множеством с граничной окружности ∂D^2. Ситуацию, связанную с утолщением бесконечных графов с четным порядком вершин больщих двух, мы проанализируем в другой работе.

3. Графы Кронрода-Риба собственных гладких функций на некомпактных поверхностях.

Пусть f - собственная гладкая функция с изолированными критическими на поверхности N. Мы предполагаем, что все критические точки f лежат во внутренности поверхности N и на связных компоентах края N функция f принимает постоянные значения. Рассмотрим произвольную компоненту связности линии уровня $f^{-1}(a)$, функции f, которую часто называют слоем. Если a - регулярное значение функции f, то слоем будет гладко вложенная в поверхность N окружность. В случае, когда a - критическое значение, то слоем будет замкнутое множество гомеоморфное либо окружности, либо конечному графу, у которого четный порядок вершин больший двух [2]. Если рассмотреть все слои функции f, то получим разбиения поверхности N в объединение слоев т.е. на N возникает слоение с особенностями. Принадлежность точки поверхности слою является отношением эквивалентности и вводя естественную фактор-топологию в множество слоев получаем фактор-множество. Это фактор-множество будет конечным или бесконечным графом, которое будет обозначаться через $\Gamma_{K-R}(f)$.

Определение 3.1. *Граф $\Gamma_{K-R}(f)$ называется графом Кронрода-Риба для функции f.*

По поводу этого определения см.[2,6,19]. Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(f)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых находятся критические точки функции. Вершины порядка 1 соответствуют локальным экстремумам функции f. Если присутствуют вершины порядка два, то поверхность N - неориентируема. Очевидно, что функции f каноническим образом задает функцию f_{K-R} на ее графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$. Значение f_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(f)$ равно значению f на соответствующей x компоненте связности линии уровня.

Определение 3.2. *Функция f_{K-R}, заданная на графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$, называется $K-R$ образом функции f, заданной на поверхности N.*

Замечание 3.1. *Часто достаточно знать значение функции f_{K-R} только в вершинах графа Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f. И поэтому, именно это иногда понимают под **K-R образом функции** f [20]. В некоторых вопросах необходимо вводить структуру метрического пространства на графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f и рассматривать функцию f_{K-R} на всем $\Gamma_{K-R}(f)$.*

Граф Кронрода-Риба допускает **ориентацию**, т.е. расстановку стрелок на ребрах, которые указывают направление в котором функция f_{K-R} возрастает.

Заметим, что не всякий конечный (или бесконечный) граф, будет графом Кронрода-Риба для некоторой собственной гладкой функции с изолированными критическими точками на поверхности. Ориентированный граф $\Gamma(N)$, для которого существует поверхность N и гладкая собственная функция с изолированными критическими точками f на ней, такая что ее граф Кронрода-Риба f_{K-R} изоморфен с сохранением ориентации графу Γ называется **K-R графом.** Ниже мы обсудим более подробно этот вопрос.

Определение 3.3. *Пусть на гладкой поверхности N заданы две собственные гладкие функции с изолированными критическими точками f и g, а f_{K-R} и g_{K-R} на графах $\Gamma_{K-R}(f)$ и $\Gamma_{K-R}(g)$. Скажем, что f и g K-R эквивалентны, если их K-R образы f_{K-R} и g_{K-R} эквивалентны, т.е. существует изоморфизм $s : \Gamma_{K-R}(f) \to \Gamma_{K-R}(g)$ и гомеоморфизм $t : R^1 \to R^1$ такие, что $t \cdot f_{K-R} \cdot s^{-1} = g_{K-R}$.*

Несложно доказать, что если две собственные гладкие функции с изолированными критическими точками f и g, которые заданы на поверхности N являются топологически эквивалентными, то f и g будут K-R эквивалентны. Однако обратное утверждение неверно.

С каждым атомом $A(f, c)$ критического c значения гладкой функции f можно связать его граф Кронрода-Риба $K - R(A(f, c)$. А именно, надо рассмотреть сужение $f|_U$ функции f на замкнутую ε-окрестность U атома $A(f, c)$ и построить граф Кронрода-Риба для $f|_U$. Он представляет собой два набора a_i и b_j ребер, выходящих из вершины. Набор ребер a_i (b_j) соответствует b-циклам (w-циклам) атома $A(f, c)$. Имеется **каноническое вложение** открытого графа (вершины порядка один удалены) Кронрода-Риба

$K-R(A(f,c))$ каждого атома $A(f,c)$ в граф Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f. Существуют простейшие атомы для графа Кронрода-Риба с данным набором ребер a_i и b_j $(i=1,2,...k, j=1,2...,l)$. В ориентированнм случае это будет цветной спин-граф $O(k,l$, утолщение, которого сфера с выброшенными $k+l$ открытыми дисками. В неориентированном случае это цветной спин-граф $NO(k,l$ утолщение, которого склейка листа Мебиуса с выброшенным открытым диском и $O(k-1,l-1)$ [19]. Эти атомы мы используем для построения поверхностей и гладких функций с изолированными особенностями на них с данным графом Кронрода-Риба. Если некоторые атомы функции f таковы, что их утолщения - неориентированные поверхности, то на ее графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$, соответствующую вершину будем обозначать звездочкой $*$.

Заметим, что для графов имеются аналоги понятия конца и пространства концов.

Лемма 3.1. *Каждое замкнутое подмножество X канторового множества является множеством концов некоторого $K-R$ графа.*

Доказательство. По теореме Рихардса существует открытая поверхность N, у которой множество концов гомеоморфно X. Построим на N собственную функцию с изолированными особенностями (например функцию Морса) f, тогда ее граф Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ будет удовлетворять условию леммы. Действительно, существует вложение $i:\Gamma_{K-R}(f)\longrightarrow N$, такое что $f\cdot i=Id$. Если убывающая последовательность $M_1\supset M_2\supset ...$ связных поверхностей с краем в N задает конец в N, то $M_1\bigcap i(\Gamma_{K-R}(f))\supset M_2\bigcap i(\Gamma_{K-R}(f))\supset ...$ задает конец в $i(\Gamma_{K-R}(f))$ и следовательно в $\Gamma_{K-R}(f)$. $\square$

4. Функции на графах.

В этом разделе, как правило, возникающие графы связаны с функциями на поверхностях, поэтому наложим на них некоторые ограничения, которые естественно возникают. Пусть v - вершина графа Γ. Граф $\Gamma_v = \Gamma - v$ получается из графа Γ в результате удаления вершины v и всех инцедентных ей ребер. Вершина v называется разбивающей, если граф Γ_v - несвязное множество. Обозначим через Ω - множество вершин порядка 1 в графе Γ.

Определение 4.1. *Граф* Γ *удовлетворяет условию* (f), *если:*

a) Γ- *связное множество;*
b) *Для каждой разбивающей вершины* v *из* Γ, *такой что, если среди компонент связности графа* Γ_v *присутствуют конечные графы* Γ_v^i *,то* $\Gamma_v^i \bigcap \Omega \neq \varnothing$*;*
c) *Если граф* Γ *- конечен, то* Ω *состоит не менее из двух вершин.*

На рисунке 3 представлен граф, который не удовлетворяет условию (f)

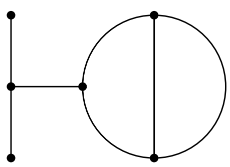


Рис. 1. Граф, который не является K-R графом

Для бесконечных графов выполнение последнего условия не обязательно. Обычно мы будем рассматривать ориентированные графы, т.е. графы с указанием направлений на ребрах (в дальнейшем орграфы).

Определение 4.2. *Орграф* Γ *с условием* (f)*- это задание направлений на ребрах орграфа* Γ *так,чтобы имели место следующие свойства :*

а) *Если орграф* Γ *конечен, то на ребрах инцидентных вершинам порядка 1 имелись направления, входящие в вершину порядка 1, и направления, выходящие из вершины порядка 1;*

в) *На ребрах инцидентных произвольной вершине* (a) *порядка* n $(n \geq 2)$*, имелись оба типа направлений, входящих и выходящих из* (a)*;*

с) *В* Γ *отсутствуют ориентированные замкнутые циклы.*

Под ориентированным циклом на орграфе Γ понимается совокупность ориентированных ребер из Γ, которые образуют гомеоморфный образ ориентированной окружности. Будем говорить, что два орграфа изоморфны, если существует изоморфизм между ними, сохраняющий ориентацию ребер. Очевидно, что на одном и том же орграфе можно указать такие ориентации, что полученные орграфы будут не изоморфными. Возникает естественный вопрос: *на каждом ли графе с условием* (f) *можно задать ориентацию, так, чтобы он стал орграфом с условием* (f)? Оказывается, что в этом круге вопросов полезно рассматривать монотонные функции на графах.

Определение 4.3. *Пусть* $g : \Gamma \to R$ *- непрерывная функция на графе* Γ*. Скажем, что* g *- монототонная на* Γ*, если:*

а) *сужение g на ребрах - строго монотонная функция;*
в) *локальные экстремумы g находятся на вершинах порядка 1.*

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $g : \Gamma \to R$ - монотонная функция на связном графе Γ. Тогда Γ имеет структуру орграфа с условием (f).*

Доказательство. Для определенности предположим, что g - монотонно возрастающая функция. Если граф конечен, то он имеет по крайней мере один максимум и один минимум в вершинах порядка один. Условие на разбивающие вершины также выполняется. Ориентация на ребрах задается указанием направления роста функции. Ясно, что так введенная ориентация превращает граф Γ в орграф с условием (f). $\square$

В дальнейшем нам понадобится специальный класс монотонных функций на графах,так называемых, функций высоты. Предположим, что в R^3 задана декартова система координат (x, y, z).

Определение 4.4. *Пусть граф Γ вложен в R^3 так, что его проекция π на ось (o, z) является монотонной функцией на Γ. Тогда функция π называется функцией высоты.*

Лемма 4.2. *Предположим, что $g : \Gamma \to R$ - монотонная функция на графе Γ. Тогда существует вложение $\phi : \Gamma \to R^3$ такое, что $\pi \circ \phi = g$.*

Доказательство. Занумеруем произвольным образом вершины v_i графа Γ. Зададим отображение ϕ на вершинах графа Γ положив $\phi(v_i) = (i, i+1, g(v_i))$. Соединим соответствующие пары вершин $\phi(v_i)$, гладко вложенными, непересекающимися по внутренним точкам, отрезками, которые диффомеоморфно отображаются на ось (o, z) посредством проекции π. Продолжим очевидным образом вложение ϕ с вершин графа Γ на его ребра так, чтобы выполнялось равенство $\pi \circ \phi = g$. $\square$

Таким образом, произвольную монотонную функцию заданную на графе, можно представлять, как функцию высоты для графа расположенного в R^3. Оказывается,что на произвольном орграфе, удовлетворяющим условию (f) всегда существует монотонная функция.

Напомним, что под ориентированным путем на орграфе Γ понимается совокупность ориентированных ребер из Γ, которые образуют гомеоморфный образ ориентированного отрезка. Длинной ориентированного пути на орграфе Γ называется число ребер из которых он состоит.

Для полноты изложения, приведем доказательство следующей теоремы, которая имеется в [19].

Теорема 4.1. *Пусть Γ - орграф с условием (f). Тогда на Γ существует возрастающая (убывающая) функция $g : \Gamma \to R$.*

Доказательство. Для определенности построим на орграфе Γ возрастающую функцию g. Рассуждения будут носить индуктивный характер. Занумеруем произвольным образом вершины (v_i) в орграфе Γ. Выберем первую вершину v_1 из Γ и положим $g(v_1) = 1$. Рассмотрим вторую вершину v_2. Если в Γ не существует ориентированного пути s, соединяющего вершины v_1 и v_2, тогда положим $g(v_2) = 1$. Если же в Γ имеется ориентированный путь s, соединяющий эти вершины, в этом случае положим $g(v_2) = 2$,

$(g(v_2) = 0)$, если вершина v_2 - конец (начало) пути s. Предположим , что мы задали значение функции g на вершинах v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Выберем вершину v_k в орграфе Г. Имеется четыре возможности для соединения вершины v_k с вершинами v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$ в орграфе Г.

а) вершина v_k не соеденена в Г с вершинами v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$ ориентированным путем;
в) в Г существует ориентированный путь s, с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1$, с концом в вершине $v_{i_1}(1 \leq i_1 \leq k-1$ и содержащий вершину v_k;
c) в Г существует только ориентированный путь s с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$ и концом в вершине v_k (нет в Г ориентированного пути с началом в вершине v_k и концом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$);
d) в Г существует только ориентированный путь s с началом в вершине v_k и концом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$ (нет в Г ориентированного пути с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$) и концом в вершине v_k.

В случае а) положим $g(v_k) = 1$. Рассмотрим случай в). Выберем в Г ориентированный путь s, который удовлетворяет условиям :

а) началом пути s служит вершина $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1$, на которой функция g принимает максимальное значение $g(v_{i_0}) = a_{i_0}$, по отношению к остальным вершинам из v_i
$(i = 1, 2, ..., k-1)$, являющимися началами ориентированных путей в Г, идущих в вершину v_k;

b) концом пути s служит вершина $v_{i_1}(1 \leq i_1 \leq k-1$, на которой функция g принимает минимальное значение $g(v_{i_0}) = b_{i_0}$, по отношению к остальным вершинам из v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$, которые являются концами ориентированных путей в Γ, идущих из вершины v_k.

В этом случае положим $g(v_k) = a_{i_0} + 1/2(b_{i_0} - a_{i_0})$. Рассмотрим случай c). Пусть c_k - максимальное значение, которое принимает функция g на множестве вершин v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Положим $g(v_k) = c_k + 1$. В последнем случае поступим аналогично. Пусть d_k - минимальное значение, которое принимает функция g на множестве вершин v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Положим $g(v_k) = d_k - 1$. Индуктивный шаг сделан. Покажем, что так построенная на вершинах орграфа Γ функция g, может быть продолжена на ребра до строго возрастающей функции на орграфе Γ. Выберем произвольное ориентированное ребро e с началом в вершине v_i и концом в вершине v_j. Предположим, что $i < j$ $(i > j)$. Тогда при построении функции g первой встретится вершина v_i (v_j) на которой будет задано значение g. В силу способа построения функции g, значение g на вершине v_j (v_i) будет большим(меьшим) чем значение g на вершине v_i (v_j). Следовательно, функцию g можно корректно продолжить с вершин орграфа Γ на его ребра. Тот факт, что у функции g не будет локальных экстремумов на вершинах порядка больших чем 1 вытекает из того, что этим вершинам инцидентны входящие и выходящие ребра. Таким образом в итоге мы имеем возрастающую функцию. $\square$

Замечание 4.1. *Заметим, что так построенная функция g, может принимать одно и тоже значение на бесконечном множестве вершин. Несложно подправить способ построения функции g, так чтобы она принимала на вершинах разные значения. А именно: в случае a) надо положить $g(v_k) = 1 + 1/p_k$, где p_k - возрастающая последовательность простых чисел. В случае b) надо положить*

$$g(v_k) = a_{i_0} + 1/2(b_{i_0} - a_{i_0}) + \varepsilon_k,$$

где число ε_k подобрано таким образом, чтобы значение функции g на вершине v_k отличалось от значения g на предыдущих вершинах. Аналогичным образом надо поступать в оставшихся случаях.

Таким образом имеет место утверждение.

Обобщение 4.1. *Пусть Γ - орграф с условием (f). Тогда на Γ существует возрастающая (убывающей) функция, принимающая на вершинах различные значения.*

Лемма 4.3. *Каждый бесконечный граф без разбивающих вершин содержит путь гомеоморфный R^1.*

Доказательство. Напомним, что звездой вершины называется все ребра ей инцедентные. Выберем произвольную вершину v графа и рассмотрим ее звезду без кратных ребер. Полученная совокупность ребер A_1 соединяет набор вершин $v_1, v^2, ..., v_k$ с вершиной v. Выберем вершину v_1 и рассмотрим только те ребра из ее звезды, которые соединяют в графе вершины отличные от $v, v^2, ..., v_k$. Заметим, что может случится, что таких ребер нет. Добавим это множество ребер к множеству A_1 и обозначим полученное множество через A_2. Это множество ребер соединяет новые вершины $w_1, w_2, ..., w_l$. с вершинами $v, v_1, v^2, ..., v_k$. Опять выберем вершину v_2, рассмотрим только те ребра из ее звезды, которые соединяют в графе вершины отличные от $v, v_1, v^3, ..., v_k, w_1, w_2, ..., w_l$. Может случится снова, что таких ребер нет. Добавим это новое множество ребер к множеству A_2 и обозначим полученное множество ребер через A_3. Эту процедуру проделаенм с оставшимися вершинами v_i. Заметим, что в силу бесконечности графа на каком то шагу добавление новых ребер к множеству ребер A_1 произойдет. В итоге, после того как будут переберaны все вершины v_i, мы получим дерево B_1. Обозначим вершины порядка 1 дерева B_1 через $b_1, ..., b_s$. Последовательно рассматривая звезды вершин b_i,, аналогичным способом будем добавлять новые ребра к дереву B_1. В силу бесконечности графа, после перебора всех вершин b_i, мы получим новое дерево B_2, которое строго содержит дерево B_1. Опять таки, в силу бесконечности графа, этот поцесс можно продолжить счетное число раз, получив в итоге бесконечное дерево. Заметим, что на каком то шаге может случится следующая ситуация : у дерева B_j возможно соединение некоторых вершин порядка 1 с одной и той же новой вершиной x, а остальные вершины порядка 1, вообще не допускают новых соединений. В этом случае, легко видеть, что вершина x будет разбивающей вершиной графа, чего в силу наложенного условия быть не может. Следовательно, по крайней мере два непересекающиеся пути, выходящие из вершины v, будут уходить в бесконечность. Их объединение и дает искомый путь, гомеоморфный R^1. □

Теорема 4.2. *Пусть* Γ *- граф с условием* (f)*. Тогда на* Γ *существует возрастающая (убывающей) функция.*

Доказательство. Если граф Γ является бесконечным и не содержит разбивающих вершин, то по предыдущей лемме он имеет путь s гомеоморфный R^1. Если мультиграф

Г является бесконечным, но содержит разбивающие вершины, то в результате удаления одной из них возникнет две возможности : либо найдется по крайней мере две бесконечные компоненты, либо будет одна бесконечная компонента, а все остальные компоненты будут конечными и следовательно, они будут иметь вершины порядка 1. В первом случае по теореме Кенига в каждой из бесконечной компоненте найдется по бесконечному лучу, выходящему из разбивающей вершины и их объединение даст путь s в Г гомеоморфный R^1. Во втором случае выберем произвольный бесконечный луч s, выходящий из вершины порядка 1.

Если граф Г является конечным, то выберем произвольный путь s, соединяющий любые две вершины порядка 1. В каждом из рассмотренных случаях зададим на s монотонно возрастающую функцию g. Пустьv_1 - произвольная вершина из s, которую можно соеденить путем v_{s_1} вершиной w_1 так, чтобы пути $v_{s_1} \bigcap s = V_1 \bigcup w_1$. Поскольку на вершина v_1 и w_1 значение функции g имеется продолжим g до монотонно возрастающей функции на пути v_{s_1}. Аналогичным образом будем продолжать функцию g на другие пути v_{s_i}, соединяющие пары вершин $v_i w_i$ на которых уже g задана, дополнительно требуя, чтобы новые пути v_{s_i} пересекались с уже построенными путями разве, что по вершинам $v_i w_i$. Кроме того, в процессе продолжения функции g будем задавать ее значение на вершинах таким образом, чтобы не существовало пары вершин с одинаковым значением g. Может случится, что мы наткнемся на разбивающую вершину из которой выходит луч (путь) t уходящий в бесконечность (в вершину порядка 1) и не пересекающий уже построенные пути. Подолжим функцию

g с этой разбивающей вершины до монотонно возрастающей функции на t. Затем повторим предыдущую процедуру построения функции. В итоге мы получим монотонно возрастающую функцию на графе Γ. □

Следствие 4.1. *Каждый граф с условием (f) можно превратить в орграф с условием (f).*

5. Когда граф Γ есть граф Кронрода-Риба гладкой функции с изолирванными особенностями.

Теорема 5.1. *Каждый граф с условием (f) есть граф Кронрода-Риба гладкой функции с изолирванными особенностями, заданной на поверхности.*

Доказательство. Пусть граф Γ удовлетворяет условием (f). Тогда на нем существует монотонная функция g. Используя атомы $O(k,l)$ и $NO(k,l)$ и граф Γ склеим из них поверхность N. Функцию Морса F на поверхности N зададим, используя функцию g. □

Теорема 5.2. *Пусть граф Γ удовлетворяет условию (f) и на нем задана функция высоты g, тогда существует ориентированная поверхность N и гладкая функция G с изолирванными особенностями на ней , являющейся функцией высоты, у которой граф Кронрода-Риба изоморфен Γ.*

Доказательство. Вложим граф Γ в R^3 таким образом, чтобы проекция на ось OX задавала функцию высоты g. Пусть U - трубчатая окрестность графа Γ в R^3, ∂U - ее граница. Положим $N = \partial U$. Используя функцию g, легко построить гладкую функцию G с изолирванными особенностями (воспользовавшись например функцией Морса) на N, которая есть функция высоты. □

Замечание 5.1. *Очевидно, что граф Кронрода-Риба любой собственной гладкой функции с изолирванными особенностями, заданной на поверхности (компактной или некомпактной), удовлетворяет условию* (f).

Следовательно имеет место следующая теорема.

Теорема 5.3. *Для того, чтобы граф был графом Кронрода-Риба гладкой функцию* G *с изолирванными особенностями на некоторой поверхности необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию* (f) .

Доказательство. Следствие теоремы 5.1 и замечания 5.1.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И., Варченко А.Н.,С.М. Гусейн-Заде* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982 - Т.1 - 302 с.

[2] *Болсинов А.В., Фоменко Ф.Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука 1997-352 с.

[3] *Васильев В.А.* Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС,1997 - 538 с.

[4] *Hirsh M.* On imbeding differentiable manifolds in Euclidean space.// Annals of Math.-1961.-73.-N3-p.566-571.

[5] *Гирик Е.А.* О существовании векторных полей с заданным набором особенностей на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии. // Укр.мат.журн.-1993. - 46, N 12- С.1706-1709.

[6] *Кронрод А.С.* О функциях двух переменных. //Успехи мат. наук - 1950. - 5, N1-С. 24-134.

[7] *Кудрявцева Е.А.* О реализации гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Мат. сборник - 1999.- 190, N1 - С.29-88.

[8] *Kulinich E.V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces.//Methods of Functional Analysis and Topology.- 1998.-4.-N1-p.59-64.

[9] *Максименко С.И.* Классификация m-функций на поверхностях // Укр.мат.журн.-1999. - 51, N 8 - С.1129-1135.

[10] *Мантуров В.О.* Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // Топологические методы в теории гамильтоновых

систем (сборник статей) под редакцией А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко, А.И.Шафаревича. М. Изд-во Факториал - 1998, С. 203-212.

[11] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та - 1991 - 301 с.

[12] *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965- 184 с.

[13] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей//ТР. МИРАН.- 1994- 205.С.131-140.

[14] *Оре О.* Теория графов. М.: Мир, 1965- 293 с.

[15] *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. // Topology and its Applications.- 2002.-119.- p.257-267.

[16] *Richards I.* On classifications of noncompact surfaces. // Trans.Amer.Math. Sos.(N.S.) -1963 - 106. - p. 259-269.

[17] *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы.М.: Наука.- 1977-487с.

[18] *Sharko V.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces. // International Conference at Chelyabinsk State Univ.,Low-Dimensional Group Theory.-1996.-p.19-23.

[19] *Sharko V.V.* About Kronrod-Reeb graph of fuction on a manifold. //Methods of Functional Analysis and Topology.- 2006.-12.-N4-p.389-396.

[20] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях.// Укр.мат. журн.-2003-55.№ 5-с.687-700.

[21] *Шарко В.В.* Функции на поверхностях. I // Некоторые вопросы современной математики. Праці Інституту математики НАН України. Т.25. отв.ред. В.В.Шарко.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.- с.408-434.

[22] *Whitehead J.H.C.* The immersion of open 3-manifold in Euclidean 3-space.// Proc. London Math. Sos. - 1961.-11.-N.3-p. 81-90.

Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 474-486

І. А. Юрчук

Київський національний університет ім. Т.Шевченка, Київ
E-mail: iyurch@ukr.net

Топологічна еквівалентність функцій з класу $F(D^2)$

We construct the combinatorial invariant of functions from a $F(D^2)$ class. Necessary and sufficient condition for a topological equivalence of such functions is obtained in terms of their invariants.

Ключові слова: *pseudoharmonic functions, a topological equivalence*

Вступ

Проблемі дослідження умов топологічної еквівалентності функцій присвячені роботи [1, 2, 5, 6, 9–13, 19] та ін. Відмітимо, що переважна більшість розв'язків топологічних задач такого типу, зводиться до дослідження комбінаторних об'єктів. Для прикладу, у роботі [12] автори, вивчаючи проблему класифікації полів Морса-Смейла на замкнених двовимірних многовидах, будують спін графи, ізоморфізм яких є необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності полів. У роботах Арнольда [1, 11] при класифікації M–морсифікацій та біфуркацій виникає такий комбінаторний об'єкт, як змії (перестановки спеціального типу).

В даній роботі будемо розглядати неперервні функції, які задані на одиничному диску $D^2 \subset \mathbb{C}$ і задовольняють умовам:

- звуження цих функцій на границю диску ∂D^2 є неперервні функції з *скінченим* числом локальних екстремумів (максимумів та мінімумів);
- у внутрішності диску ці функції мають скінчене число критичних точок, які є сідлами (локальне представлення функції в околі сідла з точністю до неперервної заміни координат має наступний вигляд $f = Rez^n + const$, де $z = x + iy$).

Позначимо цей клас функцій через $F(D^2)$. Даний клас функцій співпадає з класом псевдогармонічних функцій, що задані на D^2 [4, 7, 14–18].

Основна мета роботи – побудувати інваріант функцій з класу $F(D^2)$ та знайти необхідні та достатні умови їх топологічної еквівалентності.

1. Основні означення.

Нехай f деяка функція з класу $F(D^2)$. Надалі, ми будемо розглядати орієнтовані диски та гомеоморфізми, що ***зберігають орієнтацію***. Відомо [8, с.254], якщо E_1, E_2 – диски і $h : \partial E_1 \to \partial E_2$– гомеоморфізм, то існує гомеоморфізм $H : E_1 \to E_2$ такий, що $H|_{\partial E_1} = h$.

Означення 1.1. *Дві неперервні функції $f, g : D^2 \to \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h_1 : D^2 \to D^2$ та $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$.*

Нагадаємо, що точка $(x_0, y_0) \in IntD^2$ гладкої функції f називається критичною, якщо $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Число c називається критичним (регулярним) значенням функції f, якщо множина рівня $f^{-1}(c)$ містить критичні точки функції (не містить критичних точок функції та гомеоморфна незв'язному об'єднанню відрізків, які перетинаються з границею ∂D^2 лише по своїх кінцях).

Відомо, що лініями рівня критичного значення функції з класу $F(D^2)$ є дерева (взагалі кажучи незв'язні) [14, с.430].

Означення 1.2. *Значення c називається квазірегулярним значенням функції f, якщо воно не є ні регулярним, ні критичним.*

Зауваження 1.1. *Із означень випливає, що лінії рівня квазірегулярного значення містять лише граничні критичні точки, а лінії рівня критичного, як критичні, так і граничні критичні точки.*

Згідно Теореми 4.1 [17, с.28] для довільної граничної критичної точки існує канонічний гомеоморфізм її околу на півдиск з центром в даній точці і скінченим числом променів, що виходять з нього. Для довільної граничної критичної точки x число областей, на які розбито півдиск, більше 2. Відмітимо ту особливість, що у випадку, коли число областей непарне, то області, які прилягають до границі ∂D^2, мають один і той самий знак. Звідки випливає, що точка x є локальним екстремумом функції $f|_{\partial D^2}$. Зрозуміло, що у випадку мінуса дана точка є локальним максимумом, а у випадку плюса – мінімумом.

Той факт, що число граничних критичних точок скінчене, випливає з рівності Морса [4, с.50], яка має вигляд

$$2 - \nu = m - S - s,$$

де ν – число граничних кривих області (в нашому випадку $\nu = 1$), m – число локальних мінімумів на границі ∂D^2, S та s – числа критичних точок та граничних критичних точок, кожна з яких враховується зі своїм степенем. Під степенем (граничної) критичної точки розуміють число $m-1$,

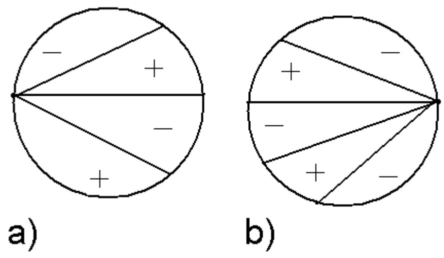


Рис. 1. У випадку a) точка є регулярною, а у випадку b) – локальним максимумом функції $f|_{\partial D^2}$.

де m – це число секторів зі знаком мінус, на які розбито її канонічний окіл.

Зауважимо, що у випадку, коли гранична критична точка є локальним мінімумом, в рівності Морса її враховуємо лише раз, як граничну критичну точку з відповідним їй степенем.

2. Комбінаторний інваріант та умови топологічної еквівалентності функцій з класу $F(D^2)$.

Нагадаємо означення графу Кронрода–Ріба.

Нехай M гладкий компактний многовид. Розглянемо деяку гладку функцію $f : M \to \mathbb{R}$ із скінченим числом критичних точок. Далі, означимо як шар зв'язну компоненту поверхні рівня $f^{-1}(a)$, де $a \in \mathbb{R}$. Тоді, многовид M є об'єднанням всіх шарів функції f. Введемо відношення еквівалентності, як властивість точки належати одному шару. Отримана фактор множина гомеоморфна скінченому графу, який назвемо графом Кронрода - Ріба і позначимо через $\Gamma_{K-R}(f)$.

Зауважимо, що побудова графу Кронрода - Ріба для многовиду з краєм є питання відкрите, а оскільки функції з класу $F(D^2)$ визначені на диску, то виникає необхідність ввести інший інваріант.

Опишемо ***побудову комбінаторної діаграми***, що відповідає деякій функції f з класу $F(D^2)$:

1) Розглянемо граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$, що відповідає звуженню функції f на границю ∂D^2. Він ізоморфний колу з парним числом вершин, степінь яких рівний 2.
2) Нехай a_i – критичні значення функції, а c_j – квазірегулярні. Додамо до $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ ті компоненти зв'язності множин

$$f^{-1}(a_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(a_k) \cup f^{-1}(c_1) \cup f^{-1}(c_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(c_l),$$

ліній рівня, які містять критичні та граничні критичні точки. Зрозуміло, що в цьому випадку на графі Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ з'являться нові вершини. Позначимо через

$$P(f) = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \bigcup_i \widehat{f}^{-1}(a_i) \bigcup_j \widehat{f}^{-1}(c_j),$$

де $\widehat{f}^{-1}(a_i) \subset f^{-1}(a_i)$, $\widehat{f}^{-1}(c_j) \subset f^{-1}(c_j)$ – компоненти з'язності множин рівня, що містять критичні та граничні критичні точки.
3) Встановимо на вершинах комбінаторної діаграми $P(f)$ частковий порядок за правилом: $v_1 \lesseqgtr v_2 \iff f(x_1) \lesseqgtr f(x_2)$, де $v_1, v_2 \in P(f)$, x_1, x_2 точки, що відповідають вершинам v_1, v_2. Вершини, в яких функція приймає однакові значення, будемо вважати непорівнюваними.

Оскільки, дане відношення часткового порядку антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне, то встановлений частковий порядок є строгим [3, с.36].

Зауважимо, що скориставшись гомеоморфізмом числової осі, значення функції в локальних екстремумах функції $f|_{\partial D^2}$ будемо вважати цілими, а критичні та квазірегулярні – дробовими.

Отже, конструкцію $P(f)$ разом із строгим частковим порядком будемо називати комбінаторною діаграмою функції f з класу $F(D^2)$. І згідно побудови, $P(f)$ – це скінчений граф із заданим строгим частковим порядком на вершинах, степінь яких більший одиниці.

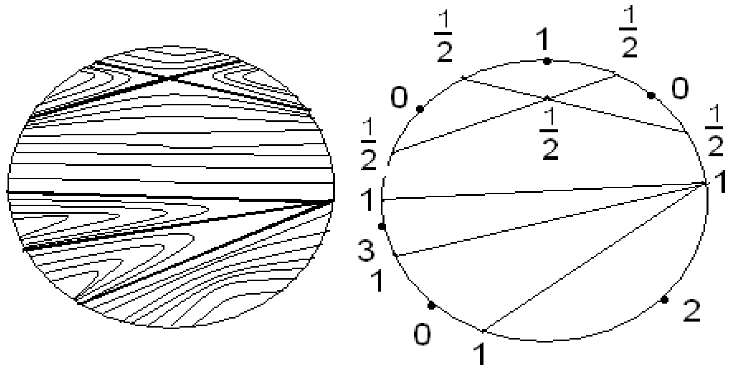


Рис. 1. Діаграма деякої функції з класу $F(D^2)$.

Зауважимо, що під графом ми розуміємо топологічний граф (CW - комплекс з 0 та 1 – вимірними клітинами, де 0−вимірні клітини – вершини дерева, а 1−вимірні – ребра). Нагадаємо декілька означень. Дві вершини v_1 та v_2

деякого графа G називаються суміжними, якщо вони є кінцевими вершинами одного і того ж ребра. Відображення ϕ графа $G \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ називається вкладенням, якщо $\phi(x)$ та $\phi(y)$ з'єднані відрізком в $\mathbb{R}^2$ тоді і тільки тоді, коли x та y з'єднані ребром в G і жодні два відкриті відрізки в $\mathbb{R}^2$ не мають спільних точок.

Зауважимо, що при вкладенні ϕ в околі кожної вершини $\phi(v)$, де $v \in G$, виникає циклічний порядок ребер e_i (вершин v_i), що їй інцидентні (суміжні з нею).

Означення 2.1. *$\mathcal{C}r$– підграфом діаграми $P(f)$ назвемо деякий підграф $q(f)$, який задовольняє умовам:*

- *$q(f)$ – простий цикл;*
- *довільна пара суміжних вершин $v_i, v_{i+1} \in q(f)$ є порівнянною.*

Нехай v деяка вершина діаграми $P(f)$, а $\{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, – множина суміжних з нею вершин. Тоді, існують точки x та x_i, що належать диску D^2 і відповідають вершинам v та v_i. Позначимо через X_i - множину точок, що відповідають ребру $e(v, v_i)$ (зрозуміло, що множини X_i гомеоморфні відрізку) і $X_i \in D^2$. Розглянемо такі випадки:

Випадок 1: $x \in IntD^2$. Тоді $f(x) = f(x_i) = a$, де $i = \overline{1,k}$, a - деяке критичне значення. Тому вершини v,$v_1, v_2, \ldots, v_k$ є непорівнюваними між собою. Оскільки, лінією рівня критичного значення a є скінченне дерево, то всі його вершини є непорівнюваними.

Випадок 2: $x \in \partial D^2$. В даному випадку точка x є або регулярною, або локальним екстремумом функції $f|_{\partial D^2}$, яка є неперервною та монотонно зростаючою (спадною) між сусідніми локальними екстремумами. Тому, серед множин X_i існують такі, що функція на них монотонно зростає (спадає). Оскільки, коло є замкненою жордановою кривою, то таких множин в точності дві X_j та X_k кінцями яких є точки x_j та x_k. Звідки випливає, що серед вершин $\{v_i\}$ існує в точності дві вершини v_j та v_k, які є порівнянними з вершиною v. Оскільки для кожної з вершин v_j та v_k існує в точності дві вершини, які є порівнянними з нею, то дані вершини утворять цикл. Зрозуміло, що вершина v разом з вершинами v_j та v_k належить $q(f)$–циклу.

З того, що діаграма $P(f)$ побудована за деякою функцією з класу $F(f)$, випливає декілька її властивостей.

Основні властивості діаграми $P(f)$:

C1) існує $\mathcal{C}r$-підграф $q(f) \in P(f)$;

C2) $\overline{P(f) \setminus q(f)} = \bigcup\limits_i \Psi_i$, $\Psi_j \bigcap \Psi_i = \varnothing$, де $i \neq j$, Ψ_i – дерева такі, що для кожного індексу i довільні дві вершини $v', v'' \in \Psi_i$ є непорівнянними;

C3) підмножина $q' \subset q(f)$ така, що $q' = \bigcup\limits_i (P(f) \setminus \overline{\Psi}_i)$ містить лише вершини степеня 2;

C4) існує вкладення $\psi : P(f) \to D^2$ таке, що

$$\psi(P(f)) \subset D^2, \quad \psi(q(f)) = \partial D^2, \quad \psi(P(f) \setminus q(f)) \subset IntD^2;$$

C5) множина $D^2 \setminus \psi(P(f))$ складається з незв'язного об'єднання множин θ_i таких, що $\partial\overline{\theta}_i$ містить одну або дві граничні дуги ∂D^2;

C6) для $\forall v \in P(f) \setminus q(f)$ справедливо $deg(v) = 2s \geq 4$.

Справедливість $C1$ та $C2$ випливає з наведених вище міркувань. Причому, з умов $C1$ та $C2$ слідує єдиність $\mathcal{C}r$-підграфу $q(f)$.

Для доведення $C3$ необхідно розглянути множину

$$\bigcup_i (P(f) \setminus \overline{\Psi}_i)$$

і скористатись тим, що діаграма

$$P(f) = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \bigcup_i \Psi_i,$$

де через Ψ_i позначено компоненти зв'язності множин $\widehat{f}^{-1}(a_i)$ ($\widehat{f}^{-1}(c_j)$) ліній рівня, які містять критичні та граничні критичні точки. А граф $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ містить згідно побудови лише вершини валентності 2.

Зауважимо, що $C4$ випливає з того, що $P(f)$ діаграма функції f, яка задана на D^2. Слід також відмітити, що $C5$ є наслідком $C2$ і $C4$. Причому, $\partial\overline{\theta}_i$ містить одну дугу ∂D^2, якщо існує єдиний індекс k такий, що $\psi(\Psi_k)\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing$, і $\partial\overline{\theta}_i$ містить дві дуги ∂D^2 у випадку, коли існують індекси k_1 та k_2 такі, що

$$\psi(\Psi_{k_1})\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing \text{ і } \psi(\Psi_{k_2})\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing\ .$$

Тоді, як існування трьох і більше індексів виключено, оскільки у $IntD^2$ з'являться критичні точки, що не є сідлами, а це не можливо.

Лема 2.1. *Якщо $P(f) \subset \mathbb{R}^3$ діаграма деякої функції $f \in F(D^2)$, то вкладення ψ таке, що $\psi(P(f)) \subset D^2, \psi(q(f)) = \partial D^2$ і $\psi(P(f) \setminus q(f)) \subset IntD^2$ єдине з точністю до гомеоморфізму диску D^2 на себе.*

Доведення. Доведемо єдність такого вкладення ψ методом від супротивного.

Припустимо, що існує два вкладення ψ_1, ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f))$, $\psi_2(P(f)) \subset D^2$ і $\psi_1 \neq \psi_2$. Позначимо через Θ (Θ') множину $D^2 \setminus \psi_1(P(f))$ ($D^2 \setminus \psi_2(P(f))$). Згідно $C5$ множина Θ (Θ') є незв'язним об'єднанням скінченої кількості підмножин θ_i (θ'_j). Не обмежуючи загальності, розглянемо цикл вершин $\{v_i\}$ діаграми $P(f)$ разом з ребрами, що їм інцидентні, образи яких при вкладенні ψ_1 обмежують деяку однозв'язну область θ_i, а при вкладенні ψ_2 — область θ'_j, яка не є однозв'язною. Припустимо, що $\theta'_j = \widetilde{\theta}'_1 \bigcup \widetilde{\theta}'_2$, $\widetilde{\theta}'_1 \bigcap \widetilde{\theta}'_2 = \varnothing$. Це означає, що серед вершин $\{v_i\}$ існує деяка вершина V така, що циклічний порядок вершин $\psi_1(V_i)$ не дорівнює циклічному порядку $\psi_2(V_i)$, де V_i суміжні з V. Нехай вершини V_k та V_j, які є суміжними з V та належать циклу $\{v_i\}$, і такі, що $\psi_1(V_k)$ та $\psi_1(V_j)$ є сусідніми в циклічному порядку $\psi_1(V_i)$, а пару вершини $\psi_2(V_k)$ та $\psi_2(V_j)$ розбиває деяка вершина $\psi_2(V_r) \in \psi_2(P(f))$. Оскільки справедливе $C5$, то цикл $\{\psi_2(v_i)\}$ містить вершини підграфу $\psi_2(q(f))$. Вершина $\psi_2(V_r)$ не може належати множині $\{\psi_2(v_i)\} \setminus \psi_2(q(f))$, оскільки з'явиться цикл. Розглянемо випадок, коли $\psi_2(V_r)$ співпадає з однією з вершин множини

$$\psi_2(\{v_i\} \setminus \overline{(\{v_i\} \setminus q(f))}) \supset q'.$$

Проте, це суперечить $C3$ (дана множина містить лише вершини степеня 2). Отже, $\psi_2^{-1}(V_r) \notin \{v_i\}$, що не можливо. □

Теорема 2.1. *Дві функції f і g з класу $F(D^2)$ є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм комбінаторних діаграм $\varphi : P(f) \to P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок, що заданий на них.*

Доведення. Необхідність. Нехай дві функції $f : D^2 \to \mathbb{R}$ і $g : D^2 \to \mathbb{R}$ з класу $F(D^2)$ топологічно еквівалентні. Тоді існують гомеоморфізми $h_1 : D^2 \to D^2$ і $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$. Для даних функцій існують комбінаторні діаграми $P(f)$ та $P(g)$, на яких виникає строгий частковий порядок, який відповідає функціям f та g. Згідно Леми 2.1 для $P(f)$ та $P(g)$ існують єдині вкладення ψ_1 та ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f)) \subset D^2$ і $\psi_2(P(g)) \subset D^2$. Тоді, покладемо $\varphi =$

$\psi_2^{-1} \circ h_1 \circ \psi_1$. Зрозуміло, що $\varphi : P(f) \to P(g)$ є шуканий ізоморфізм діаграм.

Достатність. Нехай задано дві неперервні функції $f : D^2 \to \mathbb{R}$ і $g : D^2 \to \mathbb{R}$, з класу $F(D^2)$ і $P(f)$, $P(g)$ відповідні їм діаграми такі, що існує ізоморфізм $\varphi : P(f) \to P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок (якщо $v \to v'$, $v \in P(f)$, $v' \in P(g)$, то $deg(v) = deg(v')$). Зрозуміло, що ізоморфізм φ переводить локальні максимуми (мінімуми) функції $f|_{S^1}$ в локальні максимуми (мінімуми) функції $g|_{S^1}$ і зберігає значення функцій в них. Згідно $C1$ для кожної з діаграм існують підграфи $q(f)$ та $q(g)$ і $\varphi : q(f) \to q(g)$. Використаємо ізоморфізм φ для побудови гомеоморфізму h_1 границі диску ∂D^2 в себе так, щоб для функцій $f|_{\partial D^2}$ і $g|_{\partial D^2}$ було справедливо $f|_{\partial D^2} = g|_{\partial D^2} \circ h_1$.

Розглянемо діаграми $P(f) \in \mathbb{R}^3$ та $P(g) \in \mathbb{R}^3$, згідно Леми 2.1 для $P(f)$ та $P(g)$ існують єдині вкладення ψ_1 та ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f)) \subset D^2$, $\psi_2(P(g)) \subset D^2$. Згідно $C5$, множина $\Theta = D^2 \setminus \psi_1(P(f))$ $(\Theta' = D^2 \setminus \psi_2(P(g)))$ є незв'язним об'єднанням скінченої кількості підмножин θ_i (θ'_j), замикання кожної з них гомеоморфне замкненому диску. За побудовою гомеоморфізм $h_1 = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1}$ задано на границях цих підмножин θ_i (θ'_j), тому для гомеоморфізму h_1 існує продовження з границь множин θ_i (θ'_j) в їх внутрішність, щоб мала місце рівність $f = g \circ h_1$. $\square$

На рисунку 3 зображені діаграми двох функцій з класу $F(D^2)$, які мають два локальних мінімуми та два локальних максимуми на ∂D^2 і одну граничну критичну точку. Проте, ці дві функції не є топологічно еквівалентними.

Я щиро вдячна В. В. Шарку за постановку задачі, а також І. Власенку, С. Максименку, Є. Полуляху за корисні обговорення та інтерес до роботи.

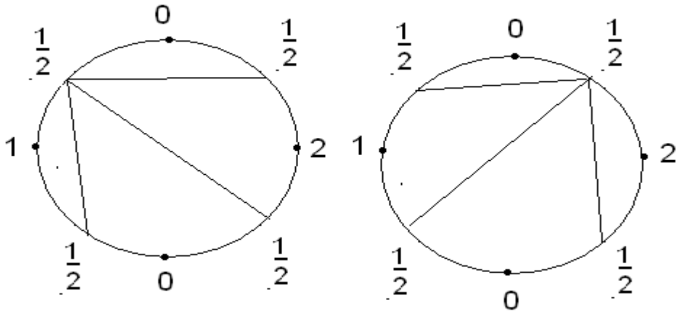


Рис. 2. Діаграми двох топологічно не еквівалентних функцій з класу $F(D^2)$.

Література

[1] *Арнольд В.И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера: УМН., 1992. – Vol. 47, №1(283). – С. 3-45.

[2] *Максименко С.И.* Класификация m – функций на поверхностях//УМЖ– Т.51,№8(1999)–С.1129-1135.

[3] *Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А.* Общая алгебра. Т.1/ под. ред. Скорнякова Л.А.– М.:Наука, 1990 – 592с.

[4] *Морс М.* Топологические методы теории фукций комплексного переменного/ под. ред. Маркушевич А.И.– М:1951. – 247с.

[5] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особеностей.// Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем.- М.:Наука, 1994, труды МИРАН, т.205 – С.131-140

[6] *Пришляк А.О.* Классификация трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Тр. Инст. Мат. АНУ, Киев, 1998,- С.35-39.

[7] *Стоилов С.* Лекции о топологических прнципах теории аналитических функций.– М.: Наука, 1964. – 228 с.

[8] *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы:Пер. с англ. /Под ред. О.Я.Виро. – М.:Наука,1988. – 688с.

[9] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях// Укр.мат.жур – 2003. –Т.55,№5 – С.687-700.
[10] *Шарко В.В.* Функции Морса на некомпактных поверхностях. – Український математичний конгресс. – 2000. – С.56-64.
[11] *Arnold V.I.* Bernoulli – Euler updown numbers, associated with function singularities, their combinatorics and a mathematics //Duke Math.Journ. – 1991.– **63**. №2. – Pp.537–555.
[12] *Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Sharko V.V.* On classification of flows on manifolds.I // Methods of Functional Analysis and Topology, 1996.– Vol.2,no.2 – Pp.51-60
[13] *Bolsinov A. V., Fomenko A. T.* Exact topological classification of Hamiltonian flows on smooth two-dimensional surfaces //(Russian summary) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 235 (1996)
[14] *Boothby W.M.* The topology of regular curve families with multiple saddle points.//Amer.J.Math. – 1951.– **73**. – Pp.405–438.
[15] *Jenkins J.A, Morse M.* Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates//Amer.J.Math. – 1952.– **74**. – Pp.23-51.
[16] *Kaplan. W.* Topology of level curves of harmonic functions//Transactions of Amer.Math.Society– vol.63 №3(1948)– Pp.514-522.
[17] *Morse M.* The topology of pseudo-harmonic functions//Duke Math.J.– 1946.–**13**.– Pp.21-42.
[18] *Morse.M., Jenkins.J.* The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces //Fund.Math. – 1952.– **39**. – Pp.269–287.
[19] *Prishlyak A. O.* Regular functions on closed three-dimensional manifolds.//Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki – 2003, no. 8 – Pp.21–24

Наукове видання

Збірник праць

Інституту математики НАН України

Т. 3 № 3

Проблеми топології та суміжні питання

Компьютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко, Є. О. Полулях, І. А. Юрчук

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 29.12.2006. Формат 60 x 84/16 Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 31,0. Ум. друк. арк. 29,0. Зам. 240. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3