Національна академія наук України
Інститут математики

Препринт 2005.7

И. Ю. Власенко, Е. А. Полулях

Об итерационной устойчивости центра Биркгофа

Киев – 2005

УДК 517.938.5, 517.91
ОБ ИТЕРАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРА БИРКГОФА / **И. Ю. Власенко, Е. А. Полулях** — Киев, 2005. — 64 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2005.7)

Работа посвящена изучению итерационной устойчивости неблуждающих множеств, совпадающих со всем топологическим пространством, а также центров динамических систем, таких, что они не совпадают с замыканием множества рекуррентных точек.

В работе доказано, что несмотря на итерационную неустойчивость неблуждающего множества, центр Биркгофа динамической системы на произвольном метрическом пространстве сохраняется при возведении в степень.

Работа присвячена вивченню ітераційної стійкості неблукаючих множин, що співпадають з усім топологічним простором, а також центрів динамічних систем, таких, що вони не співпадають з замиканням множини рекурентних точок.

В роботі доведено, що незважаючи на ітераційну нестійкість неблукаючої множини, центр Біркгофа динамічної системи на довільному метричному просторі зберігається при піднесенні до степеня.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Пришляк А. О.

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

1. Вступление

Известно, что неблуждающее множество гомеоморфизма может изменяться при возведении в степень. Примеры таких отображений можно посмотреть в [**5, 12**]. В то же время такие инвариантные множества гомеоморфизмов, как множества рекуррентных точек [**6**], цепно-рекуррентных точек, граничное множество, сохраняются при возведении в степень [**13**]. Известно, что для полных метрических пространств центр Биркгофа совпадает с замыканием множества рекуррентных точек, следовательно, сохраняется при возведении в степень. В общем же случае, для неполных метрических пространств, естественно возникающих в связи с бесконечномерными динамическими системами, являющихся предельными для последовательности конечномерных систем, центр Биркгофа может и не совпадать с замыканием множества рекуррентных точек. Возникает вопрос, как ведет себя при возведении в степень центр Биркгофа в общем случае. В работе доказано, что несмотря на итерационную неустойчивость неблуждающего множества, центр Биркгофа динамической системы на метрическом топологическом пространстве сохраняется при возведении в степень.

Поскольку множество граничных точек итерационно устойчиво, основное внимание уделялось множеству неблуждающих точек, не являющихся граничными. Изучение таких множеств представляет и самостоятельный интерес. В частности, построенные в работе примеры позволяют положительно ответить на поставленный в книге [**14**] вопрос о существовании потоков без блуждающих и устойчивых по Пуассону траекторий.

В доказательствах мы ограничиваемся случаем метризуемых топологических пространств. Можно было бы распространить доказательства и на более широкий класс топологических пространств, однако это, по-видимому, лишено особого смысла с точки зрения динамических систем.

ГЛАВА 1

Предварительные сведения

1. Множества траекторий

Пусть M — топологическое пространство и $f : M \to M$ — гомеоморфизм.

Обозначим через $O_f(x)$ траекторию точки x, т.е. множество $\{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 1.1. *Точка x называется* фиксированной *точкой гомеоморфизма f, если $f(x) = x$. Множество всех фиксированных точек f обозначаем* $\mathrm{Fix}(f)$.

Определение 1.2. *Точка x называется* периодической *периода n для гомеоморфизма f, если $f^n(x) = x$ и $f^k(x) \neq x$ для $k = 1, \ldots, n-1$. Множество всех периодических точек отображения f обозначается* $\mathrm{Per}(f)$.

Определим для каждой точки x ω-предельное множество $\omega(x)$ и α-предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \alpha(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n}(x)}$$

Определение 1.3. *Назовем точку x* ***ω-(α-) рекуррентной****, если $x \in \omega(x)$ (соответственно, $x \in \alpha(x)$).*

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ множество ω-рекуррентных точек, через $\mathrm{Rec}_-(f)$ множество α-рекуррентных точек, и через $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cap \mathrm{Rec}_-(f)$ множество всех рекуррентных точек.

Обозначим через $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f) \cup \mathrm{Lim}_-(f)$ *предельное множество* f, объединение ω-предельных множеств и α-предельных множеств всех точек. Легко видеть, что $\mathrm{Rec}(f) \subset \subset \mathrm{Lim}(f)$.

Следующее определение было дано Биркгофом в [**3**].

Определение 1.4. *Точка $x \in M$ называется **блуждающей** точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m > 0$.*

Определение 1.5. *Точка $x \in M$ называется **неблуждающей** точкой f, если для любой ее окрестности V найдется такое $m \in \mathbb{Z}$, что $f^m(V) \cap V \neq \varnothing$.*

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. Поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью, то $W(f)$ открыто в M. Точки, не являющиеся блуждающими в смысле определения 1.4, являются неблуждающими. Множество неблуждающих точек f обозначим $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

1.1. Центр Биркгофа динамической системы. Приведем еще одно определение Биркгофа из [**3**].

Проитерируем конструкцию неблуждающего множества при помощи трансфинитной индукции.

Пусть (X, f) — динамическая система.

База индукции. Пусть $\Omega_1(f) = \Omega(f)$.

Шаг индукции. Пусть λ — некоторое порядковое число и множества $\Omega_\alpha(f)$ уже определены для всех ординалов $\alpha < \lambda$.

Для того, чтобы определить множество $\Omega_\lambda(f)$, рассмотрим два случая:

(i) λ имеет предшествующий элемент $(\lambda - 1) < \lambda$ в классе Λ всех ординалов, то есть для любого $\beta \in \Lambda$ либо $\beta \leq (\lambda - 1)$, либо $\beta \geq \lambda$.

Тогда пусть

$$\Omega_\lambda(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_{\lambda-1}(f)}\right)\ ,$$

в частности, $\Omega_{n+1}(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_n(f)}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(ii) λ не имеет непосредственно предшествующего ему порядкового числа. Тогда положим

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \Omega_\alpha(f)\ ,$$

в частности, $\Omega_\omega(f) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n(f)$.

Итак, мы получили набор замкнутых инвариантных подмножеств $\{\Omega_\lambda(f)\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства X. При этом по построению соотношения

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{и} \quad \alpha \le \beta$$

равносильны. Таким образом, порядок, индуцированный отношением включения на семействе множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$, является полным порядком.

Лемма 1.6. *Существует порядковое число γ такое, что*

$$\Omega_{\gamma+1}(f) = \Omega_\gamma(f)$$

(следовательно, и $\Omega_\alpha(f) = \Omega_\gamma(f)$ для всех $\alpha > \gamma$).

Доказательство. Заметим, что для каждого ординала λ существует порядковое число $(\lambda{+}1)$, следующее непосредственно за λ. Действительно, пусть $A_\lambda = \{\alpha \in \Lambda \mid \alpha > \lambda\}$. Тогда A_λ вполне упорядочено и содержит наименьший элемент $\lambda + 1$. Поэтому, для каждого ординала α либо $\alpha \le \lambda$, либо $\alpha \ge \lambda + 1$.

Предположим, что $\Omega_{\lambda+1}(f) \subsetneqq \Omega_\lambda(f)$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Обозначим $B_\lambda = \Omega_\lambda(f) \setminus \Omega_{\lambda+1}(f)$. Получим семейство непустых непересекающихся подмножеств $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства X. Воспользуемся теоремой Цермело (см. [**8, 9**]) и выберем из каждого B_λ по точке $x_\lambda \in B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (напомним, что $B_\lambda \in 2^X$ для всех $\lambda \in \Lambda$). Множество всех $\xi < \alpha$, $\xi \in \Lambda$, обозначим через $\Gamma(\alpha)$.

Имеем для каждого $\alpha \in \Lambda$ инъективное отображение

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \ &: \ \Gamma(\alpha) \to X\ ; \\ \Phi_\alpha \ &: \ \beta \mapsto x_\beta\ , \quad \beta < \alpha\ . \end{aligned}$$

Пусть $\aleph_\mu$ — кардинальное число, соответствующее мощности множества X. По определению

$$\aleph_\alpha = \mathrm{card}(\Gamma(\omega_\alpha)) ,$$

где ω_α — порядковое число, соответствующее предельному порядковому типу.

Напомним (см. [**9**]), что порядковый тип ξ вполне упорядоченного множества Z называется *предельным*, если он является наименьшим порядковым числом среди всех порядковых чисел, соответствующих всем возможным упорядочениям множества Z, превращающим его во вполне упорядоченное множество. (Предельные порядковые типы принято индексировать по возрастанию элементами Λ.)

Имеем неравенство

$$\mathrm{card}\, X = \aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} = \mathrm{card}(\Gamma(\omega_{\mu+1})) ,$$

а это противоречит существованию инъективного отображения

$$\Phi_{\omega_{\mu+1}} : \Gamma(\omega_{\mu+1}) \to X .$$

Следовательно, существует $\gamma \in \Lambda$, такое что $B_\gamma = \Omega_\gamma(f) \setminus \Omega_{\gamma+1}(f) = \varnothing$ и $\Omega_\gamma(f) = \Omega_{\gamma+1}(f)$. $\square$

Пользуясь леммой дадим следующее определение.

Определение 1.7. *Пусть $\gamma \in \Lambda$ — наименьший ординал, удовлетворяющий лемме 1.6 (он существует, так как Λ вполне упорядочено).*

Замкнутое инвариантное подмножество

$$BC(f) = \Omega_\gamma(f)$$

динамической системы (X, f) называется ее центром*, порядковое число γ называется* ***глубиной центра*** *динамической системы (X, f).*

Замечание 1.8. *Пользуясь теоремой Бэра - Хаусдорфа (см. [**2**]) для топологических пространств со счетной базой (в частности, для сепарабельных метрических пространств) легко показать, что глубина центра любой д. с. с таким фазовым пространством является счетным трансфинитом.*

Заметим, что множество рекуррентных точек всегда принадлежит центру Биркгофа. Поэтому, если множество рекуррентных точек всюду плотно в неблуждающем множестве, то стабилизация наступает уже на первом шаге.

1.2. Цепно-рекуррентные множества. Цепно-рекуррентные множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Сравнительно недавно они были введены Конли в работе [**4**] и были с успехом использованы для описания динамики типичных гомеоморфизмов.

Определение 1.9. *Пусть $\varepsilon > 0$. ε-Цепью называется конечная последовательность точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, где $n > 0$, $d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$ (d — метрика на M).*

Будем говорить, что ε-цепь начинается в x_0, заканчивается в x_n и имеет длину n. Обозначим через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ множество точек, являющихся концами начинающихся в x ε-цепей.

Определение 1.10. $\mathcal{C}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$.

Определение 1.11. *Точка $x \in M$ называется цепно-рекуррентной, если $x \in \mathcal{C}(x, f)$.*

Множество цепно-рекуррентных точек обозначается через $\mathcal{C}(f)$. Это компактное непустое множество, причем $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$, поскольку f — гомеоморфизм. Имеет место следующее включение:

$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f)$.

Лемма 1.12. *Пусть (X, ρ) – метризуемое топологическое пространство, $g : X \to X$ – равномерно непрерывное отображение, $n \in \mathbb{N}$ и $f = g^n$. Тогда $\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Очевидно, что любая ε-цепь для f является ε-цепью для g.

Рассмотрим ε-цепь для g. По определению равномерной непрерывности $\exists C$: $\forall x, y \in X$ $\rho(g(x), g(y)) < C\rho(x, y)$. Используя это неравенство, каждую ε-цепь для g можно заменить на $nC\varepsilon$-цепь для f. □

Поскольку M — компакт, то его непрерывные отображения равномерно непрерывны, и значит, имеем следствие:

Следствие 1.13. *Пусть* $g : M \to M$ *— гомеоморфизм,* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f = g^n$. *Тогда* $\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.

2. Корни из неблуждающего множества

Покажем, что неблуждающее множество гомеоморфизма не уменьшается при извлечении корня.

Лемма 2.1. *Пусть* $g : M \to M$ *— гомеоморфизм,* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f = g^n$. *Тогда* $\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g)$.

Доказательство. Пусть $x \in M \setminus \Omega(g)$ — блуждающая точка гомеоморфизма g. Тогда найдется такая ее окрестность U, что $g^k(U) \cap U = \varnothing$. Тогда тем более $g^{nk}(U) \cap U = f^k(U) \cap U = \varnothing$ для $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, точка x является блуждающей и для f. Таким образом, $M \setminus \Omega(g) \subseteq M \setminus \Omega(g^n)$ и $\Omega(g) \supseteq \Omega(g^n)$. □

Исследуем тот случай, когда при извлечении корня неблуждающее множество увеличивается.

Определение 2.2. *Точка* ξ *называется* ***зацепленной*** *с точкой* μ *под действием гомеоморфизма* g*, если для любых окрестностей* $U(\mu)$ *и* $V(\xi)$ *точек* μ *и* ξ *соответственно найдется такое* $N \in \mathbb{Z}$*, что* $g^N(V(\xi)) \cap U(\mu) \neq \varnothing$.

Определение 2.3. *Если в предыдущем определении всегда можно выбрать* $N \in \mathbb{Z}^-$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$*, то точка* ξ *называется* ***α-зацепленной (ω-зацепленной)*** *с точкой* μ*. Точку, являющуюся одновременно* α*- и* ω*-зацепленной с точкой* μ*, назовем* двоякозацепленной *с точкой* μ.

Пример 2.4. *Неблуждающая точка зацеплена сама с собой.*

Пример 2.5. *Блуждающая гетероклиническая точка на устойчивом многообразии седла зацеплена со всеми точками неустойчивого многообразия седла.*

Следующее замечание прямо следует из определения.

Замечание 2.6. *Если точка* ξ α*-зацеплена с* μ*, то точка* μ ω*-зацеплена с* ξ *и наоборот.*

Определение 2.2 можно переписать в следующей эквивалентной форме.

Определение 2.7. *Точка ξ называется* ***зацепленной*** *с точкой μ под действием гомеоморфизма g, если найдется множество индексов I и последовательности точек (ν_i) и целых чисел (N_i), $i \in I$, такие, что ξ входит в границу (ν_i), а μ входит в границу $g^{N_i}(\nu_i)$.*

Последовательность точек $(\nu_i)_{i\in I}$ будем называть *зацепляющей последовательностью*, а последовательность $\bigl(g^{N_i}(\nu_i)\bigr)_{i\in I}$ — обратной к $(\nu_i)_{i\in I}$ зацепляющей последовательностью.

Определение 2.8. *Траекторию Γ_1 назовем зацепленной с траекторией Γ_2, если найдется точка на Γ_1, зацепленная с некоторой точкой на Γ_2.*

Аналогично можно определить ω- и α-зацепленные траектории. Следующая лемма показывает, что зацепленность траекторий не зависит от выбора их зацепленных точек.

Лемма 2.9. *Если точка одной траектории ω-(α-)зацеплена с точкой другой траектории, то и все точки первой траектории ω-(α-)зацеплены с любой точкой второй траектории.*

Доказательство. Воспользуемся определением 2.7. Пусть точка ξ зацеплена с точкой μ под действием g. Тогда найдется множество индексов I и последовательности точек (ν_i) и целых чисел (N_i), $i \in I$, такие, что ξ входит в границу (ν_i), а μ входит в границу $g^{N_i}(\nu_i)$.

Поскольку для последовательности $g^k(\nu_i)$ точка μ входит в границу $g^{N_i-k}(\nu_i)$, то $g^k(\xi)$, $k \in \mathbb{Z}$, зацеплена с μ. И поскольку $g^l(\mu)$ входит в границу последовательности $g^{N_i+l}(\nu_i)$, то ξ зацеплена с $g^l(\mu)$, $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

Определение 2.10. *Точки $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ называются циклически зацепленными, если найдется $k \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что для всех $i = 1, \dots, n-1$ точка ξ_i ω-(α-)зацеплена с точкой $\xi_{(k+i) \pmod n}$.*

Пример 2.11. *Пусть* $X_1 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = \pm 1\}$. *Пусть* X *— фактор-пространство пространства* X_1 *по отношению* $(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, x_1 \notin \mathbb{Z}, x_1 = x_2, y_1 = y_2, x_1 \in \mathbb{Z}$, *и* $g \to (x, y) \to (x+1, y)$ *— отображение на* X. *Тогда точки* $(0, 1)$ *и* $(0, -1)$ *являются блуждающими циклически зацепленными точками* g.

Лемма 2.12. *Пусть* $\xi \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. *Тогда все траектории* $O_{g^n}(g^i(\xi))$, $i = 1 \dots n-1$, *на которые распадается траектория* $O_g(\xi)$, *являются блуждающими циклически зацепленными относительно* g^n.

Доказательство. Пусть $\xi \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Поскольку $\xi \in \Omega(g)$, то $\forall U(\xi)\ \exists m\ g^m(U(\xi)) \cap U(\xi) \neq \varnothing$. Далее, поскольку $\xi \notin \Omega(g^n)$, то $g^{ln}(U(\xi)) \cap U(\xi) = \varnothing$ для каждого $l \in \mathbb{Z}$. Получаем, что $m \neq 0 \pmod n$, и следовательно, ξ и $g^m(\xi)$ принадлежат к разным траекториям g^n. Возьмем в качестве $U(\xi)$ набор $B_{\frac{1}{p}}(\xi)$, $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p}$-окрестностей точки ξ. Поскольку n — конечно, а множество значений p — бесконечно, то найдется $k \neq 0 \pmod n$ такое, что в записанной выше формуле $m(p) = k \pmod n$ для бесконечного числа значений p. Покажем, что ξ зацеплена с $g^k(\xi)$. Пусть $V_1(\xi)$ и $V_2(g^k(\xi))$ — произвольные окрестности точек ξ и $g^k(\xi)$. Возьмем достаточно большое p, такое что $m(p) = tn+$ $+k$, и выполняются соотношения $B_{\frac{1}{p}}(\xi) \subset V_1(\xi)$ и $g^k(B_{\frac{1}{p}}(\xi)) \subset$ $\subset V_2(g^k(\xi))$. Тогда $g^{tn+k}(B_{\frac{1}{p}}(\xi)) \cap B_{\frac{1}{p}}(\xi) \neq \varnothing$, и следовательно, $V_1(\xi) \cap g^{tn}\left(V_2(g^k(\xi))\right) \neq \varnothing$.

Цикличность зацепления следует из того, что g переводит зацепленные точки в зацепленные. □

ГЛАВА 2

Итерационная устойчивость центра Биркгофа

1. Корни из центра Биркгофа динамической системы

Поскольку неблуждающее множество не сохраняется при извлечении корня, естественно было бы ожидать, что и центр Биркгофа (см. определение 1.7) ведет себя аналогичным образом.

Лемма 1.1. *Пусть X – топологическое пространство и $f : X \to X$ – гомеоморфизм.*
Тогда $BC(f^n) \subseteq BC(f)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Перед тем, как доказывать лемму, установим одно утверждение.

Утверждение 1.2. *Пусть задана динамическая система (Y, g), ее инвариантное подпространство Y_1, и пусть $g_1 = g|_{Y_1}$. Тогда $\Omega(g_1) \subseteq \Omega(g)$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что для каждого $y \in Y_1$ все открытые окрестности точки y в пространстве Y_1 — это в точности пересечения открытых окрестностей точки y в пространстве Y с подпространством Y_1. □

Доказательство леммы 1.1. Пусть пространство X и отображение f удовлетворяют условиям леммы. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.

При построении центра Биркгофа динамической системы (X, f) мы получаем семейство ее замкнутых инвариантных подмножеств, занумерованных при помощи ординалов:

$$\Omega(f) = \Omega_1(f) \supseteq \Omega_2(f) \supseteq \cdots \supseteq \supseteq \Omega_\omega(f) \supseteq \Omega_{\omega+1}(f) \supseteq \cdots . \tag{1.1}$$

Это семейство упорядочено по включению. При этом по построению соотношения

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{и} \quad \alpha \leq \beta$$

равносильны, а множество индексов семейства (1.1) принимает значения в классе ординалов Λ.

Аналогично, для динамической системы (X, f^n) рассмотрим семейство

$$\begin{aligned} \Omega(f^n) = \Omega_1(f^n) \supseteq \Omega_2(f^n) \supseteq \cdots \supseteq \\ \supseteq \Omega_\omega(f^n) \supseteq \Omega_{\omega+1}(f^n) \supseteq \cdots \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Это семейство имеет по построению те же свойства, что и семейство (1.1).

Воспользуемся трансфинитной индукцией для того, чтобы доказать следующее неравенство:

$$\Omega_\lambda(f) \supseteq \Omega_\lambda(f^n) \quad \forall \lambda \in \Lambda \ . \tag{1.3}$$

База индукции. Пусть $\lambda = 1$. Соотношение

$$\Omega_1(f) = \Omega(f) \supseteq \Omega(f^n) = \Omega_1(f^n)$$

следует из леммы 2.1 главы 1.

Шаг индукции. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что для всех $\alpha < \lambda$ справедливо неравенство $\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\alpha(f^n)$.

Рассмотрим два случая.

(i) Для элемента λ существует предшествующий элемент $\hat\lambda < \lambda$, то есть для любого $\beta \in \Lambda$ либо $\beta \leq \hat\lambda$, либо $\beta \geq \lambda$.

Рассмотрим пространства $X_{\hat\lambda} = \Omega_{\hat\lambda}(f)$ и $X'_{\hat\lambda} = \Omega_{\hat\lambda}(f^n)$, а также отображения $f_{\hat\lambda} = f|_{X_{\hat\lambda}} : X_{\hat\lambda} \to X_{\hat\lambda}$ и $f'_{\hat\lambda} = f^n|_{X'_{\hat\lambda}} : X'_{\hat\lambda} \to$ $\to X'_{\hat\lambda}$. По предположению индукции имеем $X_{\hat\lambda} \supseteq X'_{\hat\lambda}$. Отметим также, что

$$f'_{\hat\lambda} = (f_{\hat\lambda})^n|_{X'_{\hat\lambda}} \ . \tag{1.4}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(f) = \Omega(f|_{X_{\hat\lambda}}) = \Omega(f_{\hat\lambda}) \supseteq \Omega((f_{\hat\lambda})^n) \supseteq \\ \supseteq \Omega(f'_{\hat\lambda}) = \Omega(f^n|_{X'_{\hat\lambda}}) = \Omega_\lambda(f^n) \ . \end{aligned}$$

Первое неравенство в этой цепочке следует из леммы 2.1 главы 1, второе следует из предложения 1.2 и соотношения (1.4).

(ii) Элемент λ не имеет предшествующего.

Тогда по построению

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\beta<\lambda} \Omega_\beta(f) \supseteq \bigcap_{\beta<\lambda} \Omega_\beta(f^n) = \Omega_\lambda(f^n) \ .$$

Это неравенство следует из включений $\Omega_\beta(f) \supseteq \Omega_\beta(f^n)$, $\beta < \lambda$.

Значит, соотношение (1.3) справедливо по индукции.

Пусть λ, $\lambda' \in \Lambda$ — глубина центров динамических систем (X, f) и (X, f^n) соответственно. Обозначим $\beta = \max(\lambda, \lambda')$. Тогда

$$BC(f) = \Omega_\beta(f) \supseteq \Omega_\beta(f^n) = BC(f^n) \ .$$

Для завершения доказательства леммы нам остается заметить, что число $n \in \mathbb{N}$ выбрано произвольно. $\Box$

Поскольку центр Биркгофа при возведении в степень может только уменьшится (лемма 1.1), то центр Биркгофа отображения F^n будет содержаться в центре Биркгофа отображения F. Поэтому достаточно рассматривать сужение F на свой центр Биркгофа. В этом случае неблуждающее множество сужения F совпадает со всем пространством, и итерационная устойчивость центра Биркгофа эквивалентна итерационной устойчивости такого неблуждающего множества.

Само существование итерационно неустойчивых неблуждающих множеств возможно только благодаря тому, что отношение зацепленности, вообще говоря, не транзитивно. Если бы оно было транзитивно, то циклически зацепленные траектории были бы неблуждающими. Однако, как мы далее покажем, когда в произвольно малых окрестностях циклически зацепленных точек снова возникает циклическая зацепленность, то отношение зацепленности локально транзитивизируется.

Для центра Биркгофа, по необходимости, такая последовательность циклических зацепленностей бесконечна, в то время как степень, для которой должно проявляться различие центров Биркгофа, конечна. Это приводит к транзитивизации циклических зацепленностей, что и стабилизирует центр Биркгофа. Этот эффект и положен в основу приведенных доказательств.

1.1. Устойчивость относительно степени 2.

Теорема 1.3. *Неблуждающее множество, совпадающее со всем пространством, итерационно устойчиво относительно степени 2.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного.

Пусть существуют метрическое топологическое пространство X и гомеоморфизм f на нем такой, что $X = \Omega(f) \neq \Omega(f^2)$.

Пусть $x \in \Omega(f) \setminus \Omega(f^2)$. Тогда, согласно лемме 2.12, x и $y = f(x)$ зацеплены: $\forall n \geq 1\ \exists a_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)\ \exists A_n$: $f^{A_n}(a_n) \in B_{\frac{1}{n}}(y)$.

Не ограничивая общности, можно полагать, что x и y ω-зацеплены (включая сюда и двоякозацепленность). Тогда $A_n > 0$. В противном случае x и y α-зацеплены, и такой случай сводится к предыдущему относительно f^{-1}, поскольку по определению неблуждающие множества f и f^{-1} совпадают. Заметим, что все a_n можно считать блуждающими точками f^2, так как множество блуждающих точек открыто.

Положим $b_n = f^{-1}(f^{A_n}(a_n))$. Последовательность $f^{A_n}(a_n)$ стремится к y. По непрерывности последовательность (b_n) стремится к x. Обозначим через $B_\varepsilon(x)$ открытый шар радиуса ε вокруг точки x. Согласно лемме 2.12 b_n и $f^{A_n}(a_n)$ зацеплены. Поэтому $\forall n \geq 1\ \forall m \geq 1\ \exists c_{mn} \in B_{\frac{1}{m}}(b_n)\ \exists K_{mn}$: $f^{K_{mn}}(c_{mn}) \in$ $\in B_{\frac{1}{m}}(f^{A_n}(a_n))$. Аналогично, c_{mn} можно считать блуждающими точками f^2. Здесь возможны два случая. Либо найдется подпоследовательность такая, что b_n и $f^{A_n}(a_n)$ ω-зацеплены, либо найдется подпоследовательность, такая, что b_n и $f^{A_n}(a_n)$ α-зацеплены. Переходя к такой подпоследовательности, будем считать, что все b_n и $f^{A_n}(a_n)$ ω-зацеплены (либо α-зацеплены).

Пусть они ω-зацеплены. Тогда $K_{mn} > 0$. Рассмотрим последовательность (c_{nn}). По построению, (c_{nn}) стремится к y, а $(f^{-A_n}(c_{nn}))$ стремится к x. Но и $(f^{K_{nn}}(c_{nn}))$ стремится к x. Поскольку $A_n > 0$ и $K_{mn} > 0$, то $K_{nn} \neq -A_n$. Получим, что точка x зацеплена сама с собой, следовательно, — неблуждающая.

Пусть они α-зацеплены. Рассмотрим последовательность $f^{-1}(c_{nn})$. По непрерывности она стремится к x. Согласно лемме 2.12 $f^{-1}(c_{mn})$ и (c_{mn}) зацеплены. Далее все сводится к уже рассмотренным случаям. Если из последовательности $f^{-1}(c_{nn})$ можно выбрать подпоследовательность, состоящую из ω-зацепленных со своими образами точек, то, повторяя рассуждения для ω-зацепленных b_n и $f^{A_n}(a_n)$, получим, что x — неблуждающая точка. В противном случае имеем, что b_n и $f^{A_n}(a_n)$ α-зацеплены, и зацепляющие их последовательности $f^{-1}(c_{mn})$ и (c_{mn}) тоже α-зацеплены. Этот случай сводится путем рассмотрения f^{-1} вместо f к уже рассмотренному случаю, когда точки ω-зацеплены и зацепляющие их последовательности точек тоже ω-зацеплены. $\square$

1.2. Совершенные зацепляющие последовательности. Пусть существуют метрическое топологическое пространство X и гомеоморфизм f на нем такой, что $X = \Omega(f) \neq \Omega(f^n)$. Пусть $x \in \Omega(f) \setminus \Omega(f^n)$. Траектория точки x относительно f распадается относительно f^n на траектории $f^l(x)$, $0 \leq l < n$, которые циклически зацеплены согласно лемме 2.12. Далее, все траектории будем предполагать траекториями относительно f^n.

Определение 1.4. *Назовем зацепляющую последовательность, которая зацепляет траекторию ξ с ζ, **совершенной**, если она инвариантна относительно f^n, для каждой точки из траекторий ξ и ζ содержит сходящуюся к ней последовательность и в случае, если зацепляемые ею траектории ξ и ζ блуждающие, сама состоит из блуждающих точек.*

Лемма 1.5. *По произвольной зацепляющей последовательности, зацепляющей относительно f^n две траектории ξ и ζ, всегда можно построить зацепляющую ξ и ζ совершенную последовательность.*

Доказательство. Произвольную зацепляющую последовательность всегда можно преобразовать в инвариантную, включив в нее все образы точек этой последовательности, полученные путем действия на них f^n.

Далее, поскольку последовательность зацепляющая, она по определению содержит подпоследовательность, сходящуюся хотя бы к одной из точек ξ. При этом последовательность, обратная этой подпоследовательности, будет сходиться хотя бы к одной из точек ζ. В силу инвариантности совершенной последовательности относительно f^n, она будет содержать и эту обратную последовательность, а образы этих последовательностей по непрерывности будут сходиться к любой из точек последовательностей ξ и ζ, соответственно.

Поскольку множество блуждающих точек $W(f^n)$ открыто, то пересечение $W(f^n)$ и зацепляющей последовательности не пусто. Если ξ и ζ лежат в $W(f^n)$, то те их точки, которые входили в границу зацепляющей последовательности, входят и в границу пересечения. Следовательно, полученная в пересечении подпоследовательность также будет зацепляющей последовательностью от ξ к ζ. $\square$

Понятие зацепленности траекторий можно естественно обобщить на инвариантные множества точек. Пусть Λ_1 и Λ_2 — два непересекающихся инвариантных относительно f^n множества такие, что $f^m(\Lambda_1) = \Lambda_2$ для некоторого $m < n$.

Определение 1.6. *Λ_1 и Λ_2 ω-зацеплены, если любая точка $x \in \Lambda_1$ ω-зацеплена с $f^m(x) \in \Lambda_2$.*

Аналогично можно ввести α-зацепленность и циклическую зацепленность множеств.

Определение 1.7. *Объединение зацепляющих последовательностей от точек множества Λ_1 к соответствующим точкам Λ_2 назовем зацепляющей последовательностью от Λ_1 к Λ_2.*

Определение 1.8. *Совершенную зацепляющую последовательность, зацепляющую две траектории ξ и ζ, назовем* ***зацепляющей последовательностью рода 1****.*

Определение 1.9. *Совершенную зацепляющую последовательность, зацепляющую 2 зацепляющие последовательности рода $k-1$, назовем* ***зацепляющей последовательностью рода*** k, *если топологическая граница этой последовательности содержит объединение этих зацепляющих последовательностей рода $k-1$ и их топологических границ.*

Из определения следует, что структуру зацеплений зацепляющей последовательности Θ^k рода k можно представить в виде двоичного дерева. Листья этого дерева образуют 2^k траекторий ξ_i, их зацепляют 2^{k-1} последовательностей Θ_i^1 рода 1 и так далее до единственной последовательности Θ^k:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi_1 \underset{\Theta_1^1}{\hookrightarrow} \xi_2 & \xi_3 \underset{\Theta_2^1}{\hookrightarrow} \xi_4 & \ldots & \xi_{2^k-3} \underset{\Theta^1_{2^{k-1}-1}}{\hookrightarrow} \xi_{2^k-2} & \xi_{2^k-1} \underset{\Theta^1_{2^{k-1}}}{\hookrightarrow} \xi_{2^k} \\
\xi_1^2 & \underset{\Theta_1^2}{\hookrightarrow} \xi_2^2 & \ldots & \xi^2_{2^k-3} & \underset{\Theta^2_{2^k-2}}{\hookrightarrow} \xi^2_{2^k-3} \\
 & & \ldots & & \\
 & & \xi_1^k \underset{\Theta^k}{\hookrightarrow} \xi_2^k & &
\end{array}$$

О траекториях и последовательностях меньшего рода, входящих в это дерево, будем говорить, что они опосредствованно зацепляются последовательностью Θ^k. Последовательности Θ_1^i и траекторию ξ_1 будем называть *начальными*. Начальные элементы дерева имеют то свойство, что они имеют только выходящее, но не входящее зацепление.

Следующее утверждение прямо следует из определения.

Утверждение 1.10. *Образ последовательности рода k под действием f снова есть некоторая последовательность рода k.*

Лемма 1.11. *Пусть $\Theta^1(\xi,\zeta)$ и $\Theta^1(\varkappa,\mu)$ — две зацепляющие последовательности рода 1, зацепляющие соответственно ξ с ζ и $\varkappa$ с μ. Пусть $\Theta^1(\xi,\zeta)$ ω-зацеплена с $\Theta^1(\varkappa,\mu)$ последовательностью Θ^2 рода 2. Тогда ξ ω-зацеплена с $\varkappa$ и μ.*

Доказательство. Пусть ξ_0 — некоторая точка траектории ξ относительно f^n (далее, если явно не сказано обратное, мы будем рассматривать траектории только относительно f^n). Пусть a_i — зацепляющая подпоследовательность $\Theta^1(\xi,\zeta)$, сходящаяся к ξ_0. Поскольку Θ^2 — зацепляющая последовательность рода 2, то по определению найдется $k < n$ такое, что $f^k(\Theta^1(\xi,\zeta)) = \Theta^1(\varkappa,\mu)$, в частности, $f^k(\xi) = \varkappa$, $f^k(\zeta) = \mu$ и $f^k(a_i) = b_i$ — зацепляющая подпоследовательность $\Theta^1(\varkappa,\mu)$, сходящаяся к $\varkappa_0 = f^k(\xi_0)$. Поскольку $\Theta^1(\xi,\zeta)$ ω-зацеплена с $\Theta^1(\varkappa,\mu)$ при помощи Θ^2, для каждой пары (a_i, b_i) найдется зацепляющая подпоследовательность Θ^2, c_{ij}, сходящаяся к a_i. Пусть $\widehat{c}_{ij}$ — обратные подпоследовательности к c_{ij}. По определению для каждого i c_{ij} сходится к b_i. Возьмем диагональную последовательность c_{mm}. Она сходится к ξ_0, а ее обратная $\widehat{c}_{mm}$ — к $\varkappa_0$. Следовательно, ξ_0 и $\varkappa_0$ зацеплены, причем ω-зацеплены, поскольку такова последовательность Θ^2.

Далее, пусть $\widehat{a}_i = f^{N_i}(a_i)$ — обратная последовательность к a_i, сходящаяся к ζ_0. Тогда $f^k(\widehat{a}_i) = f^{N_i}(b_i) = \widehat{b}_i$ — обратная последовательность к b_i, сходящаяся к μ_0. Рассмотрим последовательность $f^{N_i}(\widehat{c}_{mm})$. Поскольку $\widehat{c}_{mm}$ сходится к $\varkappa_0$, а $\widehat{b}_i$ — к μ_0, то $f^{N_i}(\widehat{c}_{mm})$ по непрерывности также сходится к μ_0. Следовательно, ξ_0 и μ_0 зацеплены, причем ω-зацеплены, поскольку такова последовательность Θ^2. □

Заметим, что если ξ — блуждающая траектория, то $\xi \neq \mu$, но может выполняться равенство $\zeta = \varkappa$.

Лемма 1.12. *Пусть Θ_1^{k-1} и Θ_2^{k-1} — две зацепляющие последовательности рода $k-1$ и ξ — начальная траектория Θ_1^{k-1}. Пусть Θ_1^{k-1} ω-зацеплена с Θ_2^{k-1} последовательностью Θ^k рода k. Тогда ξ ω-зацеплена со всеми траекториями, опосредствованно зацепленными Θ_2^{k-1}, при помощи подпоследовательностей Θ^k.*

Доказательство. Проведем доказательство индуктивно. В качестве базы индукции возьмем лемму 1.11. Пусть утверждение леммы справедливо для $k-1$. Покажем, что оно справедливо для k.

Пусть ξ_0 — некоторая точка траектории ξ относительно f^n (далее, если явно не сказано обратное, мы будем рассматривать траектории только относительно f^n). Поскольку Θ^k — зацепляющая последовательность рода k, то по определению найдется $l < n$, такое, что $f^l(\Theta_1^{k-1}) = \Theta_2^{k-1}$, Пусть $f^l(\xi) = \varkappa$ и $f^l(\xi_0) = = \varkappa_0$. Согласно индукционному предположению ξ зацеплена с траекториями, опосредствованно зацепленными Θ_1^{k-1}. Следовательно, для каждой траектории ζ, отличной от ξ, опосредствованно зацепленной Θ_1^{k-1}, существует сходящаяся к ξ_0 подпоследовательность $a_i^{\zeta_0}$ последовательности Θ_1^{k-1} такая, что обратная к ней последовательность $\widehat{a}_i^{\zeta_0}$ сходится к ζ_0. Обозначим $f^l(\xi) = \varkappa$, $f^l(\zeta) = \mu$, $f^l(\zeta_0) = \mu_0$. Через $f^l(a_i) = b_i$ обозначим зацепляющую подпоследовательность Θ_2^{k-1}, сходящуюся к $\varkappa_0 = f^l(\xi_0)$. Поскольку Θ_1^{k-1} ω-зацеплена с Θ_2^{k-1} при помощи Θ^k, для каждой пары (a_i, b_i) найдется зацепляющая подпоследовательность Θ^k, c_{ij}, сходящаяся к a_i. Пусть $\widehat{c}_{ij}$ — обратные подпоследовательности к c_{ij}. По определению для каждого i c_{ij} сходится к b_i. Возьмем диагональную последовательность c_{mm}. Она сходится к ξ_0, а ее обратная $\widehat{c}_{mm}$ — к $\varkappa_0$. Следовательно, ξ_0 и $\varkappa_0$ зацеплены, причем ω-зацеплены, поскольку такова последовательность Θ^k.

Далее, пусть $\widehat{a}_i = f^{N_i}(a_i)$ — обратная последовательность к a_i, сходящаяся к ζ_0. Тогда $f^l(\widehat{a}_i) = f^{N_i}(b_i) = \widehat{b}_i$ — обратная последовательность к b_i, сходящаяся к μ_0. Рассмотрим последовательность $f^{N_i}(\widehat{c}_{mm})$. Поскольку $\widehat{c}_{mm}$ сходится к $\varkappa_0$, а $\widehat{b}_i$ — к μ_0, то $f^{N_i}(\widehat{c}_{mm})$ по непрерывности также сходится к μ_0. Следовательно, ξ_0 и μ_0 зацеплены, причем ω-зацеплены, поскольку такова последовательность Θ^k.

В силу произвольного выбора траектории ζ (а следовательно, и $f^l(\zeta) = \mu$) вышеприведенное доказательство справедливо для произвольной траектории, опосредствованно зацепленной Θ_2^{k-1}. $\square$

Как следствие, исходящая траектория последовательности рода k зацеплена со всеми другими траекториями, опосредствованно зацепленными этой последовательностью.

Замечание 1.13. *Если опосредствованно зацепленные последовательностью рода k траектории — блуждающие, то среди них не менее $k+1$ различных.*

Эта достаточно грубая оценка основана на том факте, что так как инициальные траектории соответствующих подпоследовательностей блуждающие, то они не могут быть зацеплены сами с собой.

Лемма 1.14. *Пусть ξ с ζ — траектории из $\Omega(f)\setminus\Omega(f^n)$, и $\Theta^1(\xi,\zeta)$ — зацепляющая последовательность рода 1, зацепляющая ξ с ζ. Тогда найдутся подпоследовательность последовательности $\Theta^1(\xi,\zeta)$, $\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta)$ — зацепляющая последовательность рода 1, зацепляющая ξ с ζ, найдутся траектории $\varkappa$ и μ, зацепляющая их последовательность $\Theta^1(\varkappa,\mu)$ рода 1 и последовательность Θ^2 рода 2, ω- либо α-зацепляющая $\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta)$ с $\Theta^1(\varkappa,\mu)$.*

Доказательство. Пусть ξ_0 — некоторая точка траектории ξ относительно f^n (далее, если явно не сказано обратное, мы будем рассматривать траектории только относительно f^n). Пусть a_i — зацепляющая подпоследовательность $\Theta^1(\xi,\zeta)$, сходящаяся к ξ_0. Точки последовательности a_m блуждающие по определению последовательности рода 1, так как ξ и ζ — блуждающие траектории. Положим $a_i^p = f^p(a_i)$, $0 \le p < n$. Согласно лемме 2.12, для каждого m под действием f^n траектории a_m^p циклически зацеплены между собой. Поэтому для каждого m найдется число $0 < l < n$ такое, что a_m и a_m^p зацеплены, и символ ω или α указывает тип зацепления (ω-зацепление; в противном случае — α-зацепление). m принимает значения в бесконечном множестве индексов, а l — в конечном. Следовательно, найдется бесконечная подпоследовательность последовательности a_m с одним и тем же числом $l = q$ и с одним и тем же типом зацепления (ω или α). Поскольку эта подпоследовательность сходится к ξ_0, она является зацепляющей. При помощи этой последовательности построим зацепляющую последовательность рода 1 и назовем ее $\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta)$. Обозначим $\varkappa = f^q(\xi)$ и $\mu = f^q(\zeta)$. Тогда $\Theta^1(\varkappa,\mu) = f^q(\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta))$ в силу предложения 1.10.

Обозначим через a'_m подпоследовательность $\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta)$, сходящуюся к ξ_0, и через $b_m = f^q(a'_m)$ — соответствующие точки последовательности $\Theta^1(\varkappa,\mu)$, сходящиеся к $\varkappa_0 = f^q(\xi_0)$. В силу выбора последовательности $\tilde{\Theta}^1(\xi,\zeta)$ a'_m и b_m зацеплены посредством одного и того же типа зацепления. Для каждого m возьмем зацепляющую последовательность от a'_m к b_m и при её помощи построим последовательность рода 1. Возьмем объединение последовательностей рода 1 по всем m. Обозначим полученную последовательность Θ^2. По построению Θ^2 удовлетворяет определению зацепляющей последовательности рода 2. $\square$

Лемма 1.15. *Пусть $\Theta_1^{k-1} \subset \Omega(f) \setminus \Omega(f^n)$ — зацепляющая последовательность рода $k-1$. Тогда эта последовательность содержит подпоследовательность $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$ рода $k-1$, для которой найдутся последовательность Θ_2^{k-1} рода $k-1$ и последовательность Θ^k рода k, ω- либо α-зацепляющая $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$ с Θ_2^{k-1}.*

Доказательство . Проведем доказательство по индукции, и вместе с леммой докажем следующее вспомогательное утверждение: построенная последовательность рода k является k-параметрической последовательностью траекторий. В качестве базы индукции возьмем лемму 1.14. База для вспомогательного утверждения следует из доказательства последней. Пусть утверждение леммы и вспомогательное утверждение справедливы для $k-1$. Покажем, что они справедливы и для k. Вследствие вспомогательного утверждения Θ_1^{k-1} можно представить в виде $(k-1)$-параметрического набора траекторий $(a_{i_1\ldots i_{k-1}})$.

Положим $a^p_{i_1\ldots i_{k-1}} = f^p(a_{i_1\ldots i_{k-1}})$, $0 \le p < n$. Согласно лемме 2.12, для каждого набора индексов $i_1 \ldots i_{k-1}$ траектории $a^p_{i_1\ldots i_{k-1}}$ под воздействием f^n циклически зацеплены между собой. Поэтому для каждого набора индексов $i_1 \ldots i_{k-1}$ найдется число $0 < l < n$ такое, что $a_{i_1\ldots i_{k-1}}$ и $a^p_{i_1\ldots i_{k-1}}$ зацеплены, и символ ω либо α указывает на тип зацепления (ω-зацепление; в противном случае — α-зацепление).

Фиксируем набор индексов $i_1 \ldots i_{k-2}$. Индекс i_{k-1} принимает значения из бесконечного множества, а l — из конечного.

Следовательно, найдется бесконечная подпоследовательность последовательности $a_{i_{k-1}}$ с одним и тем же числом l и с одним и тем же типом зацепления (ω либо α). С каждым значением индекса i_{k-1} при фиксированных $i_1 \dots i_{k-2}$ связана некоторая последовательность рода 1. Выбросим из Θ_1^{k-1} те последовательности рода 1, которые не связаны с полученной подпоследовательностью. Оставшаяся последовательность снова является последовательностью рода $k-1$, поскольку составляющие ее бесконечные подпоследовательности после выбрасывания конечного числа не связанных с ними последовательностей так и останутся бесконечными подпоследовательностями. Теперь при фиксированном наборе индексов $i_1 \dots i_{k-2}$ траектории, отличающиеся только последним индексом, имеют одинаковый тип зацепления. Проделаем ту же операцию с индексом i_{k-2}. Получим, что оставшиеся в Θ_1^{k-1} траектории, отличающиеся только двумя последними индексами, имеют одинаковый тип зацепления. Продолжая до первого индекса, получим, что все оставшиеся в Θ_1^{k-1} траектории имеют одинаковый тип зацепления и снова образуют последовательность рода $k-1$. Обозначим полученную последовательность $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$.

Пусть q — число зацеплений для $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$. Обозначим $\Theta_2^{k-1} = f^q(\tilde{\Theta}_1^{k-1})$. В силу предложения 1.10 это тоже последовательность рода $k-1$.

Как следствие вспомогательного утверждения $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$ можно представить в виде $k-1$-параметрического набора траекторий $(a'_{i_1 \dots i_{k-1}})$. Обозначим через $b_m = f^q(a'_m)$ соответствующие траектории последовательности Θ_2^{k-1}. В силу выбора последовательности $\tilde{\Theta}_1^{k-1}$ $a'_{i_1 \dots i_{k-1}}$ и $b_{i_1 \dots i_{k-1}}$ зацеплены с одним и тем же типом зацепления. Для каждого $i_1 \dots i_{k-1}$ возьмем зацепляющую последовательность от $a'_{i_1 \dots i_{k-1}}$ к $b_{i_1 \dots i_{k-1}}$ и при её помощи построим последовательность рода 1. Возьмем объединение последовательностей рода 1 по всем $i_1 \dots i_{k-1}$. Обозначим полученную последовательность Θ^k. По построению Θ^k удовлетворяет определению зацепляющей последовательности рода k. $\square$

1.3. Основные теоремы.

Теорема 1.16. *Неблуждающее множество, совпадающее со всем пространством, итерационно устойчиво.*

Доказательство. Согласно лемме 1.14 из существования зацепляющей последовательности рода 1 следует существование зацепляющей последовательности рода 2 и, как следствие леммы 1.15, отсюда следует и существование зацепляющей последовательности Θ^k произвольно большого рода k. При этом, согласно лемме 1.12, инициальная траектория последовательности Θ^k будет зацеплена с 2^k траекторий, из которых не менее $k+1$ различных (см. 1.13). Поскольку образов траектории точка x только конечное число, не более чем через n шагов точка x будет либо α- либо ω-зацеплена сама с собой. Отсюда и получаем утверждение теоремы. □

Как следствие леммы 1.1 и теоремы 1.16 имеем следующее утверждение.

Теорема 1.17. *Центр Биркгофа итерационно устойчив.*

2. Итерационная устойчивость аналогов центра Биркгофа

Отметим, что существующие аналоги центра Биркгофа, которые можно построить, положив в определении центра Биркгофа вместо неблуждающих множеств граничные множества либо цепно-рекуррентные множества, итерационно устойчивы.

Именно, положим $\mathrm{Lim}_1(f) = \mathrm{Lim}(f)$ и определим по индукции $\mathrm{Lim}_{n+1}(f) = \mathrm{Lim}(f|_{\mathrm{Lim}_n(f)})$. Пересечение полученной последовательности вложенных замкнутых инвариантных множеств обозначим через $\mathrm{Lim}_\omega(f)$. Этот процесс можно продолжать и далее, используя трансфинитную индукцию. В соответствии с леммой Цорна, этот процесс остановится на некотором ординале α, для которого $\mathrm{Lim}_\alpha(f) = \mathrm{Lim}(f|_{\mathrm{Lim}_\alpha(f)})$. Такое множество рассматривал еще сам Биркгоф, и иногда в литературе его тоже называют центром Биркгофа. Назовем полученное множество граничным центром (Биркгофа) динамической системы.

Поскольку граничное множество $\mathrm{Lim}(f)$ сохраняется при извлечении корня, граничный центр (Биркгофа) имеет то же свойство. Кроме того, граничный центр (Биркгофа) содержит замыкание множества рекуррентных точек и содержится в центре Биркгофа.

Поскольку множество $C(f)$ цепно-рекуррентных точек сохраняется при извлечении корня, аналогичная конструкция, использующая цепно-рекуррентные множества, дает нам не зависящий от итераций отображения цепно-рекуррентный центр динамической системы. По построению он содержит обычный центр Биркгофа.

ГЛАВА 3

Примеры динамических систем

1. Кандидаты в контрпримеры динамических систем с итерационно неустойчивым центром Биркгофа

Неблуждающее множество динамической системы совпадает с центром Биркгофа, в частности, когда неблуждающее множество совпадает со всем пространством. Чтобы построить пример динамической системы с центром Биркгофа, отличным от центра Биркгофа какой либо степени выбранной динамической системы, достаточно было бы предъявить пример системы с неблуждающим множеством, отличным от неблуждающего множества какой либо ее степени и совпадающим со всем пространством.

В процессе изучения систем с итерационно неустойчивыми неблуждающими множествами выяснилось, что их центры Биркгофа итерационно устойчивы, и механизм этой устойчивости был обобщен в виде теоремы 1.17. Эти примеры являются наглядной иллюстрацией к рассуждениям теоремы 1.17 и значительно упрощают ее понимание.

В этом разделе построен пример динамической системы на бесконечномерном многообразии, такой, что ее неблуждающее множество, а следовательно, и центр Биркгофа, совпадает со всем пространством, но не совпадает с замыканием множества рекуррентных точек. Этот пример иллюстрирует теорему 1.3.

В процессе исследования итерационной устойчивости центра Биркгофа были построены динамические системы специального вида, которые далее будут описаны как n-ножники. Эти n-ножники являются универсальными моделями зацепляющих последовательностей, по сути представляя собой зацепляющие последовательности произвольно большого рода.

Если бы нашелся пример динамической системы с центром Биркгофа, отличным от центра Биркгофа некоторой ее степени, то выделяя из этой системы зацепляющие последовательности все возрастающего рода, такое поведение было бы перенесено на некоторый n-ножник без фиксированных точек, с итерационно неустойчивым центром Биркгофа.

Поскольку описываемое нами поведение довольно экзотично, нам понадобятся специальным образом построенные примеры.

1.1. Общая схема построения. Будем пытаться строить топологическое пространство X и два коммутирующих гомеоморфизма F и S на нем, такие, что неблуждающее множество F состоит только из фиксированных точек (следовательно, сохраняется при возведении в степень и не совпадает со всем пространством), блуждающие точки F циклически зацеплены с длиной цикла n, а S — корень из тождественного отображения степени n ($\underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n} = \mathrm{Id}$), переставляющий циклически зацепленные точки так, что у композиции $F \circ S$ эти точки становятся неблуждающими. Поясним последние слова на примере.

Лемма 1.1. *Пусть $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_{n-1}$ — блуждающие циклически зацепленные траектории отображения F с длиной цикла n, а S — коммутирующее с F отображение такое, что $S(\Gamma_i) = \Gamma_{i+1 \pmod n}$. Тогда у отображения $\widetilde{F} = F \circ S$ траектории Γ_i — неблуждающие.*

Доказательство. Пусть Γ_0 и Γ_1 зацеплены. Тогда в окрестности Γ_0 существует зацепляющая последовательность к Γ_1. S^{n-1} переводит эту зацепляющую последовательность в зацепляющую последовательность от Γ_{n-1} к Γ_0. Поэтому для отображения $\widetilde{F} = F \circ S$ эта зацепляющая последовательность становится зацепляющей последовательностью от Γ_0 к Γ_0, и траектория Γ_0 становится неблуждающей. □

В качестве искомого примера возьмем гомеоморфизм $\widetilde{F} = F \circ S$. У него неблуждающее множество совпадает со всем пространством, а у его степени $\widetilde{F}^n = (F \circ S)^n = F^n \circ S^n = F^n$ оно совпадает с неблуждающим множеством гомеоморфизма F.

1.2. n-Ножники. Опишем универсальную конструкцию, при помощи которой можно смоделировать любой желаемый тип поведения орбит и которую будем называть (заплетенным) n-ножником.

n-Ножник будем строить склеиванием между собой элементарных строительных блоков, в качестве которых возьмем отрезок $[-1, 1]$ с отмеченными точками $\pm(1-\frac{1}{2^n})$ и ± 1. Припишем индекс $-\infty$ точке -1, $-n$ — точкам $-1+\frac{1}{2^n}$, n — точкам $1-\frac{1}{2^n}$, и наконец, индекс ∞ — точке 1. Отмеченные точки будем называть узлами. На узлах одного отрезка существует естественная динамическая система N, переводящая узел индекса n в узел индекса $n+1$. Естественно, узлы индекса $\pm\infty$ при этом остаются на месте.

Заметим, что динамическая система на n-ножнике задана только на узлах, а не на всех точках составляющих его отрезков. Отрезки носят вспомогательный характер, поскольку с них индуцируется топология и метрика на множество узлов.

n-Ножник будем строить индуктивно. Конструкцию, полученную на k-м шаге будем называть остовом n-ножника глубины k. Параллельно с построением n-ножника будем задавать на его узлах коммутирующие отображения F и S такие, что неблуждающее множество F сохраняется при возведении в степень и не совпадает со всем пространством, непериодические точки F циклически зацеплены с длиной цикла n, а S — корень из тождественного отображения степени n ($S^n = \mathrm{Id}$), переставляющий циклически зацепленные точки так, что у композиции $F \circ S$ эти точки становятся неблуждающими. Характер циклической зацепленности будем строить в зависимости от специальной последовательности, которую определим далее и которую будем называть кодирующей последовательностью.

Шаг 1. На первом шаге возьмем n экземпляров отрезков $[-1, 1]$. Пронумеруем отрезки числами от 0 до $n-1$. Определим на узлах этих отрезков отображение S как циклическую перестановку этих отрезков. Определим на них отображение F, задав на каждом из отрезков отображение N. Поставим в соответствие каждому узлу кодировку вида $\{i; j\}$, где i — номер отрезка, на котором лежит узел, j — индекс этого узла. В такой кодировке отображение S имеет вид $\{i; j\} \mapsto \{i+1 \mod n; j\}$, а отображение F имеет вид $\{i; j\} \mapsto \{i; j+1\}$. Полученное множество назовем остовом n-ножника глубины 1.

Шаг 2. У полученного на шаге 1 отображения F есть в точности $2n$ неподвижных точек, имеющих кодировку $\{i; \pm\infty\}$, и в точности n блуждающих траекторий $(\{i; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$, которые не зацеплены между собой. Зацепим циклически эти траектории с помощью следующей общей конструкции.

Пусть у нас есть траектория $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, которую мы хотим зацепить с траекторией $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Пусть обе траектории вложены в некоторый остов некоторого n-ножника, на котором уже определены отображения F и S. Возьмем бесконечно много экземпляров отрезков $[-1, 1]$, пронумерованных либо целыми числами от $-\infty$ до 0, если мы хотим получить в результате ω-зацепленность, либо целыми числами от 0 до $+\infty$, если в результате мы хотим получить α-зацепленность, либо целыми числами от $-\infty$ до $+\infty$, если в результате мы хотим получить и α- и ω-зацепленность. Возьмем узел a_0. У каждого отрезка, занумерованного числом k, конец с индексом $-\infty$ приклеим к узлу a_0, а другой конец — с индексом $+\infty$, приклеим к узлу b_k. Здесь под приклейкой понимается стандартная топологическая операция отождествления точек с заданием на полученном множестве фактор-топологии. Такую же конструкцию проделаем с каждым узлом a_i, с тем только отличием, что границей диапазона номеров отрезков будет теперь не 0, как в случае a_0, а число i.

Эта конструкция схематически изображена на рис. 1. Слева изображен фрагмент траекторий (a_i) и (b_i) до зацепления, справа — после ω-зацепления (a_i) с (b_i). На рисунке мы видим выходящий из каждого узла траектории (a_i) веер из бесконечного числа отрезков, расходящийся в направлении отрицательной полутраектории соответствующего узла траектории (b_i). Отметим, однако, что все эти отрезки не имеют между

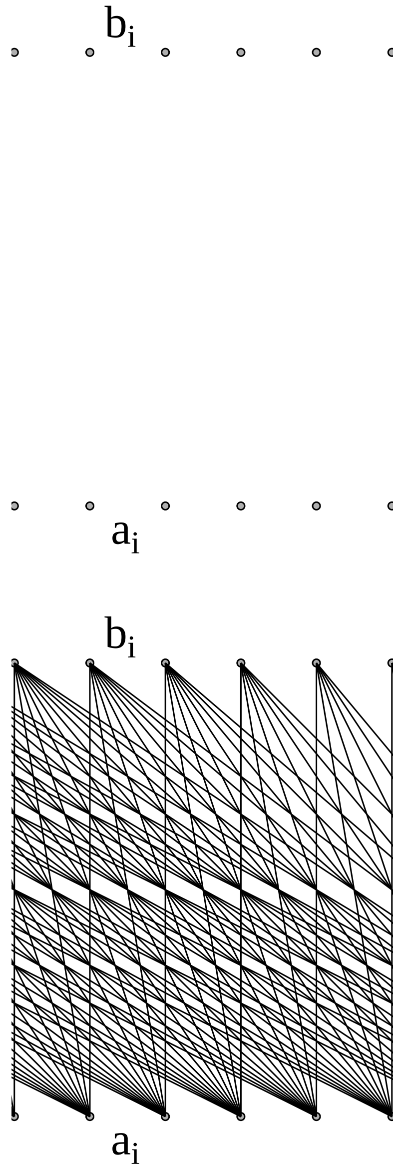

Рис. 1. Траектории (a_i) и (b_i) до и после зацепления.

собой общих внутренних точек, хотя в плоскости рисунка их проекции в некоторых точках накладываются друг на друга.

Доопределим на приклеенных отрезках отображение F, отобразив на каждом отрезке с концами a_i и b_j узел с индексом l в узел с индексом $l+1$ отрезка с концами $a_{i+1} = F(a_i)$ и $b_{j+1} = F(b_j)$. Пусть узлу a_i поставлена в соответствие кодировка $\{q_0; q_1; \ldots; q_s\}$. Поставим в соответствие каждому узлу индекса r на отрезке с концами a_i и b_j кодировку вида $\{q_0; q_1; \ldots; q_s; j; r\}$, В такой кодировке отображение S имеет вид $\{q_0; q_1; \ldots; q_s; j; r\} \mapsto \{q_0 + 1 \mod n; q_1; \ldots; q_s; j; r\}$, а отображение F имеет вид $\{q_0; q_1; \ldots; q_s; j; r\} \mapsto \{F(\{q_0; q_1; \ldots; q_s\}); j+ +1; r+1\}$.

Далее, поскольку на траекториях $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, и $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ задано отображение S, повторим конструкцию зацепления для каждой пары траекторий $(S^p(a_i))_{i\in\mathbb{Z}}$ и $((S^p(b_i))_{i\in\mathbb{Z}}$, $p \in \{1 \ldots n-1\}$. Зададим на узлах приклеенных отрезков отображение S, отобразив на каждом отрезке с концами $S^p(a_i)$ и $S^p(b_j)$ узел с индексом l в узел с тем же индексом на отрезке с концами $S^{p+1}(a_i)$ и $S^{p+1}(b_j)$.

Вернемся к остову n-ножника глубины 1. Чтобы получить циклическое зацепление орбит, достаточно зацепить с любой другой траекторией траекторию $(\{0; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$, а далее это зацепление размножится под действием отображения S. У нас есть некоторая неоднозначность в применении описанной выше конструкции, связанная с тем, что нам нужно определить, с какой траекторией будет зацеплена траектория $(\{0; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$ и какой будет тип этого зацепления, ω-, α- или двузацепление. Эта информация, по сути, является параметризацией процесса конструирования n-ножника. Поэтому естественно вынести ее отдельно в виде некоторой записи, которую мы назовем кодирующей последовательностью. Пусть, например, траектория $(\{0; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$ будет ω-зацеплена с траекторией $(\{p; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$. Вводя для ω-зацепленности знак $\stackrel{\omega}{\hookrightarrow}$, получим запись шага 1 в виде $(\{0; n\})_{n\in\mathbb{Z}} \stackrel{\omega}{\hookrightarrow} (\{p; n\})_{n\in\mathbb{Z}}$, или, сокращенно, $0 \stackrel{\omega}{\hookrightarrow} p$. Аналогично, для α- и двузацепленности введем знаки $\stackrel{\alpha}{\hookrightarrow}$ и $\stackrel{2}{\hookrightarrow}$.

Информация из кодирующей последовательности однозначно определяет результат описанной выше операции зацепления. Применив ее к остову n-ножника глубины 1, получим новое множество, остов n-ножника глубины 2, с продолженными на него отображениями F и S. В этом остове узлы остова глубины 1 сохранят свою кодировку, а добавленные узлы будут иметь кодировку вида $\{q_1; q_2; q_3; q_4\}$. На них отображение S имеет вид $\{q_1; q_2; q_3; q_4\} \mapsto \{q_1 + 1 \mod n; q_2; q_3; q_4\}$, а отображение F имеет вид $\{q_1; q_2; q_3; q_4\} \mapsto \{q_1; q_2 + 1; q_3 + 1; q_4 + 1\}$. Из самой записи для F и S очевидно, что F и S коммутируют.

Шаг k. Пусть у нас на шаге $k-1$ в соответствии с кодирующей последовательностью построен остов n-ножника глубины $k-1$ и коммутирующие отображения F и S на нем таким образом, что в этом остове n-ножника глубины $k-1$ точки остова n-ножника глубины $k-2$ циклически зацеплены относительно отображения F с длинной цикла, не превышающей n, а траектории отображения S состоят из циклически зацепленных точек.

Пусть у полученного на шаге $k-1$ отображения F есть в точности n α-предельных точек, имеющих кодировку $\{i; -\infty\}$ и n ω-предельных точек, имеющих кодировку $\{i; +\infty\}$. Заметим, что все остальные траектории по построению были блуждающими, однако на последующих шагах они могли превратиться в неблуждающие вследствие эффекта теоремы 1.16. В частности, на шаге $k-1$ было добавлено бесконечно много блуждающих траекторий с кодировкой $(\{q_1; q_2; \ldots; q_{2k-4}; q_{2k-3}+l; q_{2k-2}+ +l\})_{l\in\mathbb{Z}}$, которые не зацеплены между собой. На них отображение S имеет вид

$$\{q_1; q_2; \ldots; q_{2k-2}\} \mapsto \{q_1 + 1 \mod n; q_2; \ldots; q_{2k-2}\},$$

а отображение F имеет вид

$$\{q_1; q_2; \ldots; q_{2k-2}\} \mapsto \{q_1; q_2 + 1; \ldots; q_{2k-2} + 1\}.$$

Траектория отображения S должна состоять из циклически зацепленных траекторий, поэтому нам нужно зацеплять между собой траектории вида $(\{p; q_2 + l; q_3 + l; \ldots; q_{2k-2} + l\})_{l\in\mathbb{Z}}$,

$p \in \{0 \ldots n-1\}$. Эти траектории можно циклически зацепить между собой с помощью конструкции, описанной на шаге 2.

Для каждого такого набора траекторий у нас снова есть некоторая неоднозначность в применении описанной выше конструкции, связанная с тем, что нам нужно определить, как между собой будут зацеплены траектории из набора $(\{p; q_2+ +l; q_3+l; \ldots; q_{2k-2}+l\})_{l\in\mathbb{Z}}$, $\{p \in 0 \ldots n-1\}$ и какой будет тип этого зацепления, ω-, α- или двузацепление. Для этого достаточно указать значение p. За этой информацией снова обратимся к кодирующей последовательности. Запись вида $(\{0; q_2 + l; q_3+ +l; \ldots; q_{2k-2} + l\})_{l\in\mathbb{Z}} \overset{\omega}{\hookrightarrow} (\{p; q_2 + l; q_3 + l; \ldots; q_{2k-2} + l\})_{l\in\mathbb{Z}}$ означает, что траектория слева ω-зацеплена с траекторией справа. В таком же виде можно записывать и зацепление целого набора траекторий, задавая q_i параметрически. Такая запись, хотя и весьма подробная, несколько громоздка, поэтому, если мы хотим выписать простое правило сразу для всех траекторий, будем сокращенно писать, что $0 \overset{\omega}{\hookrightarrow} p$ на шаге k.

Информация из кодирующей последовательности однозначно определяет результат операции зацепления. Применив ее к остову n-ножника глубины $k-1$, получим новое множество, остов n-ножника глубины k, с продолженными на него отображениями F и S.

Конструкция зацепления гарантирует нам, что в этом остове n-ножника глубины k точки остова n-ножника глубины $k-1$, не принадлежащие остову глубины $k-2$, циклически зацеплены относительно отображения F с длинной цикла, не превышающей n. Для точек остова глубины $k-2$ это справедливо по предположению индукции. Легко видеть из самой записи для F и S, что F и S коммутируют, а траектории отображения S состоят из циклически зацепленных точек.

Индуктивный переход. Обозначим остов n-ножника глубины k через X_k. Обозначим отображения S и F на X_k через S_k и F_k. Построена последовательность вложенных друг в друга пространств $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \ldots$. В пределе последовательность пространств X_k и отображений S_k и F_k на них дает пространство X_∞, снабженное топологией прямого предела, и отображения S и F, являющиеся гомеоморфизмами этого пространства.

1.2.1. *Пример.* Рассмотрим треножник, заданный кодирующей последовательностью

шаг 2: $0 \overset{\omega}{\hookrightarrow} 1$; шаг 3: $0 \overset{\omega}{\hookrightarrow} 1$; $\ldots$; шаг n: $0 \overset{\omega}{\hookrightarrow} 1$; $\ldots$.

У отображения F на этом треножнике множество рекуррентных точек состоит из 6 фиксированных точек остова глубины 0. Другие точки, появившись на i-м шаге как блуждающие точки i-го остова, уже на $(i+3)$-м шаге становятся неблуждающими вследствие теоремы 1.17. Поэтому неблуждающее множество и, как следствие, центр Биркгофа отображения F этого треножника совпадает со всем треножником.

Отображение $F \circ S$ на каждом из остовов треножника глубины i итерационно неустойчиво: у отображения $F \circ S$ неблуждающее множество является остовом треножника глубины $i-1$, а у отображения $(F \circ S)^3 = F \circ F \circ F \circ S \circ S \circ S = F^3$ оно совпадает с неблуждающим множеством отображения F, остовом треножника глубины $i-3$.

Однако на целом треножнике и у отображения $F \circ S$, и у отображения F неблуждающее множество совпадает со всем треножником. Поэтому оно является их центром Биркгофа и итерационно устойчиво.

2. Пример системы на бесконечномерном многообразии

Наша цель — построить (неполное) метрическое пространство M и гомеоморфизм $F : M \to M$ такие, что $\Omega(F) = M$ и $\mathrm{Rec}(F) = \{a\}$, где $a \in M$ — единственная неподвижная точка динамической системы (M, F).

2.1. Построение пространства M. Построим сначала по индукции топологическое пространство M, на котором потом будет задана наша динамическая система.

Построение начнем с единичной окружности комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Зададим на M_1 инволюцию $T_1(z) = \bar{z} = \Re(z) - \Im(z)$, $z \in M_1$. Это отображение представляет собой зеркальное отражение окружности относительно вещественной оси. Иначе его можно записать еще и так:

$$T_1(\exp(i\varphi)) = \exp(-i\varphi) \ , \quad \varphi \in [0, 2\pi) \ .$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, на котором задана непрерывная инволюция $T_X : X \to X$.*

Пусть заданы вложение

$$\hat{j} : X \to X \times I \ , \quad \hat{j} : x \mapsto (x, 0) \ , \quad x \in X \ ,$$

и инволюция

$$\widehat{T} : X \times I \to X \times I \ , \quad \widehat{T} : (x,t) \mapsto (x, 1-t) \ , \quad (x,t) \in X \times I \ .$$

Пусть еще заданы разбиение

$$\mathfrak{f} = \bigcup_{\substack{x \in X \\ t \in (0,1)}} \{(x,t)\} \cup \bigcup_{x \in X} \{(x,1), (T_X(x), 0)\}$$

пространства $X \times I$ и проекция на фактор-пространство

$$\widehat{\mathrm{pr}} : X \times I \to Y = (X \times I)/\mathfrak{f} \ .$$

Тогда корректно определено фактор-отображение

$$T_Y = \mathrm{fact}\, \widehat{T} : Y \to Y \ .$$

Это отображение является инволюцией на пространстве Y и удовлетворяет соотножению

$$T_Y \circ j = j \circ T_X : X \to Y \ , \tag{2.5}$$

где $j = \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} : X \to Y$.

Отображение j является вложением. Пространство Y хаусдорфово и компактно.

Доказательство. Начнем с того, что отображение j является вложением. Действительно, образ вложения $\hat{j}(X) = X \times \{0\}$ пересекается с каждым элементом разбиения $\mathfrak{f}$ не более чем в одной точке. Следовательно, отображение $\mathrm{pr}\,|_{\hat{j}(X)}$ инъективно, а вместе с ним инъективно и отображение j. Так как пространство X — компактно и хаусдорфово по условию (следовательно, и пространство $X \times I$ — хаусдорфово), то j является гомеоморфизмом на свой образ.

Проверим, что отображение $\widehat{T}$ сохраняет разбиение $\mathfrak{f}$.

a) Пусть $t \in (0,1)$. Тогда $\widehat{T}(x,t) = (x, 1-t) \in \mathfrak{f}$.
b) $\widehat{T}(\{(x,1),(T_X(x),0)\}) = \{(x,0),(T_X(x),1)\} = \{T_X((T_X(x)),0),(T_X(x),1)\} \in \mathfrak{f}$ (напомним, что $T_X \circ T_X = \mathrm{Id}_X$ по условию).

Значит, отображение $T_Y = \mathrm{fact}\,\widehat{T} : Y \to Y$ корректно определено и является инволюцией ($T_Y \circ T_Y = \mathrm{fact}(\widehat{T} \circ \widehat{T}) = \mathrm{fact}\,\mathrm{Id}_{X\times I} = \mathrm{Id}_Y$).

Проверим равенство (2.5).

$$\begin{aligned} T_Y \circ j(x) &= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j}(x) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(x,0) = \\ &= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X^{-1}(x),1) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x),1) = \\ &= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \widehat{T}(T_X(x),1) = \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x),0) = \\ &= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} \circ T_X(x) = j \circ T_X(x)\ . \end{aligned}$$

Пространство Y компактно как фактор-пространство компактного пространства $X \times I$. Хаусдорфовость пространства Y следует из того, что пространство X хаусдорфово и Y есть локально-тривиальное расслоение над окружностью со слоем X (это проверяется непосредственно). □

Пусть для некоторого $n \geq 1$ уже построен компакт M_n, на котором задана инволюция T_n.

Обозначим через $\widehat{T}_{n+1} : M_n \times I \to M_n \times I$ инволюцию

$$\widehat{T}_{n+1}(y,t) = (y, 1-t)\ , \quad (y,t) \in M_n \times I\ .$$

Рассмотрим последовательность пространств и отображений

$$M_n \xrightarrow[\hat{j}_n]{} M_n \times I \xrightarrow[\mathrm{pr}_{n+1}]{} M_{n+1} = (M_n \times I)/\mathfrak{f}_{n+1}\ . \tag{2.6}$$

Здесь $\hat{j}_n : y \mapsto (y,0)$, $y \in M_n$, — вложение. Разбиение $\mathfrak{f}_{n+1}$ задается соотношением

$$\mathfrak{f}_{n+1} = \bigcup_{\substack{x \in M_n \\ t \in (0,1)}} \{(x,t)\} \cup \bigcup_{x \in M_n} \{(x,1),(T_n(x),0)\} , \tag{2.7}$$

а pr_{n+1} — отображение проекции.

Согласно предложению 2.1 отображение $j_n = \mathrm{pr}_{n+1} \circ \hat{j}_n : M_n \to M_{n+1}$ является вложением, пространство M_{n+1} хаусдорфово и компактно, и на этом пространстве корректно определена инволюция

$$T_{n+1} = \mathrm{fact}\, \widehat{T}_{n+1}$$

такая, что $T_{n+1} \circ j_n = j_n \circ T_n$.

Следовательно, по индукции имеем цепочку пространств и отображений, все пространства в ней компактные и Хаусдорфовы, все отображения — вложения:

$$S^1 = M_1 \xrightarrow{j_1} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{j_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots . \tag{2.8}$$

Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "j_n"'] \arrow[d, "T_n"'] & M_{n+1} \arrow[d, "T_{n+1}"] \\ M_n \arrow[r, "j_n"'] & M_{n+1} \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Обозначим

$$M = \varinjlim (M_n, j_n) .$$

2.2. Построение автоморфизма F пространства M. Наша цель построить последовательность автоморфизмов

$$F_n : M_n \to M_n , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

которые для всех $n \in \mathbb{N}$ будут удовлетворять следующим требованиям:

(1) $j_{n-1} \circ F_{n-1} = F_n \circ j_{n-1}$, если $n > 1$;
(2) существует точка $a \in M_1$, такая что $\{a_n\} = \mathrm{Rec}(F_n) = \mathrm{Fix}(F_n)$, $a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)$;
(3) $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$, если $n > 1$.

Напомним, что *потоком* (или *однопараметрической группой автоморфизмов*) на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение

$$f : X \times \mathbb{R} \to X\ ,$$

удовлетворяющее свойствам

(i) $f(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_X : X \to X$;
(ii) $f(f(\cdot, t), \tau) = f(\cdot, t + \tau) : X \to X$ для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Чтобы построить семейство отображений $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, мы сначала построим по индукции семейство потоков

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n\ , \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

а потом возьмем единичные сдвиги вдоль траекторий этих потоков

$$F_n = f_n(\,\cdot\,, 1) : M_n \to M_n\ , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Для того, чтобы такая конструкция дала нам семейство отображений $\{F_n\}$, удовлетворяющее свойствам (1)–(3), потребуем, чтобы семейство $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяло следующим требованиям:

(1′) $j_{n-1} \circ f_{n-1} = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_\mathbb{R})$, если $n > 1$;
(2′) $\mathrm{Fix}(f_n) = \mathrm{Rec}(f_n) = \{a_n\}$, $a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)$;
(3′) при $n > 1$ для каждого $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$ и для любой открытой окрестности $U = U(x)$ точки x в M_n найдется $T = T(U) > 0$ такое, что $f_n(U, t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$;
(4′) $T_n \circ f_n = f_n^- \circ (T_n \times \mathrm{Id}_\mathbb{R})$, $f_n^-(x, t) = f_n(x, -t)$, $(x, t) \in \in M_n \times \mathbb{R}$;
(5′) $T_n(O_{f_n}(x)) = O_{f_n}(x)$ для каждого $x \in M_n$.

2.2.1. *Одно полезное утверждение о произведении проекций.* Перед тем, как приступить к построению, докажем одно техническое утверждение, которым неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Утверждение 2.2. *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\mathfrak{f}$ — разбиение пространства X на компактные подмножества, $\mathfrak{i}$ — разбиение пространства Y на одноточечные подмножества.*

Пусть проекция $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ *является замкнутым отображением.*

Пусть, кроме того, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}$ *пространства* $X \times Y$ *является произведением разбиений* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{i}$.

Тогда отображение

$$\pi = \mathrm{pr}_X \times Id_Y : X \times Y \to X/\mathfrak{f} \times Y$$

факторно, и следовательно, пространства $(X \times Y)/\tilde{\mathfrak{f}}$ *и* $X/\mathfrak{f} \times Y$ *канонически гомеоморфны.*

Для доказательства этого предложения нам понадобится ряд приведенных ниже определений и результатов (см. [**7**]).

Определение 2.3 (см. [**10**]). *Непрерывное отображение* $f : X \to Y$, *взаимно-однозначный фактор* $\mathrm{fact}\, f : X/\operatorname{zer} f \to Y$ *которого является гомеоморфизмом, называется* факторным *(*$\operatorname{zer} f$ *— разбиение пространства* X, *элементами которого являются прообразы точек пространства* Y *под действием отображения* f*).*

Равносильно можно сказать, что отображение f *топологического пространства* X *в пространство* Y факторно, *если* $f(X) = Y$ *и прообраз* $f^{-1}(B)$ *множества* $B \subseteq Y$ *открыт в* X *тогда и только тогда, когда открыто множество* B.

Определение 2.4. *Разбиение* $\mathfrak{f}$ *топологического пространства* X *называется* непрерывным, *если и только если для каждого* F *из* $\mathfrak{f}$ *и любого открытого множества* U, *содержащего* F, *существует такое открытое множество* V, *что* $F \subseteq V \subseteq U$ *и* V *— объединение некоторой совокупности элементов семейства* $\mathfrak{f}$.

Теорема 2.5 (Александров, Хопф). *Разбиение* $\mathfrak{f}$ *топологического пространства* X *непрерывно тогда и только тогда, когда проектирование* $\mathrm{pr} : X \to X/\mathfrak{f}$ *замкнуто.*

Теорема 2.6 (Уоллес). *Пусть* X *и* Y *— топологические пространства,* A *и* B *— компактные подмножества из* X *и* Y *соответственно. Пусть, далее,* W *— произвольная окрестность множества* $A \times B$ *в произведении* $X \times Y$.

Тогда существуют такие окрестности U *и* V *множеств* A *и* B *соответственно, что* $U \times V \subseteq W$.

Доказательство предложения 2.2. Пусть $B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$, $B' = \pi^{-1}(B) \subseteq X \times Y$.

Если B открыто, то и B' открыто, так как отображение π, очевидно, непрерывно.

Предположим теперь, что множество B' открыто в $X \times Y$.

Пусть $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 : X/\mathfrak{f} \times Y \to X/\mathfrak{f}$ — проекция на первый сомножитель. Очевидно,

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{y\in Y} (B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \left[\widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \times \{y\}\right] = \bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\}\ . \end{aligned}$$

Мы здесь обозначили $B_y = \widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \subseteq X/\mathfrak{f}$, $y \in Y$.

Пусть еще $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ — проекция на первый сомножитель. Аналогично предыдущему, обозначим $B'_y = \mathrm{pr}_1(B' \cap$ $\cap (X \times \{y\})) \subseteq X$, $y \in Y$. Тогда

$$B' = \bigcup_{y\in Y} B'_y \times \{y\}\ .$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} B' &= \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\}\right) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \pi^{-1}(B_y \times \{y\}) = \bigcup_{y\in Y} \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y) \times \{y\}\ , \end{aligned}$$

поэтому $B'_y = \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y)$ для каждого $y \in Y$. Заметим, кроме того, что для любого $y \in Y$ множество B'_y открыто в X, так как B' открыто по условию и отображение $in_y : X \to X \times Y$, $in_y(x) =$ $= (x, y)$, $x \in X$, является вложением при любом фиксированном $y \in Y$.

Пусть $(x_0, y_0) \in B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$. Тогда для компактных подмножеств $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq X$ и $\{y_0\} \in Y$ найдутся согласно теореме 2.6 открытые окрестности $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, для которых

$\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \times \{y_0\} \subseteq U \times V \subseteq B'$. Далее, по теореме 2.5 для элемента $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0)$ разбиения $\mathfrak{f}$ и открытого множества U найдется *насыщенное* (являющееся объединением некоторого семейства элементов разбиения $\mathfrak{f}$) открытое множество W' такое, что $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq W' \subseteq U$. Очевидно, $W' = \mathrm{pr}_X^{-1}(W)$ для некоторого подмножества $W \subseteq X/\mathfrak{f}$, содержащего точку x_0. По определению фактор-топологии, так как множество W' открыто в X, то и W открыто в $X/\mathfrak{f}$.

Легко видеть, что $W' \times V = \pi^{-1}(W \times V)$ и множество $W \times V$ является открытой окрестностью точки (x_0, y_0). Кроме того, по построению $W' \times V \subseteq B'$, следовательно $W \times V \subseteq B$ и точка (x_0, y_0) — внутренняя для B.

Из произвольности выбора точки $(x_0, y_0) \in B$ следует, что B открыто в $X/\mathfrak{f} \times Y$.

Теперь из произвольности выбора множества $B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$ и его прообраза $B' = \pi^{-1}(B)$ следует, что отображение π факторно. □

Замечание 2.7. *Легко видеть, что если пространство X компактно и хаусдорфово, а пространство $X/\mathfrak{f}$ хаусдорфово, то все элементы разбиения $\mathfrak{f}$ компактны и отображение проекции $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ замкнуто.*

Таким образом, в этом случае для любого хаусдорфового пространства Y выполнены условия предложения 2.2.

2.2.2. *База индукции. Поток f_1 на пространстве M_1.* Наша цель — построить на пространстве M_1 поток f_1, который бы удовлетворял требованиям $(2')$, $(4')$ и $(5')$, которые сформулированы выше.

Начнем построение с потока $h : I \times \mathbb{R} \to I$,

$$h(x,t) = \begin{cases} 0\,, \quad x = 0\,; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}(t + \mathrm{tg}(\pi(x - \dfrac{1}{2})))\,, \quad x \in (0,1)\,; \\ 1\,, \quad x = 1\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

То, что h задает непрерывное действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ на отрезке, проверяется непосредственно. Простая проверка показывает также, что

$$h(x,t) + h(1-x,-t) = 1 \; . \tag{2.11}$$

Динамика потока h очень простая: концы отрезка являются положениями равновесия, интервал $(0,1) = O_h(1/2)$ является траекторией, выходящей из 0 и входящей в 1.

Обозначим $\hat{f}_1 = h : I \times \mathbb{R} \to I$.

Очевидно, пространство M_1 можно представить как фактор-пространство $M_1 = I/\mathfrak{f}_1$, где

$$\mathfrak{f}_1 = \{0,1\} \cup \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\} \; .$$

Пусть $\mathrm{pr}_1 : I \to I/\mathfrak{f}_1 = M_1$ — отображение проекции.

Рассмотрим разбиение

$$\tilde{\mathfrak{f}}_1 = \bigcup_{\substack{x \in (0,1) \\ t \in \mathbb{R}}} \{x,t\} \cup \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{(0,t),(1,t)\}$$

пространства $I \times \mathbb{R}$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_1$ переводит элементы разбиения $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_1$, поэтому определено непрерывное фактор-отображение

$$\mathrm{fact}\, \hat{f}_1 = f_1 : (I \times \mathbb{R})/\tilde{\mathfrak{f}}_1 \to I/\mathfrak{f}_1 \; .$$

Очевидно, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ является произведением разбиения $\mathfrak{f}_1$ и разбиения $\mathfrak{i}$ пространства $\mathbb{R}$ на одноточечные множества. Так как пространство I хаусдорфово и компактно, а пространства $I/\mathfrak{f}_1 \cong S^1$ и $\mathbb{R}$ хаусдорфовы, то мы находимся в условиях предложения 2.2 (см. замечание 2.7) и можно считать, что отображение f_1 задано на пространстве $I/\mathfrak{f}_1 \times \mathbb{R} = M_1 \times \mathbb{R}$. Пусть

$$\pi = \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : I \times \mathbb{R} \to M_1 \times \mathbb{R}$$

— проекция (см. предложение 2.2). Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccc}
I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}_1} & I \\
\pi \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{pr}_1 \\
M_1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow[f_1]{} & M_1
\end{array}
$$

Используя эту диаграмму, для любых $x \in M_1$ и t, $\tau \in \mathbb{R}$ получим соотношения:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,0) &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,0)) = \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),0) = \\
&= \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x)) = x \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(f_1(x,t),\tau) &= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t)),\tau) = \\
&= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\
&= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau)) = \\
&= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\
&= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t+\tau) = \\
&= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t+\tau)) = \\
&= f_1(x,t+\tau) \ .
\end{aligned}
$$

Следовательно, отображение f_1 задает непрерывный поток на M_1.

Представим M_1 как единичную окружность в комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ .$$

Отображение проекции принимает вид

$$\mathrm{pr}_1(x) = \exp(2\pi i x) \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

Ясно, что в таком представлении

$$f_1(\exp(2\pi i x),t) = \exp(2\pi i h(x,t)) \ , \quad x \in I \ .$$

Далее, учитывая соотношения (2.11), получаем

$$\begin{aligned} T_1 \circ f_1(\exp(2\pi i x), t) &= T_1 \circ \exp(2\pi i h(x,t)) = \\ &= \exp(2\pi i(1 - h(x,t))) = \\ &= \exp(2\pi i h(1 - x, -t)) = \\ &= f_1^-(\exp(2\pi i(1-x)), t) = \\ &= f_1^- \circ (T_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\exp(2\pi i x), t)\ . \end{aligned}$$

Здесь $f_1^-(z,t) = f_1(z,-t)$, $(z,t) \in M_1 \times \mathbb{R}$. Поэтому требование $(4')$ для M_1 выполнено.

Обозначим $a = \mathrm{pr}_1(0) = \exp(0)$. Тогда M_1 состоит из неподвижной точки, $\mathrm{Fix}(f_1) = \{a\}$, и блуждающей траектории $\{\exp(2\pi i x) \mid x \in (0,1)\} = O_{f_1}(\exp(\pi i))$, которая выходит из точки a и входит в эту же точку с другой стороны. Значит, требование $(2')$ для M_1 выполнено.

Динамическая система (M_1, f_1) состоит всего из двух траекторий, мощности которых как множеств различны (одна равна 1, другая — *continuum*). Так как инволюция T_1 переводит траектории динамической системы (M_1, f_1) в траектории (это немедленно следует из свойства $(4')$), то свойство $(5')$ выполнено.

2.2.3. *Вспомогательное построение.* Для дальнейших построений нам понадобится одна конструкция, которую мы рассмотрим отдельно.

Пусть X и Y — топологические пространства, $f : X \times \mathbb{R} \to \to X$ и $h : Y \times \mathbb{R} \to Y$ — потоки на X и Y соответственно.

Наша цель — построить "косое произведение" $\hat{f} : X \times Y \times \times \mathbb{R} \to X \times Y$ потоков f и h, которое удовлетворяло бы таким свойствам.

Пусть $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекции. Мы хотим,

(0) чтобы отображение $\hat{f}$ задавало поток на $X \times Y$;

(1) чтобы движение точки $(x,y) \in X \times Y$ под действием $\hat{f}$ проектировалось в движение точки $y = \mathrm{pr}_Y(x,y)$ под действием потока h, т. е. чтобы выполнялось равенство $\mathrm{pr}_Y \circ \hat{f} = h \circ (\mathrm{pr}_Y \times Id_{\mathbb{R}}) : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y$;

(2) чтобы траектории потока $\hat{f}$ проектировались в траектории потока f, т. е. чтобы выполнялось включение $\mathrm{pr}_X(O_{\hat{f}}(x, y)) \subseteq O_f(\mathrm{pr}_X(x, y)) = O_f(x)$;

(3) чтобы φ не зависела от выбора x, т. е. чтобы для любых x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство $\varphi(x_1, y, t) = \varphi(x_2, y, t)$, где через $\varphi(x, y, t)$ обозначена такая величина, что $\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x, y, t) = f(x, \varphi(x, y, t))$ (эта величина корректно определена в силу предыдущего требования).

Приведем наводящие соображения, которые позволяют нам "угадать" поток $\hat{f}$.

Предположим, что X и Y — "хорошие" пространства (например, конечномерные многообразия) и потоки f и h — гладкие. Тогда определены векторные поля $\{\vec{u}(x)\}_{x \in X}$ и $\{\vec{v}(y)\}_{y \in Y}$ на соответствующих касательных пространствах такие, что траектории потоков f и h являются интегральными для этих векторных полей.

Допустим, определён поток $\hat{f}$ на пространстве $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3) и найдено соответствующее ему поле скоростей $\{\vec{w}(x, y)\}_{(x,y) \in X \times Y}$.

В силу требований (1) и (2) в каждой точке $(x, y) \in X \times Y$ должны выполняться равенства

$$\vec{w}(x, y) = \alpha(x, y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y)$$

(коэффициент при $\vec{v}$ всегда равен единице). Из требования (3) следует, что коэффициент α не зависит от x, и значит,

$$\alpha : Y \to \mathbb{R} \tag{2.12}$$

есть некоторая функция от y, и

$$\vec{w}(x, y) = \alpha(y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y) \; . \tag{2.13}$$

Пусть мы стартуем из точки (x_0, y_0) и хотим найти в какой точке траектории $O_f(x_0)$ окажется в момент времени t проекция образа нашей начальной точки $\mathrm{pr}_x \circ \hat{f}(x_0, y_0, t)$.

Если бы функция α была константой, можно было бы написать

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f(x_0, \alpha t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \cdot 1\, ds\right) .$$

Однако в произвольный момент времени s параметр α равен $\alpha(y(s)) = \alpha \circ h(y_0, s)$, поэтому

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y_0, s)\, ds\right) .$$

Пусть теперь поток $\hat{f}$ не задан. Фиксируем "хорошую" интегрируемую функцию (2.12) и построим векторное поле (2.13), интегральные траектории которого задает поток

$$\begin{gathered} \hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y , \\ \hat{f}(x, y, t) = \left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y, s)\, ds\right),\ h(y, t)\right) . \end{gathered} \tag{2.14}$$

Лемма 2.8. *Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, f и h — непрерывные потоки на X и Y, соответственно.*

Пусть $\alpha : Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

Тогда формула (2.14) задает непрерывный поток $\hat{f}$ на $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3).

Доказательство. Покажем, что отображение $\hat{f}$ задает действие аддитивной группы вещественных чисел на пространстве $X \times Y$. Действительно, во-первых,

$$\hat{f}(x, y, 0) = (f(x, 0), h(y, 0)) = (x, y) ,$$

и во-вторых

$$\hat{f}(\hat{f}(x,y,t),\tau) = \hat{f}\left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t)\ ,\ \tau\right) =$$

$$= \left(f\left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ \int\limits_0^\tau \alpha\circ h(h(y,t),\rho)\,d\rho\right),\ h(h(y,t),\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds + \int\limits_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d\rho\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds + \int\limits_t^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int\limits_0^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \hat{f}(x,y,t+\tau)$$

для любых $x\in X$, $y\in Y$ и t, $\tau\in\mathbb{R}$.

В этой цепочке равенств мы воспользовались следующими обстоятельствами:

- f и h — потоки, т. е. для всех $x\in X$, $y\in Y$ и t, $\tau\in\mathbb{R}$ выполняются равенства $f(x,t+\tau) = f(f(x,t),\tau)$ и $h(y,t+\tau) = h(h(y,t),\tau)$.
- Функция $\alpha\circ h(y,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывна для любого фиксированного $y\in Y$, так как является композицией непрерывных отображений (напомним, что отображение α непрерывно по условию). Следовательно, интеграл $\int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds$ существует при любых $y\in Y$ и $t\in\mathbb{R}$.
- После замены $s=t+\rho$ получаем $\int_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d\rho = \int_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d(t+\rho) = \int_t^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds$.

Заметим, что справедливость требований (1)–(3) вытекает непосредственно из формулы (2.14).

При каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ отображение

$$\hat{f}_t = \hat{f}(\cdot,\cdot,t) : X\times Y \to X\times Y$$

является биекцией. Действительно, как показано выше, существует обратное отображение $(\hat{f}_t)^{-1} = \hat{f}_{-t}$. Таким образом, для завершения доказательства нам остается проверить непрерывность отображения $\hat{f}$.

Предположим сначала, что отображение

$$\begin{gathered}\varphi : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \\ \varphi : (y,t) \mapsto \int\limits_0^t \alpha \circ h(y,s)\,ds\,, \quad (y,t) \in Y \times \mathbb{R}\,,\end{gathered} \tag{2.15}$$

непрерывно.

Пусть $Q \subseteq X \times Y$ — открытое множество, содержащее точку $\hat{f}(x,y,t)$. Найдем открытые множества $Q_X \subseteq X$ и $Q_Y \subseteq Y$ такие, что $\hat{f}(x,y,t) = (f(x,\varphi(y,t)), h(y,t)) \in Q_X \times Q_Y \subseteq Q$.

Так как отображение h непрерывно, найдутся открытые множества $V_1 \subseteq Y$ и $W_1 \subseteq \mathbb{R}$ такие, что $(y,t) \in V_1 \times W_1 \subseteq Y \times \mathbb{R}$ и $h(V_1 \times W_1) \subseteq Q_Y$. Аналогично, существуют открытые множества $U \subseteq X$ и $W_2 \subseteq \mathbb{R}$, для которых $(x,\varphi(y,t)) \in U \times W_2 \subseteq X \times \mathbb{R}$ и $f(U \times W_2) \subseteq Q_X$. Наконец, найдем открытые множества $V_2 \subseteq Y$ и $W_3 \subseteq \mathbb{R}$ такие что $(y,t) \in V_2 \times W_3$ и $\varphi(V_2 \times W_3) \subseteq W_2$.

Обозначим $V = V_1 \cap V_2 \subseteq Y$ и $W = W_1 \cap W_3 \subseteq \mathbb{R}$. Заметим, что V и W — непустые открытые множества, так как $y \in V$ и $t \in W$ по построению. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\hat{f}(U \times V \times W) &= f(U, \varphi(V \times W)) \times h(V \times W) \subseteq \\ &\subseteq f(U, \varphi(V_2 \times W_3)) \times h(V_1 \times W_1) \subseteq \\ &\subseteq f(U, W_2) \times Q_Y \subseteq Q_X \times Q_Y \subseteq Q\,.\end{aligned}$$

Так как точка $(x,y,t) \in X \times Y \times \mathbb{R}$ и открытое множество $Q \ni \hat{f}(x,y,t)$ произвольны, то отображение $\hat{f}$ непрерывно.

Следовательно, из непрерывности отображения (2.15) вытекает непрерывность $\hat{f}$.

Докажем непрерывность отображения φ.

Пусть $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Заметим, что

$$|\varphi(z,\tau)-\varphi(y,t)| = \left|\int\limits_0^\tau \alpha\circ h(z,s)\,ds - \int\limits_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^t (\alpha\circ h(z,s)-\alpha\circ h(y,s))\,ds\right| + \left|\int\limits_t^\tau \alpha\circ h(z,s)\,ds\right| =$$

$$= |\varphi(z,t)-\varphi(y,t)| + \left|\int\limits_t^\tau \alpha\circ h(z,s)\,ds\right| .$$

Функция $\alpha\circ h : Y\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна, и значит найдутся такие открытое множество $V'\subseteq Y$ и $\delta'>0$, что $y\in V'$ и

$$\alpha\circ h(V'\times(t-\delta',t+\delta'))\subseteq(\alpha\circ h(y,t)-\varepsilon/2,\alpha\circ h(y,t)+\varepsilon/2) .$$

Обозначим $M=\max\{|\alpha\circ h(y,t)-\varepsilon/2|,|\alpha\circ h(y,t)+\varepsilon/2|\}$. Ясно, что $M>0$. Пусть, кроме того, $\delta=\min\{\delta',\varepsilon/(2M)\}$. Тогда для любого $(z,\tau)\in V'\times(t-\delta,t+\delta)$ имеем

$$\left|\int\limits_t^\tau \alpha\circ h(z,s)\,ds\right| \le \left|\int\limits_t^\tau |\alpha\circ h(z,s)|\,ds\right| =$$

$$= \left|\int\limits_t^\tau M\,ds\right| \le |\tau-t|M \le \delta M \le \varepsilon/2 .$$

Таким образом, при $t=0$ получим, что при любом $(z,\tau)\in$ $\in V'\times(-\delta,\delta)$ выполняются неравенства

$$|\varphi(z,\tau)-\varphi(y,0)| \le |\varphi(z,0)-\varphi(y,0)|+$$

$$+\left|\int\limits_0^\tau \alpha\circ h(z,s)\,ds\right| = 0+\varepsilon/2<\varepsilon .$$

Из произвольности выбора ε следует, что для любого $y\in Y$ функция φ непрерывна в точке $(y,0)\in Y\times\mathbb{R}$.

Пусть теперь $t\neq 0$. Снова из непрерывности функции $\alpha\circ$ $\circ h : Y\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ следует, что для любого $s\in[0,t]$ существуют открытое множество $V_s\subseteq Y$ и $\delta_s>0$ такие, что $y\in V_s$ и

$$\alpha\circ h(V_s\times(s-\delta_s,s+\delta_s))\subseteq(\alpha\circ h(y,s)-\varepsilon/(4t),\alpha\circ h(y,s)+\varepsilon/(4t)) .$$

Обозначим $W_s=(s-\delta_s,s+\delta_s)\subseteq\mathbb{R}$, $s\in[0,t]$.

Множество $\{y\} \times [0,t] \subseteq Y \times \mathbb{R}$ является компактом как образ компакта $[0,t]$ в хаусдорфовом пространстве $Y \times \mathbb{R}$ (напомним, что пространство Y хаусдорфово по условию). Значит, найдется конечный набор значений $s_1, \dots, s_n$ такой, что $[0,t] = \bigcup_{i=1}^n W_{s_i}$. Далее для простоты будем обозначать $W_i = W_{s_i}$ и $V_i = V_{s_i}$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим еще $V'' = \bigcap_{i=1}^n V_i$.

Пусть $z \in V''$. Для каждого $s \in [0,t]$ найдется $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $s \in W_i$. Тогда $V'' \times \{s\} \subseteq V_i \times W_i$ из чего вытекает оценка

$$\begin{aligned}&|\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)| \leq \\ &\quad \leq |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s_i)| + |\alpha \circ h(y,s_i) - \alpha \circ h(y,s)| < \\ &\qquad < \varepsilon/(4t) + \varepsilon/(4t) = \varepsilon/(2t) \ .\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&|\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| \leq \left| \int_0^t (\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s))\, ds \right| \leq \\ &\quad \leq \left| \int_0^t |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)|\, ds \right| < \left| \int_0^t \varepsilon/(2t)\, ds \right| = \varepsilon/2 \ .\end{aligned}$$

Обозначим $V = V' \cap V''$. Открытое множество V не пусто, так как $y \in V$. Тогда для любого $(z,\tau) \in V \times (t-\delta, t+\delta)$ получим оценку

$$\begin{aligned}&|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,t)| \leq |\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| + \left| \int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds \right| < \\ &\qquad < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(V \times (t-\delta, t+\delta)) \subseteq (\varphi(y,t) - \varepsilon, \varphi(y,t) + \varepsilon) \ .$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, то отображение φ непрерывно в каждой точке $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$. $\Box$

Замечание 2.9. *Смысл параметра $\alpha(y,t)$ можно описать словами: при малых $t \in \mathbb{R}$ отображение*

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(\cdot, y, \cdot) : X \times \mathbb{R} \to X$$

ведет себя так, как поток f_α, $f_\alpha(x,t) = f(x,\alpha t)$, $\alpha = \alpha(y,0)$.

2.2.4. *Шаг индукции. Поток* f_n *на пространстве* M_n. Будем считать, что на пространстве M_{n-1} уже задан непрерывный поток (M_{n-1}, f_{n-1}), удовлетворяющий требованиям $(1')$–$(5')$.

Рассмотрим пространство $(M_{n-1}) \times I$ и функцию

$$\alpha : I \to \mathbb{R}\ ,$$
$$\alpha(y) = 1 - 2y\ , \quad y \in I\ .$$

Воспользуемся леммой 2.8 и построим по динамическим системам (M_{n-1}, f_{n-1}), (I,h) (см. равенство 2.10) и функции α поток

$$\widehat{f}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I\ ,$$
$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(x,y,t) &= \left(f_{n-1}\left(x, \int\limits_0^t (1 - 2h(y,s)ds) \right)\ , h(y,t) \right) = \\ &= \left(f_{n-1}\left(x, t - 2\int\limits_0^t h(y,s)ds \right)\ , h(y,t) \right)\ , \end{aligned} \tag{2.16}$$
$$(x,y,t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R}\ .$$

Так как 0 и 1 — неподвижные точки динамической системы (I,h), то

$$\widehat{f}_n(x,0,t) = (f_{n-1}(x,t),0)\ , \tag{2.17}$$
$$\widehat{f}_n(x,1,t) = (f_{n-1}(x,-t),1) = (f_{n-1}^-(x,t),1)\ .$$

Напомним (см. раздел 2.1), что $M_n = (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n$ и разбиение $\mathfrak{f}_n$ задается при помощи формулы (2.7). Кроме того (см. предложение 2.2 и замечание 2.7), имеется канонический гомеоморфизм

$$\Psi : (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_\mathbb{R}) \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n \times \mathbb{R} = M_n \times \mathbb{R}\ .$$

Здесь $\mathfrak{i}_\mathbb{R}$ — разбиение прямой $\mathbb{R}$ на одноточечные множества.

Рассмотрим проекции

$$\widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_\mathbb{R})\ ,$$
$$\pi_n = \Psi \circ \widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_n \times \mathbb{R}\ ,$$
$$\mathrm{pr}_n : M_{n-1} \times I \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n = M_n\ .$$

Проверим, что отображение $\widehat{f}_n$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer}\pi_n = \mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$. Для этого нам достаточно проверить, что для любых $x \in M_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$ пара точек $\{\,(x,1,t)\,,\,(T_{n-1}(x),0,t)\,\}$ переходит под действием $\widehat{f}_n$ в какой-нибудь элемент разбиения $\mathfrak{f}_n$ (инволюция T_{n-1} определена в разделе 2.1).

Справедливы равенства (см. соотношения 2.17)

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) &= (f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}\circ T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t)),0)\ .\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что T_{n-1} — инволюция ($T_{n-1}^2 = \mathrm{Id}$). Обозначим $x' = T_{n-1}(x)$ (очевидно $x = T_{n-1}\circ T_{n-1}(x) = T_{n-1}(x')$). Тогда

$$\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) = (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)),0)\ .$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(x,1,t) &= (f_{n-1}(x,-t),1) = (f^-_{n-1}(x,t),1) = \\ &= (f^-_{n-1}(T_{n-1}(x'),t),1) = (T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t),1)\ .\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из условия ($4'$). Обозначим $\widehat{x} = T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(T_{n-1}(x),0,t) &= (T_{n-1}(\widehat{x}),0)\ ,\\ \widehat{f}_n(x,1,t) &= (\widehat{x},1)\ .\end{aligned}$$

Из произвольности выбора точек $x \in M_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$ заключаем, что отображение $\widehat{f}_n$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer}\pi_n$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$, следовательно, корректно определено непрерывное фактор-отображение

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n\ ,$$

которое замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M_n \times I \times \mathbb{R} \arrow[r, "\widehat{f}_n"] \arrow[d, "\pi_n"'] & M_n \times I \arrow[d, "\mathrm{pr}_n"] \\ M_n \times \mathbb{R} \arrow[r, "f_n"] & M_n \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

Утверждение 2.10. *Для каждого* $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n(x,t) \ .$$

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что

$$\pi_n = \mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \ , \tag{2.19}$$

Поэтому

$$\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n \circ \pi_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = \\ = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)), t) = f_n(x,t)$$

для любого $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$. $\square$

Применяя это утверждение, установим групповые свойства отображения f_n. Пусть $x \in M_n$. Тогда

$$f_n(x,0) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), 0) = \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = x \ ,$$

значит, $f_n(\cdot, 0) = \mathrm{Id} : M_n \to M_n$.

Пусть, кроме того, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Справедливы равенства

$$f_n(f_n(x,t),\tau) = f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) = \\ = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) = \\ = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t+\tau) = f_n(x, t+\tau) \ .$$

Итак, из того, что $\widehat{f}_n$ является потоком, следует, что f_n является непрерывным потоком с фазовым пространством M_n.

Проверим, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойствам $(1')$ – $(5')$ (см. начало раздела 2.2).

Для проверки требования $(1')$ покажем сначала, что

$$\widehat{\jmath}_{n-1} \circ f_{n-1} = \widehat{f}_n \circ (\widehat{\jmath}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ . \tag{2.20}$$

Напомним, что отображение $\widehat{j}_{n-1} : M_{n-1} \to M_{n-1} \times I$ задается формулой $\widehat{j}_{n-1}(y) = (y, 0)$, $y \in M_{n-1}$ (см. раздел 2.1).

Пусть $y \in M_{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y,t) = (f_{n-1}(y,t), 0) \ .$$

С другой стороны, из соотношения (2.17) получим

$$\widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(y,t) = \widehat{f}_n(y,0,t) = \\ = (f_{n-1}(y,t), 0) = \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y,t) \ .$$

Вспомним теперь, что по определению $j_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}$. Это вместе с формулой (2.20) приводит нас к цепочке равенств

$$j_{n-1} \circ f_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ = f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ = f_n \circ ((\mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ .$$

И значит, f_n удовлетворяет требованию $(1')$.

Приступим к проверке свойства $(2')$.

Согласно предложению 2.1 пространство M_{n-1} — компакт, и отображение $j_{n-1} : M_{n-1} \to M_n$ — вложение. Из этого замечания и свойства $(1')$ заключаем, что $j_{n-1}(M_{n-1})$ — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M_n, f_n), и потоки (M_{n-1}, f_{n-1}) и $(j_{n-1}(M_{n-1}), f_n|_{j_{n-1}(M_{n-1})})$ топологически сопряжены. Поэтому для каждой точки $x \in M_{n-1}$ справедливо следующее утверждение: α-предельное (ω-предельное) множество точки $j_{n-1}(x)$ относительно потока f_n совпадает с образом α-предельного (ω-предельного) множества точки x относительно потока f_{n-1} под действием j_{n-1}. Следовательно,

$$\mathrm{Rec}\, f_n \cap j_{n-1}(M_{n-1}) = j_{n-1}(\mathrm{Rec}\, f_{n-1}) = \\ = j_{n-1}(j_{n-2} \circ \ldots \circ j_1(a)) = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a) \ .$$

Для завершения проверки на выполнимость свойства $(2')$ докажем, что каждая точка множества $U_n = M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$ является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Мы уже установили, что U_n — открытое подмножество пространства M_n.

По построению, $j_{n-1}(M_{n-1}) = \mathrm{pr}_n(M_{n-1} \times \{0\})$, поэтому $\mathrm{pr}_n^{-1}(j_{n-1}(M_{n-1})) = M_n \times \{0,1\}$ и

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(U_n) = \mathrm{pr}_n^{-1}(M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})) = M_{n-1} \times (0,1) = \widehat{U}_n \ .$$

Заметим, что проекция pr_n взаимно-однозначно отображает открытое подмножество $\widehat{U}_n$ пространства $M_{n-1} \times I$ на открытое подмножество U_n пространства M_n. Так как, по определению отображения проекции, открытые множества в образе — это в точности те множества, полный прообраз которых открыт, то отображение $\widehat{\mathrm{pr}}_n = \mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n} : \widehat{U}_n \to U_n$ открыто и является гомеоморфизмом.

Пусть $x \in U_n$, $\widehat{x} = \mathrm{pr}_n^{-1}(x) \in \widehat{U}_n$. Тогда $\widehat{x} = (y, \tau)$, $y \in M_{n-1}$, $\tau \in (0,1)$. Фиксируем $a, b \in (0,1)$ так, чтобы

$$0 < a < \tau < b < 1 \ .$$

Множество $\widehat{V}_{a,b} = M_{n-1} \times (a,b)$ является открытой окрестностью точки $\widehat{x}$ в пространстве $M_{n-1} \times I$.

Найдем теперь такое $T > 0$, чтобы $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (0,a)$ при всех $t < -T$ и $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (b,1)$ — при всех $t > T$.

Пусть $\mathrm{pr}_I : M_{n-1} \times I \to I$ — проекция на второй сомножитель. Тогда по построению

$$\mathrm{pr}_I \circ \widehat{f}_n = h \circ (\mathrm{pr}_I \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to I$$

(см. лемму 2.8). Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times h((a,b), t)$ и нам достаточно найти такое $T > 0$, что $h((a,b),t) \subseteq (0,a)$ при любом $t < -T$, и $h((a,b),t) \subseteq$ $\subseteq (b,1)$ для всех $t > T$.

Найдем сначала такое $t_\alpha \in \mathbb{R}$, что $h(b, t_\alpha) < a$.

Предположим, что

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) = h(b, t_\alpha) < a \ ,$$

то есть

$$\operatorname{arc\,tg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) < \pi(a - \tfrac{1}{2}) \ .$$

Так как по условию $a \in (0,1)$, то обе части неравенства лежат в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. В этом интервале функция tg определена и монотонно возрастает. Поэтому последнее неравенство равносильно такому:

$$t_\alpha + \mathrm{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) < \mathrm{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2}))\ .$$

Значит, неравенство $h(b, t_\alpha) < a$ эквивалентно следующему:

$$t_\alpha < \left[\mathrm{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2})) - \mathrm{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))\right]\ .$$

Аналогично устанавливается эквивалентность неравенств $b < h(a, t_\omega)$ и

$$\left[\mathrm{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) - \mathrm{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2}))\right] < t_\omega\ .$$

Заметим, что функция $h(\cdot, t) : I \to I$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ монотонно возрастает. Поэтому, $h((a, b), t) \subseteq \subseteq (0, a)$, если $t < -T$, и $h((a, b), t) \subseteq (b, 1)$, если $t > T$, где

$$T = \left|\mathrm{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) - \mathrm{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2}))\right|\ .$$

Из этого вытекает, что $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \cap \widehat{V}_{a,b} = \varnothing$, если $t \notin [-T, T]$.

Множество $\widehat{U}_n$ является инвариантным подмножеством потока $\widehat{f}_n$, поэтому $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq \widehat{U}_n$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b})$. Тогда множество $V_{a,b}$ является открытой окрестностью точки $x = \mathrm{pr}_n(\widehat{x})$, так как отображение $\widehat{\mathrm{pr}}_n = = \mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ открыто (см. выше); кроме того, для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f_n(V_{a,b}, t) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t)$. Напомним, что отображение $\mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ взаимно-однозначно, поэтому

$$f_n(V_{a,b}, t) \cap V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t)) \cap \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b}) = \\ = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \cap \widehat{V}_{a,b}) = \varnothing$$

при $t \notin [-T, T]$ и точка x является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Из произвольности выбора точки $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$ заключаем, что $M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq W(f_n)$, и требование $(2')$ выполнено.

Приступим к проверке требования $(3')$.

Заметим сначала, что если свойство $(3')$ выполняется в какой-нибудь точке $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$, то этому свойству удовлетворяют и все точки траектории $O_{f_n}(x) \subseteq j_{n-1}(M_{n-1})$. Действительно, пусть $x' \in O_{f_n}(x)$. Тогда $x' = f_n(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Пусть $V' \ni x'$ — открытая окрестность точки x'. Тогда $V = f_n(V', -\tau)$ — открытая окрестность точки x (напомним, что из определения потока следует, что отображение $f_n(\cdot, t) : M_n \to M_n$ является гомеоморфизмом при каждом $t \in \mathbb{R}$). Существует $T = T(V) > 0$ такое, что $f_n(V, t) \cap V \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Значит,

$$\begin{aligned} f_n(V', t) \cap V' = f_n(f_n(V, \tau), t) \cap f_n(V, \tau) = \\ f_n(V, \tau + t) \cap f_n(V, \tau) = f_n(f_n(V, t), \tau) \cap f_n(V, \tau) \supseteq \\ \supseteq f_n(f_n(V, t) \cap V, \tau) \neq \varnothing \end{aligned}$$

при $t > T$.

Докажем, что каждая траектория потока (M_{n-1}, f_{n-1}) содержит неподвижную точку инволюции T_{n-1}. Действительно, пусть $x \in M_{n-1}$. Из свойства $(5')$ для потока (M_{n-1}, f_{n-1}) вытекает, что $T_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Обозначим $x' = f_{n-1}(x, \tau/2)$. Воспользуемся свойством $(4')$ для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и тогда получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x') = T_{n-1} \circ f_{n-1}(x, \tau/2) = f_{n-1}(T_{n-1}(x), -\tau/2) = \\ = f_{n-1}(f_{n-1}(x, \tau), -\tau/2) = f_{n-1}(x, \tau/2) = x' . \end{aligned}$$

Итак, из свойства $(1')$ (которое мы уже проверили) и из сказанного выше следует, что нам достаточно установить свойство $(3')$ только для тех точек из $j_{n-1}(M_{n-1})$, которые являются образами под действием j_{n-1} неподвижных точек инволюции T_{n-1}.

Пусть $x_0 \in j_{n-1}(M_{n-1})$, $z_0 = j_{n-1}^{-1}(x_0) \in M_{n-1}$ и пусть $T_{n-1}(z_0) = z_0$. Тогда

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(T_{n-1}(z_0), 0), (z_0, 1)\} = \{(z_0, 0), (z_0, 1)\} \subseteq M_{n-1} \times I .$$

Для того, чтобы проверить справедливость свойства $(3')$ в точке x_0, нам достаточно доказать, что для каждой окрестности W множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ существует $T = T(W)$

такое, что $\widehat{f}_n(W,t) \cap W \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Действительно, если мы это установим, то отсюда будет вытекать, что для любой окрестности V точки $x_0 \in M_n$ найдется $T > 0$ такое, что $\mathrm{pr}_n^{-1}(V) \cap \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V),t) \neq \varnothing$ для любого $t > T$. Следовательно (см. соотношения (2.18) и (2.19)),

$$\begin{aligned} f_n(V,t) \cap V = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)),t) \cap V = \\ = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V),t) \cap \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)) \supseteq \\ \supseteq \mathrm{pr}_n \left[\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V),t) \cap \mathrm{pr}_n^{-1}(V) \right] \neq \varnothing \end{aligned}$$

для всех $t > T$.

Для доказательства свойство $(3')$ для множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.11. *Пусть $(x,y) \in M_{n-1} \times (0,1)$. Тогда за время*

$$\tau = 2\,\mathrm{tg}(\pi(1/2 - y)) \tag{2.21}$$

точка (x,y) сместится под действием потока $\widehat{f}_n$ в точку $(x, 1-y)$, то есть

$$\widehat{f}_n((x,y),\tau) = (x, 1-y)\ . \tag{2.22}$$

Доказательство. Как показывает формула (2.16), соотношение (2.22) справедливо, если одновременно выполняются два следующих равенства:

$$h(y,\tau) = 1 - y\ , \tag{2.23}$$

$$\int_0^\tau (1 - 2h(y,s))ds = 0\ . \tag{2.24}$$

Простая непосредственная проверка показывает, что формула (2.21) дает решение уравнения

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(\tau + \mathrm{tg}(\pi(y - \tfrac{1}{2}))) = 1 - y\ ,$$

которое эквивалентно уравнению (2.23), так как по условию леммы $y \in (0,1)$.

Покажем, что полученное решение удовлетворяет равенству (2.24).

Сначала заметим, что согласно равенству (2.11)

$$1 - y = h(y, \tau) = 1 - h(1 - y, -\tau) ,$$

поэтому $h(1-y,-\tau) = y$. Далее,

$$h(y, \tau - s) = 1 - h(1 - y, -\tau + s) = 1 - h(h(1 - y, -\tau), s) = 1 - h(y, s)$$

для каждого $s \in \mathbb{R}$. Значит

$$\int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y, s))ds = \int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2 + 2h(y, \tau - s))ds =$$

$$= - \int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y, \tau - s))ds =$$

$$= - \int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y, u))d(\tau - u) = - \int\limits_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y, u))du .$$

Здесь осуществлена замена параметра $u = \tau - s$.

Окончательно,

$$\int\limits_{0}^{\tau}(1 - 2h(y, s))ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y, s))ds + \int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y, s))ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y, s))ds - \int\limits_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y, u))du = 0 .$$

Лемма полностью доказана. □

Итак, пусть W — открытая окрестность множества

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(z_0, 0), (z_0, 1)\}$$

в пространстве $M_{n-1} \times I$.

Так как произведения открытых множеств составляют базу топологии пространства-произведения, то найдутся такие $\delta > 0$ и открытое $V \subseteq M_{n-1}$, что $V \times ([0, \delta) \cup (1 - \delta, 1]) \subseteq W$. Для нас здесь важно то, что

$$\{z_0\} \times ((0, \delta) \cup (1 - \delta, 1)) \subseteq W .$$

Далее мы будем считать, что $\delta < 1/2$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}\xi : \mathbb{R} \to I \ , \\ \xi(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{t}{2} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \end{gathered} \tag{2.25}$$

Функция ξ непрерывна, монотонно убывает и $\xi(t) \to +0$ при $t \to +\infty$.

Легко видеть, что эта функция подобрана так (см. лемму 2.11 выше), чтобы для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\widehat{f}_n((z, \xi(t)), t) = (z, 1 - \xi(t)) \ , \quad z \in M_{n-1} \ .$$

Пусть $T = 2 \operatorname{tg}(\pi(1/2 - \delta))$. Тогда $\xi(T) = \delta$. Так как функция ξ монотонно убывает, то для каждого $t > T$ выполняется неравенство $\xi(t) \in (0, \delta)$. Следовательно,

$$\widehat{f}_n((z_0, \xi(t)), t) = (z_0, 1 - \xi(t)) \in \{z_0\} \times (1 - \delta, 1) \subseteq W \ ,$$

и $\widehat{f}_n(W, t) \cap W \neq \varnothing$.

В силу произвольности выбора окрестности W, свойство $(3')$ выполняется в точке x_0.

Значит, доказано, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойству $(3')$.

Пусть

$$\begin{gathered}\widehat{f}_n^{-} : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I \ , \\ \widehat{f}_n^{-}(z, y, t) = \widehat{f}_n(z, y, -t) \ , \quad (z, y, t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \ .\end{gathered}$$

Перед тем, как доказывать, что свойство $(4')$ выполнено, проверим равенство

$$\widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n = \widehat{f}_n^{-} \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ .$$

Для этого заметим, что производя замену параметра $u = -s$, получаем

$$\int\limits_0^{-t}(1-2h(1-y,s))ds = \int\limits_0^{-t}(1-2h(1-y,-u))d(-u) =$$
$$= -\int\limits_0^{t}(1-2h(1-y,-u))du = -\int\limits_0^{t}(1-2+2h(y,u))du =$$
$$= \int\limits_0^{t}(1-2h(y,u))du$$

для всех $y \in I$ и $t \in \mathbb{R}$. Это следует из равенства (2.11).

Пусть теперь $z \in M_{n-1}$, $y \in I$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(z,y,t) = \widehat{T}_n\left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^{t}(1-2h(y,s))ds\right), h(y,t)\right) =$$
$$= \left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^{t}(1-2h(y,s))ds\right), 1-h(y,t)\right) =$$
$$= \left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^{-t}(1-2h(1-y,s))ds\right), h(1-y,-t)\right) =$$
$$= \widehat{f}_n(z,1-y,-t) = \widehat{f}_n^{-}(z,1-y,t) =$$
$$= \widehat{f}_n^{-} \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(z,y,t)\ .$$

Пусть, наконец, $x \in M_n$ и $t \in \mathbb{R}$. Используя коммутативную диаграмму (2.18) и следующее за ней утверждение 2.10, получим цепочку равенств

$$T_n \circ f_n(x,t) = T_n \circ \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) =$$
$$= pr_n \circ \widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) = pr_n \circ \widehat{f}_n^{-} \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) =$$
$$= pr_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) = f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) =$$
$$= f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) = f_n(T_n(x),-t) =$$
$$= f_n^{-} \circ (T_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(x,t)\ .$$

Из произвольности выбора точки $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ заключаем, что свойство $(4')$ выполнено.

Приступим к проверке свойства $(5')$ для потока (M_n, f_n).

Пусть сначала $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Из свойства $(1')$ заключаем, что

$$O_{f_n}(x) = j_{n-1}\left(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))\right) .$$

Используем коммутативную диаграмму 2.9 и тот факт, что свойство $(5')$ справедливо для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и получаем цепочку равенств

$$\begin{gathered} T_n(O_{f_n}(x)) = T_n \circ j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1} \circ T_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = O_{f_n}(x) . \end{gathered}$$

Пусть теперь $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$. Тогда $\mathrm{pr}_n^{-1}(x) = (z, y)$ для некоторых $z \in M_{n-1}$ и $y \in (0,1)$. Как следует из свойства $(4')$, которое мы уже проверили, потоки (M_n, f_n) и (M_n, f_n^-) топологически сопряжены посредством инволюции T_n. Эти потоки имеют одинаковые траектории, поэтому инволюция T_n отображает траектории потока f_n на целые траектории этого же потока. Таким образом, для завершения доказательства нам осталось только проверить, что $T_n(x) \in O_{f_n}(x)$.

Из леммы 2.11 вытекает, что

$$(z, 1-y) = \widehat{T}_n(z, y) \in O_{\widehat{f}_n}(z, y) .$$

Однако из формул (2.18) и (2.19) следует, что поток (M_n, f_n) является фактор-системой потока $(M_{n-1} \times I, \widehat{f}_n)$, поэтому

$$O_{f_n}(x) = O_{f_n}(\mathrm{pr}_n(z, y)) = \mathrm{pr}_n\left(O_{\widehat{f}_n}(z, y)\right) .$$

И значит,

$$\begin{gathered} T_n(x) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(z, y) = \\ = \mathrm{pr}_n(z, 1-y) \in \mathrm{pr}_n(O_{\widehat{f}_n}(z, y)) = O_{f_n}(x) . \end{gathered}$$

Таким образом, полностью доказана справедливость свойства $(5')$ для потока (M_n, f_n).

2.2.5. *Последовательность* $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Итак, по индукции построено семейство потоков (M_n, f_n), $n \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют требованиям $(1')$–$(5')$ (см. начало раздела 2.2).

Рассмотрим семейство отображений

$$F_n = f_n(\cdot\,, 1) : M_n \to M_n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Так как все f_n — непрерывные потоки, то все отображения F_n являются гомеоморфизмами ($F_n^{-1} = f_n(\cdot\,, -1)$, $n \in \mathbb{N}$).

Убедимся, что все отображения F_n удовлетворяют требованиям (1)–(3) (см. начало раздела 2.2).

(1) Пусть $n > 1$ и $x \in M_{n-1}$. Тогда из свойства ($1'$) получаем

$$j_{n-1} \circ F_{n-1}(x) = j_{n-1} \circ f_{n-1}(x, 1) = f_n(j_{n-1}(x), 1) = F_n \circ j_{n-1}(x) \ ,$$

и так как x — произвольная точка, то свойство (1) выполнено.

(2) Заметим, что для любого $x \in M_n$ имеет место неравенство

$$O_{F_n}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_n(x, k) \subseteq O_{f_n}(x) \ ,$$

поэтому $\alpha_{F_n}(x) \subseteq \alpha_{f_n}(x)$ и $\omega_{F_n}(x) \subseteq \omega_{f_n}(x)$. Отсюда немедленно следует, что

$$\mathrm{Rec}(F_n) \subseteq \mathrm{Rec}(f_n) \ .$$

С другой стороны, так как M_n — компактное хаусдорфово топологическое пространство, то по теореме Биркгофа динамическая система (M_n, F_n) имеет по крайней мере одно непустое минимальное множество. Значит, $\mathrm{Rec}(F_n) \neq \varnothing$.

Так как согласно свойству ($2'$) мощность множества $\mathrm{Rec}(f_n)$ равна единице, то

$$\mathrm{Rec}(F_n) = \mathrm{Rec}(f_n) = \{a_n\} = \{j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)\} \ .$$

Кроме того, очевидно, $\{a_n\} = \mathrm{Fix}(f_n) \subseteq \mathrm{Fix}(F_n) \subseteq \mathrm{Rec}(F_n)$, поэтому $\mathrm{Fix}(F_n) = \{a_n\}$.

(3) Пусть $n > 1$ и $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Пусть $U \subseteq M_n$ — открытая окрестность точки x. Согласно свойству ($3'$) существует $T > 0$ такое, что $f_n(U, t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Найдем $N > T$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$F_n^k(U) \cap U = f_n(U, k) \cap U \neq \varnothing$$

для каждого $k > N$ и $x \in \Omega(F_n)$, так как окрестность $U \ni x$ выбрана произвольно.

Значит, $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$.

2.2.6. *Автоморфизм F пространства M.* Далее будем рассматривать пространство M как объединение подпространств M_n, $n \in \mathbb{N}$. В частности, в последующих выкладках будем опускать отображения вложения j_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность автоморфизмов, построенная в предыдущем подразделе. Из свойства (1) (см. начало раздела 2.2) следует, что отображение

$$F = \varinjlim F_n : M \to M \ , \\ F(x) = F_n(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ ,$$

определено корректно. И так как все отображения F_n обратимы, то и F — обратимое отображение . Обратное отображение задается формулой

$$F^{-1} = \varinjlim F_n^{-1} : M \to M \ , \\ F^{-1}(x) = F_n^{-1}(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ .$$

Непрерывность отображений F и F^{-1} следует непосредственно из их определения.

Итак, мы построили автоморфизм F пространства M.

Найдем теперь множество неблуждающих точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. Тогда $x \in \Omega(F_{n+1})$ согласно условию (3). Следовательно, $x \in \Omega(F)$ (см. наблюдение в начале доказательства леммы 1.1). Так как по определению для любого $x \in M$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in M_n$, то $M = \Omega(F)$.

Подсчитаем теперь множество реккурентных точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. По построению M_n — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M, F), поэтому $\overline{O_F(x)} = \overline{O_{F_n}(x)} \subseteq M_n$, и точка x является α-реккурентной (ω-реккурентной) точкой динамической системы (M, F) тогда и только тогда, когда она лежит в множестве α-реккурентных (ω-реккурентных) точек динамической системы $(M_n, F_n) = (M_n, F|_{M_n})$.

Из свойства (2) теперь следует, что если $x \in \mathrm{Rec}(F)$, то $x = a$.

Итак построен пример динамической системы (M, F) на бесконечномерном неполном пространстве M. Она удовлетворяет одновременно следующим свойствам:

(i) $M = \Omega(F)$;

(ii) $\mathrm{Rec}(F) = \mathrm{Per}(F) = \{pt\}$.

Литература

[1] *Akin E., Hurley M, Kennedy J.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms. // Memoirs of the A.M.S. – 2003. – **164**, No. 783.

[2] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, –1977. –368с.

[3] *Birkhoff G.* Dynamical systems // Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI. – 1927.

[4] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index // CBMS Reg. Reg. Conf. Ser. in Math. AMS, Providence. – 1978. – **38**.

[5] *Coven E., Nitecki Z.* Nonwandering sets of the powers of maps of the interval // Ergodic Theory & Dynamical Systems. – 1981. – **1**. – P. 9-31.

[6] *Gottschalk, W. H.* Powers of homeomorphisms with almost periodic properties // Bull. Amer. Math. Soc. – 1944. – **50**. – P. 222-227.

[7] *John L. Kelley* General topology. — D. Van Nostrand Company, Inc., – 1957.

[8] *Kuratowski K.* Topology, V. 1. — Academic press, – 1966.

[9] *K. Kuratowski and A. Mostowski.* Set theory. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, – 1967.

[10] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии, геометрические главы. — М.: Наука, — 1977.

[11] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. – 768 с.

[12] *Savada K.* On the iterations of diffeomorphisms without C^0-Ω-explosions: an example // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**, No. 1 – P. 110-112.

[13] *Власенко, И. Ю., Максименко С. И.* Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий. — Киев, – 2004. – 62 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2004.8).

[14] *Сибирский, К. С.* Введение в топологическую динамику. — Кишинев: ШТИИНЦА, 1970. – 144 с.

Литература

[1] *Akin E., Hurley M, Kennedy J.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms. // Memoirs of the A.M.S. – 2003. – **164**, No. 783.

[2] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, –1977. –368с.

[3] *Birkhoff G.* Dynamical systems // Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI. – 1927.

[4] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index // CBMS Reg. Reg. Conf. Ser. in Math. AMS, Providence. – 1978. – **38**.

[5] *Coven E., Nitecki Z.* Nonwandering sets of the powers of maps of the interval // Ergodic Theory & Dynamical Systems. – 1981. – **1**. – P. 9-31.

[6] *Gottschalk, W. H.* Powers of homeomorphisms with almost periodic properties // Bull. Amer. Math. Soc. – 1944. – **50**. – P. 222-227.

[7] *John L. Kelley* General topology. — D. Van Nostrand Company, Inc., – 1957.

[8] *Kuratowski K.* Topology, V. 1. — Academic press, – 1966.

[9] *K. Kuratowski and A. Mostowski.* Set theory. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, – 1967.

[10] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии, геометрические главы. — М.: Наука, — 1977.

[11] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. – 768 с.

[12] *Savada K.* On the iterations of diffeomorphisms without C^0-Ω-explosions: an example // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**, No. 1 – P. 110-112.

[13] *Власенко, И. Ю., Максименко С. И.* Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий. — Киев, – 2004. – 62 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2004.8).

[14] *Сибирский, К. С.* Введение в топологическую динамику. — Кишинев: ШТИИНЦА, 1970. – 144 с.

Наукове видання

Власенко Ігор Юрійович
Полулях Євген Олександрович

ПРО ІТЕРАЦІЙНУ СТІЙКІСТЬ
ЦЕНТРУ БІРКГОФА
(Рос. мовою)

Комп'ютерний набір та верстка
І. Ю. Власенко, Є. О. Полулях

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 14.11.2005. Формат 60 × 84/16. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 4,25. Ум. друк арк. 4.0
Тираж 65 пр. Зам. 175.

Ін-т математики НАН України
01601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3