НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Препринт 2005.6

С. И. Максименко

Стабилизаторы и орбиты гладких функций

Киев — 2005

УДК
СТАБИЛИЗАТОРЫ И ОРБИТЫ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ
/ **С. И. Максименко** — Киев, 2005. — 60 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2005.6)

В работе изучается соотношение между правыми и лево-правыми стабилизаторами и орбитами гладких функций на компактном многообразии. Доказано, что при достаточно широких условиях на функции, соответствующие стабилизаторы гомотопически эквивалентны. То же самое верно и для орбит. Аналогичные результаты получены для отображений в окружность.

В даній роботі вивчається зв'язок між правими та ліво-правими стабілізаторами і орбітами гладких функцій на компактному многовиді. Доведено, що при достатньо широких умовах на функції, відповідні стабілізатори та орбіти гомотопічно еквівалентні. Те ж саме виконується і для відповідних орбіт. Аналогічні результати отримані для відображень в коло.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Пришляк А. О.

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

1. Введение.

Пусть M — гладкое (C^∞) связное компактное многообразие размерности m и P — либо числовая прямая $\mathbb{R}$, либо окружность S^1. Обозначим через $\mathcal{D}_M$ и $\mathcal{D}_P$ группы диффеоморфизмов этих многообразий. Имеются два естественных *левых* действия групп $\mathcal{D}_M$ и $\mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_P$ на $C^\infty(M,P)$ определяемые по формулам: если $f \in C^\infty(M,P)$, $h \in \mathcal{D}_M$ и $\phi \in \mathcal{D}_P$, то

$$h \cdot f = f \circ h^{-1} \tag{1.1}$$

$$(h,\phi) \cdot f = \phi \circ f \circ h^{-1}. \tag{1.2}$$

Эти действия также называют соответственно *правым* и *лево-правым*. Они изучались многими авторами, для ссылок см. напр. [1, 3].

Для каждого отображения $f \in C^\infty(M,P)$ обозначим через

$$\mathcal{S}_M(f) = \{h \in \mathcal{D}_M \mid f = f \circ h\}$$

его *правый* стабилизатор, т.е. стабилизатор относительно правого действия (1.1), и, через

$$\mathcal{O}_M(f) = \{f \circ h^{-1} \mid h \in \mathcal{D}_M\},$$

его *правую* орбиту.

Если $\mathcal{D}'_P \subset \mathcal{D}_P$ подгруппа, то можно определить лево-правое действие группы $\mathcal{D}_M \times \mathcal{D}'_P$ на $C^\infty(M,P)$ по формуле (1.2). Обозначим через

$$\mathcal{S}'_{MP}(f) = \{(h,\phi) \in \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}'_P \mid \phi \circ f = f \circ h\}$$

соответствующий *лево-правый* стабилизатор f, и, через

$$\mathcal{O}'_{MP}(f) = \{\phi \circ f \circ h^{-1} \mid (h,\phi) \in \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}'_P\},$$

его *лево-правую* орбиту. Ясно, что

$$\mathcal{S}_M(f) \equiv \mathcal{S}_M(f) \times \mathrm{id}_P \subset \mathcal{S}'_{MP}(f) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}'_{MP}(f).$$

В данной работе мы показываем, что для огромного класса отображений $f \in C^\infty(M,P)$ и некоторых естественных подгрупп $\mathcal{D}'_P \subset \mathcal{D}_P$ имеют место следующие гомотопические эквивалентности (в соответствующих C^∞-топологиях): $\mathcal{S}_M(f) \approx \mathcal{S}'_{MP}(f)$, $\mathcal{O}_M(f) \approx \mathcal{O}'_{M\mathbb{R}}(f)$ для $P=\mathbb{R}$ и $\mathcal{O}_M(f) \times S^1 \approx \mathcal{O}'_{MS^1}(f)$ для случая $P = S^1$. В действительности мы получим точные соотношения между топологическими (а не только гомотопическими) типами этих пространств.

1.1. **Условия на f.** Чтобы сформулировать полученные результаты, Теоремы 1.3 и 1.5, мы наложим следующие ограничения (V) и (J) на наши функции.

Скажем, что $f \in C^\infty(M, P)$ удовлетворяет условию (V), если

(V) f постоянна на каждой связной компоненте ∂M (хотя может принимать разные значения на разных компонентах) и имеет только конечное число *критических значений*.

Для каждой точки $z \in M$ обозначим через $C^\infty_z(M)$ алгебру ростков гладких функций в z. Если $f \in C^\infty_z(M)$, то пусть $\Delta(f, z)$ — его идеал *Якоби*, т.е. идеал в $C^\infty_z(M)$ порожденный ростками частных производных f в точке z. Легко видеть, что идеал $\Delta(f, z)$ не зависит от выбора локальных координат в окрестности z.

Определение 1.1.1. Свойство J(id). Пусть точка $z \in M$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — такое локальное представление отображения $f \in C^\infty(M, P)$ в окрестности z, что $f(z) = 0$. Скажем, что f обладает свойством J(id) в точке z, если росток данного локального представления f принадлежит своему идеалу Якоби $\Delta(f, z)$.

Свойство J(id) означает, что найдутся такие гладкие функции $H_1, \dots, H_m \in C^\infty_z(M)$, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x) H_i(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{1.3}$$

Отметим, что функции H_i определяют росток векторного поля

$$H = (H_1, \dots, H_m)$$

в окрестности z, поэтому (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$f(x) = H.f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^m \tag{1.4}$$

где $H.f$ обозначает производную f вдоль поля H.

Объяснение обозначения J(id) будет дано в разделе 3.1, см. Определение 3.1.1. Несложно проверить, что f обладает свойством J(id) в каждой своей *регулярной* точке, см. утверждение (i) Леммы 4.0.3.

(J) Скажем, что f удовлетворяет условию (J), если f обладает свойством J(id) в каждой своей *критической* точке.

Очевидно, что оба условия (V) и (J) инвариантны относительно лево-правых действий.

1.1.2. Предположим теперь, что $f \in C^{\infty}(M, P)$ удовлетворяет условию (V). Тогда множество *критических точек* f может быть бесконечным и некоторые из них могут лежать на границе ∂M.

Значения f на связных компонентах ∂M будем называть *граничными*, значения в критических точках — *критическими*, критические и граничные значения — *исключительными*, а прообразы исключительных значений — *исключительными* множествами уровня f. Из компактности M следует, что множество исключительных значений конечно.

Пусть n — общее количество исключительных значений f.

Если $n = 0$, то несложно видеть, что тогда M замкнуто, $P = S^1$ и $f : M \to S^1$ является локально тривиальным расслоением над S^1.

Предположим, что $n \geq 1$. Тогда в случае $P = S^1$ мы *всегда* будем рассматривать окружность S^1 как группу вычетов $\mathbb{R}$ по модулю n. Таким образом,

$$S^1 \ \equiv \ \mathbb{R}/n\mathbb{Z}, \qquad \text{а не} \qquad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \qquad \text{как обычно!}$$

Это предположение удобно тем, что в обоих случаях P мы теперь сможем считать, что множество $\{1, \dots, n\}$ является множеством исключительных значений f. Конечно, если $P = S^1$, то эти числа берутся по модулю n. В частности, $n \equiv 0$.

Определим теперь следующие группы. Если $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, то пусть

• $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$ — подгруппа в $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ состоящая из сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов с компактным носителем, которые оставляют инвариантным образ $f(M) = [1, n]$;

• $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e}$ — подгруппа в $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$ состоящая из диффеоморфизмов, которые, к тому же, оставляют неподвижным каждое исключительное значение $1, \ldots, n$ функции f;

• $\mathcal{D}_{M\mathbb{R}} = \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$.

Если $f \in C^{\infty}(M, S^1)$, то пусть

• $\mathcal{D}_{S^1}^{+}$ — группа всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S^1;

• $\mathcal{D}_{S^1}^{E}$ — подгруппа в $\mathcal{D}_{S^1}^{+}$ оставляющая инвариантным множество $\{1, \ldots n\}$ исключительных значений f. В случае $n = 0$ имеем $\mathcal{D}_{S^1}^{E} = \mathcal{D}_{S^1}^{+}$;

• $\mathcal{D}_{S^1}^{e}$ — (нормальная) подгруппа в $\mathcal{D}_{S^1}^{E}$ оставляющая каждое исключительное значение $\{1, \ldots n\}$ неподвижным. Таким образом, группа $\mathcal{D}_{S^1}^{E}/\mathcal{D}_{S^1}^{e}$ является циклической порядка n;

• $\mathcal{D}_{MS^1} = \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_{S^1}^{+}$.

Тогда $\mathcal{D}_M$ и $\mathcal{D}_{MP}$ действуют на $C^{\infty}(M, P)$ по формулам (1.1) и (1.2). Обозначим через $\mathcal{S}_M(f)$, $\mathcal{S}_{MP}(f)$, $\mathcal{O}_M(f)$ и $\mathcal{O}_{MP}(f)$ соответственно стабилизаторы и орбиты f относительно этих действий. Очевидно, что

$$\mathcal{S}_M(f) \times \mathrm{id}_P \subset \mathcal{S}_{MP}(f) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{MP}(f).$$

Наконец, зададим на пространствах $\mathcal{D}_M$, $\mathcal{D}_P$ и $C^{\infty}(M, P)$ соответствующие C^{∞} топологии Уитни. Эти топологии индуцируют определенные топологии на группах $\mathcal{D}_{MP}$ и на соответствующих стабилизаторах и орбитах f.

1.2. **Стабилизаторы.** Скажем, что диффеоморфизм $\phi \in \mathcal{D}_P$ является *лево-тривиальным* или L-*тривиальным* для f, если существует диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}_M$ такой, что $(h, \phi) \in \mathcal{S}_{MP}(f)$, т.е. $\phi \circ f = f \circ h$. Другими словами, применяя ϕ к f (действуя слева на f), мы остаемся в *правой* орбите $\mathcal{O}_M(f)$ отображения f. Это объясняет термин “лево-тривиален”.

Пускай $p : \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_P \to \mathcal{D}_P$ — стандартная проекция. Очевидно, что p является гомоморфизмом групп. Заметим, что ядро ограничения p на $\mathcal{S}_{MP}(f)$ совпадает с $\mathcal{S}_M(f)$, а образ $p(\mathcal{S}_{MP}(f)) \subset \mathcal{D}_P$ состоит из всех L-тривиальных для f диффеоморфизмов.

Теорема 1.3. *Предположим, что $f \in C^\infty(M,P)$ удовлетворяет условиям* (V) *и* (J). *Тогда*

(1) *Случай $P = \mathbb{R}$:* $\qquad p(\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)) = \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$,

(2) *Случай $P = S^1$, $n \geq 1$:* $\qquad \mathcal{D}^e_{S^1} \subseteq p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) \subseteq \mathcal{D}^E_{S^1}$.

(3) *Случай $P = S^1$, $n = 0$:* $\qquad p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) = \mathcal{D}^+_{S^1}$.

В случаях (1) *и* (2) *p допускает непрерывное сечение-гомоморфизм, т.е. такой гомоморфизм групп $\Theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{S}_{MP}(f)$, что $p \circ \Theta = \mathrm{id}(\mathcal{D}^e_P)$.*

В случае (3) *для того, чтобы проекция p обладала сечением $\Theta : \mathcal{D}^+_{S^1} \to \mathcal{S}_{MS^1}(f)$ необходимо и достаточно, чтобы расслоение $f : M \to S^1$ тривиальным. Тогда Θ также можно выбрать так, чтобы оно было гомоморфизмом.*

Замечание 1.3.1. Сечение проекции p в Теореме 1.3 должно иметь вид

$$\Theta(\phi) = (\theta(\phi), \phi),$$

где $\theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{D}_M$ — такое непрерывное отображение, что $\phi \circ f = f \circ \theta(\phi)$ для любого диффеоморфизма $\phi \in \mathcal{D}^e_P$ (оставляющего неподвижным каждое исключительное значение f). Отметим также, что Θ — гомоморфизм тогда и только тогда, когда гомоморфизмом является θ.

Замечание 1.3.2. В случае (2) обозначим

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) = p^{-1}(\mathcal{D}^e_{S^1}).$$

Так как $\mathcal{D}^E_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \approx \mathbb{Z}_n$, то из Теоремы 1.3 получаем, что

$$\mathcal{S}_{MS^1}(f)\,/\,\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \;\approx\; p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))\,/\,\mathcal{D}^e_{S^1} \;\approx\; \mathbb{Z}_c, \tag{1.5}$$

для некоторого c которое делит n.

Теорема 1.3 (Другая формулировка)**.** *Следующие последовательности групповых гомоморфизмов точны:*

$$\begin{array}{lll} (1) & P=\mathbb{R}: & 1 \to \mathcal{S}_M(f) \to \mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} \to 1, \\ (2) & P=S^1,\ n\geq 1: & 1 \to \mathcal{S}_M(f) \to \widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^e_{S^1} \to 1, \\ (3) & P=S^1,\ n=0: & 1 \to \mathcal{S}_M(f) \to \mathcal{S}_{MS^1}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^+_{S^1} \to 1. \end{array}$$

В случаях (1) *и* (2) *эти последовательности расщепляются, а в случае* (3) *расщепление возможно тогда и только тогда, когда отображение* $f : M \to S^1$ *есть локально тривиальное расслоение.*

Отметим, что существование расщеплений в случаях (1) и (2) кажется естественным, т.к. p есть главное $\mathcal{S}_M(f)$-расслоение, а группы $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^e_{S^1}$ для $n\geq 1$ стягиваемы, см. Лемма 6.0.1.

Таким образом, в случае (1) имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) \cong \mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}},$$

откуда следует, что вложение $\mathcal{S}_M(f)\times \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)$ правого стабилизатора в лево-правый есть гомотопическая эквивалентность.

В случае (2) $\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \cong \mathcal{S}_M(f)\times\mathcal{D}^e_{S^1}$. Напомним, что группа $\mathcal{S}_{MS^1}(f)/\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f)$ — циклическая порядка c, поэтому

$$\mathcal{S}_{MS^1}(f) \cong \mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e_{S^1} \times \mathbb{Z}_c.$$

Следовательно, лево-правый стабилизатор $\mathcal{S}_{MS^1}(f)$ гомотопически эквивалентен $\mathcal{S}_M(f)\times\mathbb{Z}_c$.

Предположим теперь, что $\mathbb{Z}_c$ нетривиальная группа, т.е, что $c>1$. Тогда найдется такой $(h,\phi)\in\mathcal{S}_{MS^1}(f)$, что $\phi\circ f = f\circ h$ причем ϕ циклически сдвигает исключительные значения $1,\dots,n$ отображения f. Тогда h циклически переставляет соответствующие исключительные множества уровня $L_k=f^{-1}(k)$:

$$\phi(k)=k+n/c, \qquad h(L_k)=L_{k+n/c}, \qquad (k=1,\dots,n).$$

Все суммы здесь берутся по модулю n. В частности, множества уровня

$$L_k,\ L_{k+n/c},\ \dots\ L_{k+n(c-1)/c}$$

оказываются попарно гомеоморфными. Такая ситуация, очевидно, не является типичной, хотя она может быть устойчивой относительно малых деформаций (для функций Морса общего положения). Поэтому для большинства функций должно выполняться условие $\mathcal{D}^e_{S^1} = p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))$. В этом случае $\mathcal{S}_{MS^1}(f)$ гомеоморфен $\mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e_{S^1}$, а вложение $\mathcal{S}_M(f) \times \mathrm{id}_{S^1} \subset \mathcal{S}_{MS^1}(f)$ является гомотопической эквивалентностью.

1.3.3. *Интерпретация: голономия.* Рассмотрим векторное расслоение $f : M \to B$ над гладким многообразием B и для каждой точки $b \in B$ обозначим через M_b ее слой $f^{-1}(b)$. Выберем произвольную связность на M. Тогда для любого гладкого пути $\omega : I \to B$ существует гладкая изотопия (состоящая даже из линейных изоморфизмов) $h_t : M_{\omega(0)} \to M_{\omega(t)} \subset M$, называемая *голономией* вдоль ω. Более общо, если $\phi_t : B \to B$ — изотопия с $\phi_0 = \mathrm{id}_B$, то существует изотопия $h_t : M \to M$ такая, что $h_0 = \mathrm{id}_M$ и следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle h_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_t} \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \text{т.е.} \qquad \phi_t \circ f = f \circ h_t.$$

Другими словами, (h_t, ϕ_t) принадлежит лево-правому стабилизатору f относительно действия группы $\mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_B$ на $C^\infty(M, B)$. Отметим также, что если $G \subset \mathcal{D}_B$ — связная и односвязная подгруппа ($\pi_1 G = 0$) и $\phi_t \in G$ для всех $t \in [0,1]$, то h_1 зависит только от ϕ_1 и не зависит от пути $\{\phi_t\} \subset G$ соединяющего $\phi_0 = \mathrm{id}_B$ с ϕ_1. Эта конструкция дает нам гомоморфизм $\theta : G \to \mathcal{D}_M$ такой что $\phi \circ f = f \circ \theta(\phi)$ для всех $\phi \in G$.

Заметим, что проекция f векторного расслоения — это гладкое отображение *без* критических точек. Заменим теперь f произвольным гладким отображением между произвольными гладкими многообразиями. Для того, чтобы построить подобный гомоморфизм "голономии", необходимо наложить определенные условия на f и G. В частности, G должна оставлять инвариантным образ f а также множество его "исключительных" значений. Теорема 1.3 описывает эту ситуацию в случае когда размерность $\dim B = 1$.

1.4. **Орбиты.** Опишем теперь соотношения между орбитами.

Определение 1.4.1. Назовем критическую точку z отображения $f \in C^\infty(M,P)$ *существенной*, если для любой окрестности $U \subset M$ этой точки существует такая окрестность $\mathcal{U}$ отображения f в $C^\infty(M,P)$ с C^∞-топологией, что каждое $g \in \mathcal{U}$ имеет критическую точку в U.

Пример 1.4.2. Пусть $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$. Тогда $0 \in \mathbb{R}$ является существенной критической точкой для f но не для g.

Теорема 1.5. *Предположим, что f удовлетворяет условиям* (V) *и* (J). *Кроме того, пусть каждый* критический *уровень f содержит либо существенную критическую точку, либо связную компоненту ∂M.*

Если $P = \mathbb{R}$, то вложение $\mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$ продолжается до гомеоморфизма

$$\mathcal{O}_M(f) \ \times \ \mathbb{R}^{n-2} \approx \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f).$$

Пусть $P = S^1$ и c — индекс $\mathcal{D}^e_{S^1}$ в $p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))$, см. (1.5).

a) *Если $n = 0$, то $\mathcal{O}_M(f) = \mathcal{O}_{MS^1}(f)$.*

b) *Если n — четно, а n/c — нечетно, то*

$$\mathcal{O}_M(f) \times S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1} \approx \mathcal{O}_{MS^1}(f),$$

где $S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$ — тотально пространство (единственного!) нетривиального $(n-1)$-мерного векторного расслоения над S^1.

c) *В остальных случаях,*

$$\mathcal{O}_M(f) \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \approx \mathcal{O}_{MS^1}(f).$$

1.6. **Структура работы.** В разделе 2 для каждого ростка "допустимой" гладкой функции $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в $0 \in \mathbb{R}$ (см. Определение 2.0.1) мы вводим и изучаем важные в дальнейшем группы $L(\alpha)$ ростков диффеоморфизмов $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в 0.

В разделе 3 рассмотрено локальное лево-правое действие групп ростков диффеоморфизмов $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}$ на ростках гладких функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ таких, что $f(0) = 0$. Мы даем достаточное условие $\mathrm{J}(\alpha)$ на f когда $L(\alpha)$ состоит из L-тривиальных для f диффеоморфизмов (Теорема 3.2). Наиболее полный результат

(Теорема 3.3), являющийся локальным вариантом Теоремы 1.3, получен для функций f обладающих свойством J(id).

В разделе 4 показано, что условие J(id) выполняется для огромного класса особенностей и инвариантно относительно их стабильной эквивалентности (Лемма 4.0.5). В частности оно выполняется для невырожденных и простых особенностей, а также для формальных рядов. С другой стороны, существуют особенности не удовлетворяющие J(id) (Утверждение 4.0.9).

В разделе 5 мы доказываем Теорему 1.3.

Раздел 6. Здесь описаны конечномерные пространства смежных классов $\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^{e}_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^{+}_{S^1}/\mathcal{D}^{e}_{S^1}$ (Теорема 6.1).

Раздел 7. Мы даем достаточное условие для непрерывности отображения k, которое сопоставляет каждому $g \in \mathcal{O}_{MP}(f)$ упорядоченное множество его исключительных значений (Лемма 7.0.1). Мы также показываем, что без этого условия k может не быть непрерывным.

Наконец, в разделе 8 доказана Теорема 1.5.

Я хочу поблагодарить В. В. Шарко, Д. Болотова, М. Панкова, Е. Полуляха, А. Пришляка, и И. Власенко за полезные обсуждения. Хочу также выразить свою благодарность К. Фельдману за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

2. Группы $L(\alpha)$

Пусть $C^\infty_0(\mathbb{R})$ — алгебра ростков гладких функций в $0 \in \mathbb{R}$. Для каждого $\mu \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ будем обозначать через I_μ идеал $\mu \cdot C^\infty_0(\mathbb{R})$ в $C^\infty_0(\mathbb{R})$.

Определение 2.0.1. Скажем, что функция $\alpha \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ *допустима*, если

(1) $\alpha(0) = 0$, производная $\alpha'(0)$ равна либо 0, либо 1, и
(2) существует окрестность U точки $0 \in \mathbb{R}$ такая, что пересечение $\alpha^{-1}(0) \cap U$ *нигде не плотно в* U. Таким образом, α не является постоянной на открытых интервалах сколь угодно близких к 0.

Для каждой допустимой функции $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ мы сейчас определим некоторую группу $L(\alpha)$ ростков диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ в 0. Эти группы аналогичны группам G_d квази-однородных диффеоморфизмов $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ порядка $d \geq 0$, которые изучались в [2, §5]. Наша ситуация с одной стороны проще, так как мы рассматриваем диффеоморфизмы $\mathbb{R}$. С другой стороны, размерность 1 дает возможность доказать больше. Например, близость к тождественному диффеоморфизму $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ для диффеоморфизмов из $L(\alpha)$ будет определена *до порядка малости допустимой функции* α, которая может быть плоской, а не только *до порядка малости* d.

Более того, наш подход к $L(\alpha)$ отличается от [2, §5]. Мы изучаем эти группы характеризуя их как гладкие сдвиги вдоль траекторий векторного поля $\alpha(s)\frac{d}{ds}$ on $\mathbb{R}$, см. Теорему 2.3. Полученные формулы для функций сдвига будут играть ключевую роль при доказательстве Теоремы 1.3 и ее локального варианта Теоремы 3.2.

2.1. **Определение** $L(\alpha)$**.** Пускай $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — допустимая функция. Определим $L(\alpha)$ как подмножество в $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ состоящее из *сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов* ϕ следующего вида:

$$\phi(s) = s + \alpha(s)\beta_\phi(s), \qquad \beta_\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Другими словами, $\phi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in I_\alpha$. Рассмотрим два случая.

a) Предположим, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha'(0) = 1$, т.е. $\alpha(s) = s\bar{\alpha}(s)$, где $\bar{\alpha} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\bar{\alpha}(0) = \alpha'(0) = 1$. Тогда $L(\alpha) = \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$. Действительно, так как $\phi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, то $\phi(0) = 0$, откуда $\phi(s) - s = s\omega(s) = \alpha(s)\frac{\omega(s)}{\bar{\alpha}(s)}$, где $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно $\phi \in L(\alpha)$.

b) Пусть теперь $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, т.е. $\alpha(s) = s^2\bar{\alpha}(s)$ для некоторой функции $\bar{\alpha} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда каждая функция $\phi \in L(\alpha)$ имеет вид $\phi(s) = s + s^2\bar{\alpha}(s)\beta_\phi(s)$. В частности, $\phi'(0) = 1$.

Отметим еще, что $L(s^k)$ состоит из диффеоморфизмов вида $\phi(s) = s + s^k\beta_\phi(s)$. Поэтому $\phi \in L(s^k)$ тогда и только тогда, когда $\phi'(0) = 1$ и $\phi^{(p)}(0) = 0$ для $p = 2, 3, \ldots, k-1$.

Замечание 2.1.1. $L(\alpha\gamma) \subseteq L(\alpha)$ для всех $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того $L(\alpha\gamma) = L(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(0) \neq 0$. В частности, $L(\alpha) \subset L(\mathrm{id})$ для всех допустимых α.

Замечание 2.1.2. Из условия (2) Определения 2.0.1 вытекает, что β_ϕ однозначно определяется в окрестности 0 по ϕ. Действительно, если условие (2) нарушено, то существует такая сходящаяся к 0 последовательность попарно различных замкнутых отрезков A_k, что $\alpha|_{A_k} \equiv 0$. Тогда как угодно изменяя β_ϕ на A_k, мы сохраним ϕ .

2.2. **Другое описание $L(\alpha)$.** Мы сейчас покажем, что $L(\alpha)$ совпадает с множеством всех гладких сдвигов вдоль траекторий векторного поля $\alpha(s)\frac{d}{ds}$ на $\mathbb{R}$.

Пусть $\alpha : V \to \mathbb{R}$ — допустимая функция. Определим векторное поле F на $\mathbb{R}$ формулой $F(s) = \alpha(s)\frac{d}{ds}$. Пусть также $\mathcal{F} : V \times I \to \mathbb{R}$ локальный поток порождаемый F, где V — некоторая окрестность $0 \in \mathbb{R}$ и I — открытый интервал содержащий $0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.3. *$\phi \in L(\alpha)$ тогда и только тогда, когда ϕ является гладким сдвигом вдоль траекторий $\mathcal{F}$, т.е. $\phi(s) = \mathcal{F}(s, \sigma_\phi(s))$ для некоторой функции $\sigma_\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Более того, $\beta_\phi = \sigma_\phi\,\omega$, где $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\omega(0) = 1$. Следовательно, $\beta_\phi(0) = \sigma_\phi(0)$.*

Будем называть σ_ϕ *функцией сдвига* ϕ относительно $\mathcal{F}$. Перед тем, как доказывать эту теорему, выведем из нее несколько следствий.

Лемма 2.3.1. (ср. [2, Предложение. 5.2]). *$L(\alpha)$ является группой относительно композиции функций.*

Доказательство. Пусть $\phi, \psi \in L(\alpha)$. По Теореме 2.3 $\phi(s) = \mathcal{F}(s, \sigma_\phi(s))$ и $\psi(s) = \mathcal{F}(s, \sigma_\psi(s))$ для некоторых $\sigma_\phi, \sigma_\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Легко видеть, [4, Предложение 3], что

$$\psi\circ\phi(s) = \mathcal{F}\big(s, \sigma_\phi(s)+\sigma_\psi\circ\phi(s)\big), \qquad \psi^{-1}(s) = \mathcal{F}\big(s, -\sigma_\psi\circ\psi^{-1}(s)\big). \tag{2.2}$$

Откуда, опять по Теореме 2.3, получаем, что $\psi\circ\phi,\ \psi^{-1} \in L(\alpha)$. Следовательно, $L(\alpha)$ — группа. $\square$

Лемма 2.3.2. *Предположим, что функция* $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *такова, что* $\alpha\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *допустима. Тогда следующие условия для* $\phi \in L(\alpha)$ *эквивалентны:*

$$(1)\ \phi \in L(\alpha\mu) \qquad (2)\ \beta_\phi \in I_\mu \qquad (3)\ \sigma_\phi \in I_\mu.$$

Таким образом, группа $L(\alpha\mu)$ *состоит из всех гладких сдвигов вдоль траекторий потока* $\mathcal{F}$*, функции сдвига которых, пропорциональны* μ*, т.е. принадлежат идеалу* I_μ*.*

Доказательство. (2)⇔(3) следует из Теоремы 2.3, т.к. $I_{\beta_\phi} = I_{\sigma_\phi}$.

(1)⇔(2) Условие $\phi \in L(\alpha\mu)$ означает, что ϕ имеет следующий вид $\phi(s) = s + \alpha(s)\mu(s)\omega(s)$ для некоторой $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому из (2.1) и Замечания 2.1.2 следует, что это условие эквивалентно тому, что $\beta_\phi = \mu\,\omega \in I_\mu$. □

Лемма 2.3.3. *Пусть* $\psi, \phi \in L(\alpha)$ *и* $\xi = \psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$*. Тогда*

$$\sigma_\xi = \sigma_\phi \circ \psi^{-1} \cdot \nu,$$

где $\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *and* $\nu(0) = 1$*. Следовательно,* $\xi \in L(\alpha\mu)$ *тогда и только тогда, когда* $\sigma_\phi \circ \psi^{-1} \in I_\mu$*.*

Доказательство. Из (2.2) следует, что

$$\xi(s) = \mathcal{F}\big(s, -\sigma_\psi \circ \psi^{-1}(s) + \sigma_\phi \circ \psi^{-1}(s) + \sigma_\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}(s)\big).$$

Таким образом, $\sigma_\xi = (\sigma_\phi + \sigma_\psi \circ \phi - \sigma_\psi) \circ \psi^{-1}$.

Тогда по Лемме Адамара и Теореме 2.3 получаем, что

$$\sigma_\psi \circ \phi(s) - \sigma_\psi(s) = (\phi(s) - s)\ \bar{\sigma_\psi} = \alpha\,\beta_\phi\,\bar{\sigma_\psi} = \alpha\,\sigma_\phi\,\omega\,\bar{\sigma_\psi}$$

для некоторой $\bar{\sigma_\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$\sigma_\xi = \big(\sigma_\phi \cdot (1 + \alpha\,\omega\,\bar{\sigma_\psi})\big) \circ \psi^{-1} = \sigma_\phi \circ \psi^{-1} \cdot \nu,$$

где $\nu = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \alpha\,\omega\,\bar{\sigma_\psi}) \circ \psi^{-1}$ и $\nu(0) = 1$. □

Следствие 2.3.4. $L(\alpha\mu)$ *является нормальной подгруппой в* $L(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда идеал* $I_\mu \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ *инвариантен относительно действия* $L(\alpha)$ *на* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *определенного по формуле*

$$\psi \cdot \sigma = \sigma \circ \psi^{-1}, \qquad \psi \in L(\alpha),\ \sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Следствие 2.3.5. (ср. [2, Предложение 5.3]). *Для* $k \geq 1$ *подгруппа* $L(s^k\alpha)$ *нормальна в* $L(\alpha)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\sigma\circ\phi \in I_{s^k}$ для всех $\sigma \in I_{s^k}$ и $\phi \in L(\mathrm{id})$. Действительно, $\sigma(s) = s^k\bar{\sigma}$ и $\phi(s) = s\,\omega(s)$ для некоторых функций $\bar{\sigma}, \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\sigma \circ \phi(s) \,=\, \phi(s)^k\,\bar{\sigma}(\phi(s)) \,=\, s^k\,\omega(s)^k\,\bar{\sigma}(\phi(s)) \,\in I_{s^k}. \quad \Box$$

Определим следующее отображение $\tau_\alpha : L(\alpha) \to \mathbb{R}$ формулой $\tau_\alpha(\phi) = \beta_\phi(0) = \sigma_\phi(0)$. Тогда из (2.2) следует, что τ_α — сюръективный гомоморфизм ядро которого совпадает с $L(s\alpha)$.

Таким образом, для каждой допустимой функции α мы получаем такую последовательность нормальных подгрупп

$$L(\alpha) \;\supset\; L(s\alpha) \;\supset\; L(s^2\alpha) \;\supset\; \cdots,$$

что каждый фактор изоморфен $\mathbb{R}$. Поэтому для каждого k группа $L(\alpha)/L(s^k\alpha)$ является группой Ли диффеоморфной $\mathbb{R}^k$ (ср. [2, Предложение 5.5]).

2.4. **Доказательство Теоремы 2.3.** Достаточно установить следующее предложение, описывающее формулы для потока $\mathcal{F}$.

Предложение 2.4.1. *На* $V \times I$ *существует такая гладкая функция* γ, *что*

$$\mathcal{F}(s,t) = s + t\alpha(s)\gamma(s,t), \tag{2.3}$$

и $\gamma(0,t) \equiv 1$. *В частности,* $\mathcal{F}_t \in L(\alpha)$ *для каждого* $t \in I$.

Перед доказательством этого предложения выведем из него Теорему 2.3.

Достаточность. Из (2.3) вытекает, что

$$\phi(s) \,=\, \mathcal{F}(s, \sigma_\phi(s)) \,=\, s \,+\, \alpha(s)\,\sigma_\phi(s)\,\gamma(s,\sigma_\phi(s)).$$

Следовательно, $\phi \in L(\alpha)$, причем $\beta_\phi(s) = \sigma_\phi(s)\,\gamma(s,\sigma_\phi(s))$, а $\omega(s) = \gamma(s,\sigma_\phi(s))$, и $\omega(0) = \gamma(0,\sigma_\phi(0)) = 1$.

Необходимость. Предположим, что $\phi \in L(\alpha)$. Чтобы показать, что $\phi(s) = \mathcal{F}(s,\sigma_\phi(s))$, мы установим, что

$$\beta_\phi(s) = \sigma_\phi(s)\gamma(s,\sigma_\phi(s))$$

для некоторой функции $\sigma_\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $\delta(s,t) = t\gamma(s,t)$. Заметим, что $\delta_t'(s,0) = \gamma(s,0) = 1$. Следовательно, существует такая гладкая функция $q(s,t)$, что $t = \delta(s,q(s,t))$. Поэтому можем положить $\sigma_\phi(s) = q(s,\beta_\phi(s))$. Тогда

$$\beta_\phi(s) = \delta(s,\sigma_\phi(s)) = \sigma_\phi(s)\cdot\gamma(s,\sigma_\phi(s)). \quad \square$$

2.5. **Доказательство Предложения 2.4.1.** Для упрощения обозначений иногда не будем указывать зависимость от s и (s,t). Напомним, что $\mathcal{F}_t'(s,0) = \alpha(s)$. Поэтому разложение в ряд Тейлора функции $\mathcal{F}(s,t)$ по t в точке $(s,0)$ имеет вид:

$$\mathcal{F}(s,t) = \mathcal{F}(s,0) + t\,\mathcal{F}_t'(s,0) + \cdots = s + t\,\alpha(s) + \cdots \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$\gamma(s,t) = \frac{\mathcal{F}(s,t)-s}{t\,\alpha(s)}.$$

Эта функция определена только для тех (s,t), для которых $t\alpha(s)\neq 0$. Но так как $\mathcal{F}(s,0) = s$, то из Леммы Адамара следует, что $(\mathcal{F}(s,t)-s)/t$ является гладкой функцией. Более того, если $t\neq 0$, то $\alpha(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(s,t) = s$. Поэтому можно надеятся, что $\gamma(s,t)$ все же является гладкой функцией в окрестности $(0,0)$. Следующая лемма показывает, что это действительно так.

Лемма 2.5.1. *$\gamma(s,t)$ является решением дифференциального уравнения:*

$$\gamma_s'(s,t) = \gamma^2(s,t)\cdot t\cdot\mu(s,t), \tag{2.5}$$

где μ — некоторая гладкая функция на $U\times I$. Следовательно,

$$\gamma(s,t) = \frac{1}{c(t) \,-\, t\int\limits_0^s \mu(z,t)dz},$$

где $c(t)$ — такая гладкая функция, что $c(0) = 1$. Таким образом, для достаточно малого $\varepsilon > 0$, функция γ является гладкой на $U\times(-\varepsilon,\varepsilon)$. Кроме того, $\gamma(0,t) = \frac{1}{c(0)} = 1$.

Доказательство. Легко проверить, что при $\alpha(s)\neq 0$

$$\gamma_s'(s,t) = \frac{\alpha\cdot\mathcal{F}_s' \,-\, \alpha \,-\, (\mathcal{F}-s)\,\alpha_s'}{t\,\alpha^2}. \tag{2.6}$$

Утверждение 2.5.2. *Первый член $\alpha \cdot \mathcal{F}'_s$ числителя в* (2.6) *равен*

$$\alpha(s) \cdot \mathcal{F}'_s(s,t) = \alpha \circ \mathcal{F}(s,t).$$

Доказательство. Заметим, что F определяет следующее дифференциальное уравнение на $\mathbb{R}$: $\frac{ds}{dt} = \alpha(s)$, откуда $dt = \frac{ds}{\alpha(s)}$. Таким образом, для каждого $s \in V_1$ время t вдоль траектории $\mathcal{F}$ между s и $\mathcal{F}(s,t)$ равно $t = \int\limits_0^t dt = \int\limits_s^{\mathcal{F}(s,t)} \frac{dz}{\alpha(z)}$, (отметим, что если $\alpha(s) \neq 0$, то $\alpha \neq 0$ на отрезке между s и $\mathcal{F}(s,t)$, поэтому интеграл в предыдущей формуле корректно определен).

Дифференцируя обе части этого равенства по s получаем

$$0 = \frac{\mathcal{F}'_s}{\alpha(\mathcal{F})} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \mathcal{F}'_s - \alpha(\mathcal{F})}{\alpha \cdot \alpha(\mathcal{F})},$$

откуда $\alpha(s) \cdot \mathcal{F}'_s(s,t) = \alpha \circ \mathcal{F}(s,t)$. □

С другой стороны,

$$\alpha \circ \mathcal{F}(s,t) = \alpha + (\mathcal{F} - s)\,\alpha'_s + (\mathcal{F} - s)^2\,\mu(s,t),$$

где $\mu(s,t)$ — некоторая гладкая функция.

Поэтому (2.6) можно переписать в виде:

$$\gamma'_s = \frac{\alpha \circ \mathcal{F} - \alpha - (\mathcal{F} - s)\alpha'_s}{t\,\alpha^2} = \frac{(\mathcal{F} - s)^2}{t^2\,\alpha^2}\,t\mu(s,t) = \gamma^2\,t\mu(s,t),$$

что совпадает с (2.5). Решение этого уравнения дается формулой (2.6).

Из этой формулы вытекает, что $\gamma(s,0) = \frac{1}{c(0)}$, откуда

$$\gamma(s,t) = \frac{1}{c(0)} + t\beta(s,t)$$

для некоторой гладкой функции $\beta(s,t)$. Следовательно,

$$\mathcal{F}(s,t) = s + \frac{t\,\alpha(s)}{c(0)} + t^2\,\alpha(s)\,\beta(s,t). \tag{2.7}$$

Сравнивая (2.7) с (2.4) мы видим, что $c(0) = 1$.

Лемма 2.5.1 и Предложение 2.4.1 доказаны. □

3. Стабилизаторы локального лево-правого действия

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — алгебра ростков гладких функций $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в $0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ — единственный максимальный идеал в $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, состоящий из функций принимающих значение 0 в точке $0 \in \mathbb{R}^m$ и $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m)$ — группа ростков таких сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ в $0 \in \mathbb{R}^m$, что $h(0) = 0$.

Обозначим через $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathfrak{m}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ аналогичные объекты для $\mathbb{R}$. Определим на $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ *локальное правое* действие группы $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m)$ по формуле (1.1) и *локальное лево-правое* действие $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ по формуле (1.2).

Ростки $f, g \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ назовем *право-* (*лево-право-*) эквивалентными, если они принадлежат одной орбите относительно локального правого (лево-правого) действия.

Для ростка $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ обозначим через

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f) = \{(h, \phi) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \mid \phi \circ f = f \circ h\}$$

его *правый* стабилизатор.

3.1. **Свойство** $\mathrm{J}(\alpha)$**.** Очевидно, что каждый росток $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ индуцирует следующий гомоморфизм алгебр:

$$f^* : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \qquad f^*(\alpha) = \alpha \circ f.$$

Обозначим через $\Delta(f, 0) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ идеал Якоби f в $0 \in \mathbb{R}^m$, порожденный частными производными $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_m}$ функции f.

Определение 3.1.1. Пусть $\alpha \in \mathfrak{m}(\mathbb{R})$. Скажем, что $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ обладает свойством $\mathrm{J}(\alpha)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^m$, если

$$f^*(\alpha) \ = \ \alpha \circ f \ \in \ \Delta(f, 0). \tag{3.1}$$

Другими словами, существует такой росток векторного поля H в $0 \in \mathbb{R}^m$, что

$$H.f = \alpha \circ f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}.$$

При $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ свойство $\mathrm{J}(\mathrm{id})$ означает, что $\alpha(f) = f \in \Delta(f, 0)$, т.е. что f принадлежит своему идеалу Якоби. Это требование совпадает с Определением 1.1.1. Заметим также, что если $\alpha(s) = s^k$, то $\mathrm{J}(s^k)$ означает, что $f^k \in \Delta(f, 0)$.

Так как $\Delta(f,0)$ идеал в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, то условие $\mathrm{J}(\alpha)$ влечет $\mathrm{J}(\beta\alpha)$ для любой функции $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому если $\beta(0) \neq 0$, то условия $\mathrm{J}(\alpha)$ и $\mathrm{J}(\beta\alpha)$ эквивалентны.

Лемма 3.1.2. (1) *Свойство* $\mathrm{J}(\alpha)$ *инвариантно относительно* правой *локальной эквивалентности.*

(2) *Свойство* $\mathrm{J}(s^k)$ *инвариантно относительно* лево-правой *локальной эквивалентности.*

Доказательство. (1) Предположим, что f обладает свойством $\mathrm{J}(\alpha)$, т.е. $\alpha \circ f = H.f$ для некоторого векторного поля $H = (H_1, \dots, H_m)$ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^m$. Нужно доказать, что для любого $h \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m)$ функция $g = f \circ h$ также удовлетворяет $\mathrm{J}(\alpha)$. Действительно, так как $\nabla g = \nabla(f \circ h) = Th \cdot (\nabla f) \circ h$, то

$$\begin{aligned}\alpha \circ g = \alpha \circ f \circ h = H.f(h) = \sum_{i=1}^{m} (H_i \circ h) \cdot (f'_{x_i} \circ h) = \\ = \left[(H \circ h) \cdot (Th)^{-1}\right].g \in \Delta(g,0).\end{aligned}$$

(2) Предположим, что f обладает свойством $\mathrm{J}(s^k)$, т.е. $f^k = H.f$ для некоторого векторного поля $H = (H_1, \dots, H_m)$ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^m$. Покажем, что для $(\phi, h) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ функция $g = \phi \circ f \circ h^{-1}$ также обладает $\mathrm{J}(s^k)$. Из (1) вытекает, что $f \circ h^{-1}$ удовлетворяет $\mathrm{J}(s^k)$. Поэтому, достаточно рассмотреть случай $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Тогда $g = \phi \circ f$ и

$$H.g = \sum_{i=1}^{m} H_i \cdot (\phi \circ f)'_{x_i} = \phi'(f) \sum_{i=1}^{m} H_i \, f'_{x_i} = \phi'(f) \cdot H.f = \phi'(f)\, f^k.$$

Заметим, что $\phi(s) = \bar{\phi}(s)s$, где $\bar{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\bar{\phi}(0) = \phi'(0) > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}g^k = (\phi \circ f)^k = \bar{\phi}(f)^k \, f^k = \frac{\bar{\phi}(f)^k}{\phi'(f)} \, \phi'(f) f^k = \\ = \left(\frac{\bar{\phi}(f)^k}{\phi'(f)} \, H\right).(\phi \circ f) \ \in \ \Delta(g,0). \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 3.1.3. (ср. со Следствием 2.3.5). В общем случае свойство $\mathrm{J}(\alpha)$, по-видимому, не является лево-право инвариантным. При доказательстве (2) мы существенно использовали тот факт, что $\alpha(s) = s^k$ удовлетворяет условию: $\alpha(\phi \circ f) = \omega\alpha(f)$, т.е. $(\phi \circ f)^k = \omega f^k$ для некоторой функции $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Это условие для произвольных функций выполняется не всегда. К примеру, пусть

$$\alpha(s) = \begin{cases} e^{-1/s}, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases} \qquad \phi(s) = 2s, \qquad f(s) = s.$$

Тогда $\alpha \circ \phi \circ f(s) = e^{-1/2s} = e^{1/2s} \cdot \alpha \circ f(s)$ для $s > 0$ и функция $\omega(s) = e^{1/2s}$ не продолжается до гладкой функции в окрестности 0.

3.1.4. Следующая теорема устанавливает связь между группой $L(\alpha)$, условием $\mathrm{J}(\alpha)$ для f и стабилизатором $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)$.

Пусть $p : \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ — естественная проекция.

Теорема 3.2. *Предположим, что $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию $\mathrm{J}(\alpha)$ для некоторой допустимой функции $\alpha \in \mathfrak{m}(\mathbb{R})$. Тогда $L(\alpha) \subset p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))$ и p обладает сечением-гомоморфизмом*

$$\Theta : L(\alpha) \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f).$$

Эквивалентно, если $H.f = \alpha \circ f$ для некоторого векторного поля H в окрестности $0 \in \mathbb{R}^m$, то существует такой гомоморфизм $\theta : L(\alpha) \to \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m)$, что

$$\phi \circ f = f \circ \theta(\phi),$$

т.е. $(\theta(\phi), \phi) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)$. Таким образом, $h \in L(\alpha)$ является L-*тривиальным для f.*

Более того, пусть $\mathcal{H}$ — локальный поток порожденный H. Тогда θ определяется по следующей формуле:

$$\theta(\phi)(x) = \mathcal{H}(x, \sigma_\phi \circ f(x)),$$

где $\phi \in L(\alpha)$ и $\sigma_\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — функция сдвига для ϕ относительно локального потока порожденного векторным полем $F(s) = \alpha(s)\frac{d}{ds}$.

В качестве частного случая получаем следующий локальный вариант Теоремы 1.3.

Теорема 3.3. *Предположим, что* $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{J}(\mathrm{id})$, *т.е.* $f \in \Delta(f, 0)$. *Тогда* $p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)) = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = L(\mathrm{id})$ *и* p *обладает сечением-гомоморфизмом* $\Theta : \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)$. *Таким образом, каждый диффеоморфизм* $\phi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ L-*тривиален для* f.

Следствие 3.3.1. *Если* $f, g \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ *удовлетворяют* $\mathrm{J}(\mathrm{id})$, *то они лево-право эквивалентны тогда и только тогда, когда они право эквивалентны.*

Доказательство. Если f и g лево-право эквивалентны, т.е. $g = \phi \circ f \circ h^{-1}$ для некоторого $(h, \phi) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, то $g = f \circ \theta(\phi) \circ h^{-1}$. Обратное утверждение очевидно. □

Доказательство Теоремы 3.2 будет дано в разделе 3.5.

3.4. **Характеризации условия** $\mathrm{J}(\alpha)$**.** Пусть H векторное поле на $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{H} : U \times I \to \mathbb{R}^m$ локальный поток порожденный H, где U — окрестность $0 \in \mathbb{R}^m$ и I открытый интервал содержащий $0 \in \mathbb{R}$.

Для гладкой функции $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим следующее векторное поле $F(s) = \alpha(s)\frac{d}{ds}$ на $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{F} : V \times I \to \mathbb{R}$ — локальный поток порожденный F, где V — окрестность $0 \in \mathbb{R}$. Заметим, что F можно рассматривать как сечение (тривиального) касательного расслоения $T\mathbb{R}$ определенное по формуле:

$$F : \mathbb{R} \to T\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad F(s) = (s, \alpha(s)).$$

Лемма 3.4.1. *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *гладкая функция и* $f(0) = 0$. *Тогда следующие условия на* H, F, $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ *и* α *эквивалентны:*

(1) *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{Tf} & TV \\ {\scriptstyle H}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array} \qquad \text{т.е.} \qquad H.f = \alpha \circ f.$$

Заметим, что это в точности условие $\mathrm{J}(\alpha)$.

(2) *Для каждого $t \in I$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle \mathcal{H}_t}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_t} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \qquad \textit{т.е.} \qquad \mathcal{F}(f(x), t) = f \circ \mathcal{H}(x, t);$$

(3) *Для каждой гладкой функции $\sigma : V \to I$ определим отображения:*

$$h_\sigma : U \to \mathbb{R}^m \qquad h(x) = \mathcal{H}(x, \sigma \circ f(x)),$$
$$\phi_\sigma : V \to \mathbb{R} \qquad \phi(s) = \mathcal{F}(s, \sigma(s)).$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle h_\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_\sigma} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \qquad \textit{т.е.} \qquad \phi_\sigma \circ f = f \circ h_\sigma.$$

В этом случае h_σ является вложением тогда и только тогда, когда вложением будет ϕ_σ.

(4) *Существуют такие изотопии*

$$\bar{\mathcal{H}} : U \times [0,1] \to \mathbb{R}^m \qquad \textit{и} \qquad \bar{\mathcal{F}} : V \times [0,1] \to \mathbb{R},$$

что $\bar{\mathcal{F}}_0 = \mathrm{id}_V$, $\bar{\mathcal{H}}_0 = \mathrm{id}_U$, $\bar{\mathcal{F}}_t \circ f = f \circ \bar{\mathcal{H}}_t$,

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial t}(s, 0) = \alpha(s) \qquad \textit{и} \qquad \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t}(s, 0) = H(s). \tag{3.2}$$

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Пусть $x \in U$. Достаточно показать, что $\omega(t) = \mathcal{F}(x, t)$ является траекторией H, т.е. $\omega'_t(t) = H(\omega(t))$. Отсюда будет следовать, что $f \circ \omega(t)$ — траектория F, т.е. $(f \circ \omega(t))'_t = F(f \circ \omega(t))$. Получаем

$$(f \circ \omega(t))'_t \;=\; \omega'_t(t).f \;=\; H.f(\omega(t)) \;\overset{(1)}{=}\; F(f \circ \omega(t)).$$

(2)$\Leftrightarrow$(3) Утверждение (3) получается подстановкой в (2) вместо t функции $\sigma \circ f(x)$. Обратно, (2) является частным случаем (3) для постоянной функции $\sigma(s) = t$.

Остается показать, что h_σ является вложением одновременно с ϕ_σ. По Теореме 19 из [4], для того, чтобы отображение

h_σ (соотв. ϕ_σ) было вложением сохраняющим траектории $\mathcal{H}$ (соотв. $\mathcal{F}$) и их ориентации, необходимо и достаточно, чтобы $H.(\sigma\circ f) > -1$ (соотв. $F.\sigma > -1$). Но из (1) следует, что эти выражения совпадают:

$$H.(\sigma\circ f) \,=\, \sigma'(f)\,\cdot\, H.f \,=\, \sigma'(f)\,\cdot\, F\circ f \,=\, F.\sigma(f).$$

(2)⇒(4) Достаточно положить $\bar{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{H}}=\mathcal{H}$, где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ — соответствующие потоки. Тогда условие (3.2) означает, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ порождаются соответственно F и H.

(4)⇒(1) Пусть $H_t(x)=\bar{\mathcal{H}}'_t(x,t)$ — одно-параметрическое семейство векторных полей на U соответствующее изотопии $\bar{\mathcal{H}}_t$. Дифференцируя тождество $f\circ\bar{\mathcal{H}}(x,t)=\bar{\mathcal{F}}(f(x),t)$ по t получаем

$$H_t.f(\bar{\mathcal{H}}(x,t))=\bar{\mathcal{F}}'_t(f(x),t).$$

В частности, при $t=0$ имеем $\bar{\mathcal{H}}(x,0)=x$ и $\bar{\mathcal{F}}'_t(s,t)=\alpha(s)$, откуда $H_0.f=\alpha\circ f$. □

Отметим один частный случай этой леммы. Он играет основную роль при доказательстве Теоремы 1.3.

Лемма 3.4.2. *Пусть $f\in\mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\alpha(s)=\varepsilon s$, $F(s)=\varepsilon s\frac{d}{ds}$ — векторное поле на $\mathbb{R}$ и $\mathcal{F}(s,t)=se^{\varepsilon t}$ — поток порожденный F. Тогда следующие условия эквивалентны, т.к. они совпадают с условиями* (1) *и* (2) *Леммы 3.4.1 для этого случая:*

$$H.f=\varepsilon f, \tag{3.3}$$

$$f\circ\mathcal{H}(x,t)=f(x)\cdot e^{\varepsilon t}. \tag{3.4}$$

3.5. **Доказательство Теоремы 3.2.** Пусть $H.f=\alpha\circ f$, где H — векторное поле на $\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{H}$ — локальный поток в окрестности $0\in\mathbb{R}^m$ порожденный H и $\mathcal{F}$ — локальный поток в окрестности $0\in\mathbb{R}$ порожденный векторным полем $F(s)=\alpha(s)\frac{d}{ds}$.

Если $\phi\in L(\alpha)$, то по Теореме 2.3 $\phi(s)=\mathcal{F}(s,\sigma(s))$ для некоторой функции $\sigma\in C^\infty_0(\mathbb{R})$. Определим $\theta(\phi)$ по формуле

$$\theta(\phi)(x)=\mathcal{H}(x,\sigma\circ f(x)).$$

Тогда из утверждения (3) Леммы 3.4.1 получим, что $\phi\circ f=f\circ\theta(\phi)$.

Остается доказать, что θ — гомоморфизм. Пусть $\phi_i(s) = \mathcal{F}(s, \sigma_i(s))$ и $h_i(x) = \mathcal{H}(x, \sigma_i \circ f(x))$. Тогда

$$\begin{aligned}
\phi_2 \circ \phi_1(s) &= \mathcal{F}(\phi_1(s), \sigma_2 \circ \phi_1(s)) = \mathcal{F}(s, \underbrace{\sigma_1(s) + \sigma_2 \circ \phi_1(s)}_{\sigma(s)}), \\
h_2 \circ h_1(x) &= \mathcal{H}(h_1(x), \sigma_2 \circ f \circ h_1(x)) = \\
&= \mathcal{H}(x, \sigma_1 \circ f(x) + \sigma_2 \circ \phi_1 \circ f(x)) = \mathcal{H}(x, \sigma \circ f(x)).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

3.6. **Проблемы.** Из Теоремы 3.2 мы знаем, что если f удовлетворяет $\mathrm{J}(\alpha)$, то $L(\alpha)$ содержится в группе $p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))$ всех L-тривиальных для f диффеоморфизмов. В следующем разделе мы покажем, что для большого класса особенностей выполняется условие $\mathrm{J}(\mathrm{id})$. Это свойство является типичным, т.к. оно имеет место для невырожденных и простых особенностей A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, и даже для формальных рядов. Для этих функций по Теореме 3.2 имеем, что $p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)) = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = L(\mathrm{id})$.

С другой стороны, существуют особенности не удовлетворяющие $\mathrm{J}(\mathrm{id})$, см. Утверждение 4.0.9. Это приводит к следующим вопросам. Их решения позволили бы построить новые инварианты патологических и в частности плоских функций.

1) *Предположим, что $L(\alpha) \subset p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))$. Верно ли, что тогда для f выполняется условие $\mathrm{J}(\alpha)$?*

2) Предположим, что $L(s\alpha) \subseteq p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f)) \subseteq L(\alpha)$. Напомним, что фактор-группа $L(\alpha)/L(s\alpha)$ изоморфна $\mathbb{R}$, таким образом, группа $G = p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))/L(s\alpha)$ является подгруппой в $\mathbb{R}$. *Верно ли, что G замкнута? везде плотна в $\mathbb{R}$? Верно ли, что она всегда совпадает с 0 или $\mathbb{R}$?* В последних двух случаях $p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))$ совпадает либо с $L(s\alpha)$, либо с $L(\alpha)$.

3) *Верно ли в общем случае, что для каждой функции $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ группа $p(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}}(f))$ равна какой-нибудь группе $L(\alpha)$?*

4. Условие J(id)

В этом разделе мы приводим примеры особенностей удовлетворяющих “максимальному” условию $\mathrm{J}(\mathrm{id})$, см. Определение 3.1.1 для функции $\alpha = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Из Леммы 3.1.2 следует, что $\mathrm{J}(\mathrm{id})$ инвариантно относительно лево-правого действия.

Мы покажем, что J(id) также инвариантно относительно *стабильной* эквивалентности особенностей (Следствие 4.0.7) и что невырожденные и простые особенности удовлетворяют J(id) (Следствие 4.0.4). С другой стороны, существуют особенности не обладающие этим свойством (Утверждение 4.0.9).

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — алгебра ростков гладких функций $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в $0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ — максимальный идеал в $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, состоящий из функций f, для которых $f(0) = 0$. Обозначим через $\Delta(f, 0)$ идеал Якоби f в $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, порожденный ростками ее частных производных.

Напомним, что f обладает свойством J(id) в $0 \in \mathbb{R}^m$, если $f \in \Delta(f, 0)$.

Лемма 4.0.1. *В случае $m = 1$, то f обладает* J(id) *тогда и только тогда, когда f гладко делится на свою производную,т.е. $f(x) = \alpha(x) f'(x)$ для некоторой $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.* $\square$

Лемма 4.0.2. *Предположим, что $g \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ обладает* J(id), *так что $H.g = g$ для некоторого векторного поля H в* 0. *Пусть $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *$f = g^a$ для некоторого $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ (подчеркнем, что f предполагается гладкой);*

(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|g(x)|}}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0; \end{cases}$

Тогда f также обладает J(id).

Доказательство. Покажем, что в обоих случаях $\beta H.f = f$ для некоторой $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

(1) $\frac{1}{a} H.f = \frac{1}{a} H.(g^a) = g^{a-1} H.g = g^{a-1} g = f$.

(2) Хорошо известно, что функция

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

является гладкой. Поэтому гладкой будет и $f = \psi \circ g$. Тогда

$$gH.f = \frac{gH.g}{g^2} e^{-\frac{1}{|g|}} = e^{-\frac{1}{|g|}} = f. \quad \square$$

Лемма 4.0.3. *Пусть $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$. Предположим, что в некоторых локальных координатах в окрестности $0 \in \mathbb{R}^m$, функция f удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) $f(x_1, \dots, x_m) = x_1$, *т.е.* 0 *является регулярной точкой* f;

(ii) $f(tx_1, \dots, tx_m) = t^n f(x_1, \dots, x_m)$ *для всех* $t > 0$, *т.е.* f *однородная порядка* n;

(iii) $f(x_1, \dots, x_m) = x_1^{a_1} \pm x_2^{a_2} \pm \dots \pm x_k^{a_k}$;

(iv) $f(x_1, \dots, x_m) = x_1^{a_1} + x_1^{b_1} x_2^{a_2} + x_2^{b_2} x_3^{a_3} + \dots + x_{k-1}^{b_{k-1}} x_k^{a_k}$;

(v) $m = 1$ *и* $f^{(s)}(0) \neq 0$ *для некоторого* $s \geq 1$, *т.е.* f не плоская 0;

где $a_i \geq 1$, $b_j \geq 0$ *и* $k \leq m$. *Тогда* f *удовлетворяет* J(id).

Доказательство. (i) $f = x_1 f'_{x_1}$.

(ii) В этом случае утверждение леммы следует из хорошо известного тождества Эйлера для однородных функций: $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i f'_{x_i}$. Напомним его доказательство. Определим векторное поле в окрестности $0 \in \mathbb{R}^m$ по формуле: $H(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{n}(x_1, \dots, x_m)$. Тогда

$$
H.f(x) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + sH(x)) - f(x)}{s} = \tag{4.1}
$$

$$
= \lim_{s \to 0} \frac{f((1 + s/n)x) - f(x)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{(1 + s/n)^n - 1}{s} f(x) = f(x).
$$

(iii) $f = \frac{x_1}{a_1} f'_{x_1} \pm \frac{x_2}{a_2} f'_{x_2} \pm \dots \pm \frac{x_k}{a_k} f'_{x_k}$.

(iv) $f = \frac{x_1}{a_1} f'_{x_1} + \left(1 - \frac{b_1}{a_1}\right) \frac{x_2}{a_2} f'_{x_2} + \left[1 - \frac{b_2}{a_2} \left(1 - \frac{b_1}{a_1}\right)\right] \frac{x_3}{a_3} f'_{x_3} + \dots$

(v) Пусть $s \geq 1$ наименьшее натуральное число для которого $f^{(s)}(0) \neq 0$. Тогда f право-эквивалентна x^n и наше утверждение вытекает из (ii). $\square$

Следствие 4.0.4. *Невырожденные особенности* $\sum \pm x_i^2$ *и простые особенности, см.* [1], $A_k(x) = x^k$ $(k \geq 1)$, $D_k(x, y) = x^2 y + y^{k-1}$ $(k \geq 4)$, $E_6(x, y) = x^3 + y^4$, $E_7(x, y) = x^3 + xy^3$, $E_8(x, y) = x^3 + y^5$ *удовлетворяют* J(id). $\square$

Лемма 4.0.5. *Пусть* $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$ *и* $g \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^n)$. *Определим* $h \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^{m+n})$ *по формуле*

$$h(x,y) = f(x) + g(y),$$

для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ *и* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Функции* f *и* g *обладают свойством* $\mathrm{J}(\mathrm{id})$ *тогда и только тогда* h *обладает этим свойством.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $f(x) = F.f(x)$ и $g(y) = G.g(y)$ для некоторых векторных полей F и G определенных соответственно на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. Можем рассматривать эти поля как компоненты следующего векторного поля $H(x,y) = (F(x), G(y))$ на $\mathbb{R}^{m+n}$. Тогда $G.f = F.g = 0$ и, следовательно,

$$H.h(x,y) = F.f(x) + G.g(y) = f(x) + g(y) = h(x,y).$$

Достаточность. Предположим, что $h(x,y) = H.h(x,y)$, для некоторого векторного поля

$$H(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$$

на $\mathbb{R}^{m+n}$. Заметим, что

$$H.h(x,y) = (F,G).(f+g)(x,y) = \\ = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x) F_i(x,y) + \sum_{j=1}^{n} g'_{y_j}(y) G_j(x,y),$$

где $F = (F_1, \ldots, F_m)$ и $G = (G_1, \ldots, G_n)$.

Тогда $\bar{F}(x) = F(x,0)$ и $\bar{G}(y) = G(0,y)$ — векторные поля соответственно на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. По утверждению (i) Леммы 4.0.3 можем считать, что $0 \in \mathbb{R}^m$ и $0 \in \mathbb{R}^n$ — критические точки f и g соответственно. Тогда $f'_{x_i}(0) = 0$ и $g'_{y_j}(0) = 0$, откуда

$$f(x) = h(x,0) = H.h(x,0) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x) F_i(x,0) = \bar{F}.f(x).$$

Аналогично доказывается, что $g(y) = \bar{G}.g(y)$. $\square$

Определение 4.0.6 (см. напр. [1])**.** Функции $f_k \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^{m_k})$ $k = 1, 2$, называются *стабильно эквивалентными* если существуют таке невырожденные квадратичные формы

$$g_k(y_1, \ldots, y_{n_k}) = \sum_{i=1}^{n_k} \pm y_i^2, \qquad k = 1, 2,$$

что $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ и функции $f_1 + g_1$ и $f_2 + g_2$ определеные на $\mathbb{R}^{m_1+n_1}$ *право-эквивалентны.*

Из (ii) Леммы 4.0.3 следует, что каждая квадратичная форма обладает свойством J(id). Тогда из Леммы 4.0.5 получаем такое следствие:

Следствие 4.0.7. *Предположим, что функции $f_k \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^{m_k})$ $(k = 1, 2)$ стабильно эквивалентны. Тогда f_1 и f_2 одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют свойству* J(id)*.* □

Предложение 4.0.8. *Пусть*

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_m \geq 0} a_{i_1 \ldots i_m} \, x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \ \in \ \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_m]]$$

формальный ряд без начального члена, т.е. $f(0) = 0$. Тогда f удовлетворяет условию J(id) *в алгебре $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_m]]$.*

Доказательство. Необходимо найти такие формальные ряды

$$H_1, \ldots, H_m \in \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_m]],$$

что

$$f = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i} H_i.$$

Последнее соотношение определяет систему линейных уравнений на коэффициенты H_i которую можно рекуррентно разрешить. Детали мы опускаем. □

Это предложение позволяет надеяться, что условие J(id) выполняется для аналитических функций и, в частности, для многочленов (как обычно, сложность состоит в том, чтобы доказать сходимость рядов H_i). Мне неизвестно, действительно ли это так. С другой стороны, следующее утверждение показывает, что в неаналитическом случае условие $\mathrm{J}(\mathrm{id})$ может не выполняться.

Утверждение 4.0.9. *Пусть $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^m)$. Предположим, что существует такая сходящаяся к $0 \in \mathbb{R}^m$ последовательность $\{z_i\}$ критических точек функции f, что $f(z_i) \neq 0$. В частности, критическое* значение $0 \in \mathbb{R}$ *функции f не изолировано. Тогда f не обладает свойством* $\mathrm{J}(\mathrm{id})$, *т.е.* $f \notin \Delta(f, 0)$.

Замечание 4.0.10. Такие функции, очевидно, существуют. Например, пусть

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 1/x}}, & x \neq \frac{1}{\pi n}, \\ 0, & x = \frac{1}{\pi n}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Легко видеть, что g гладкая неотрицательная функция у которой 0 неизолированная точка множества уровня $g^{-1}(0)$. Тогда функция $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ удовлетворяет условиям Утверждения 4.0.9 и, следовательно, она не обладает свойством $\mathrm{J}(\mathrm{id})$.

Доказательство. Предположим, что $f = H.f$ для некоторого векторного поля H. Так как z_i критическая точка, то $df(z_i) = 0$ для всех i, откуда $H.f(z_i) = 0$. Но, по предположению, $f(z_i) \neq 0$. Поэтому соотношение $f(z_i) = H.f(z_i)$ не может иметь места ни в какой окрестности 0. $\square$

5. Доказательство Теоремы 1.3

Лемма 5.0.1. *Предположим, что $f \in C^\infty(M, P)$ удовлетворяет условию* (V). *Пусть $p : \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_P \to \mathcal{D}_P$ — естественная проекция на второй множитель. Тогда*

$$\begin{array}{lll} \textit{Случай} \;\; P = \mathbb{R}: & p(\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)) \;\subset\; \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} \\ \textit{Случай} \;\; P = S^1: & p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) \;\subset\; \mathcal{D}^E_{S^1}. \end{array}$$

Доказательство. Пусть $(h, \phi) \in \mathcal{S}_{MS^1}(f)$, т.е. $\phi \circ f = f \circ h$. Тогда $\phi = p(h, \phi)$. Мы утверждаем, что ϕ сохраняет множество $E_f = \{1, \dots, n\}$ исключительных значений f. Действительно, условие $\phi \circ f = f \circ \phi$ означает, что перестановка диффеоморфизмом h множеств уровня f согласована с перестановкой диффеоморфизмом ϕ значений f. Обозначим через Σ_f множество критических точек f. Так как h — диффеоморфизм, то он оставляет множества $f^{-1}(f(\Sigma_f))$ и $f^{-1}(f(\partial M))$ инвариантными. Поэтому ϕ сохраняет инвариантным множество $f(\Sigma_f) \cup f(\partial M) = E_f$.

Эти рассуждения доказывают лемму для случая $P = S^1$, так как, по определению, $\mathcal{D}^E_{S^1}$ состоит из сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, которые также оставляют инвариантным E_f. Если же $P = \mathbb{R}$, то ϕ также сохраняет порядок *конечного* множества E_f и, следовательно, оставляет неподвижной каждую его точку, т.е. $\phi \in \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$. $\square$

Теорема 1.3 вытекает теперь из Предложений 5.0.2 и 5.0.3.

Предложение 5.0.2. *Предположим, что $n \geq 1$ и f удовлетворяет условиям* (V) *и* (J). *Тогда $\mathcal{D}^e_P \subset p(\mathcal{S}_{MP}(f))$ и p обладает сечением-гомоморфизмом*

$$\Theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{S}_{MP}(f).$$

Предложение 5.0.3. *Если $n = 0$, то $p(\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)) = \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$, но глобальное сечение p существует тогда и только тогда, когда $f : M \to S^1$ является тривиальным расслоением.*

5.1. **Доказательство Предложения 5.0.2.** Напомним, что сечение $\Theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{S}_{MP}(f)$ проекции p должно иметь следующий вид $\Theta(\phi) = (\theta(\phi), \phi)$, где $\theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{D}_M$ — такой непрерывный гомоморфизм, что $\phi \circ f = f \circ \theta(\phi)$. Итак, нам нужно построить θ.

Для $i = 1, \dots, n$ пусть

- $L_i = f^{-1}(i)$ — i-й исключительный уровень f,
- $V_i = f^{-1}(i, i+1)$ — часть M между исключительными уровнями L_i и L_{i+1},
- $U_i = f^{-1}(i - \frac{1}{3}, i + \frac{1}{3})$ — окрестность L_i,
- $U_i^- = f^{-1}(i - \frac{1}{3}, i)$ и $U_i^+ = f^{-1}(i, i + \frac{1}{3})$ — соответственно *нижняя* и *верхняя* часть U_i.

Таким образом, ограничения f на U_i и V_i можно рассматривать как функции

$$U_i \to (i - \tfrac{1}{3}, i + \tfrac{1}{3}) \qquad \text{и} \qquad V_i \to (i, i+1).$$

Лемма 5.1.1. *В некоторой окрестности множества L_i существует такое векторное поле G_i, что*

$$G_i.f = f - i. \tag{5.1}$$

Доказательство. Отметим, что для каждой точки $z \in L_i$ существуют такие окрестность $U_z \subset U_i$ и векторное поле G_z на U_z, что $G_z.f = f - i$. Для критических точек f это следует из условия (J), а для регулярных точек — из утверждения (1) Леммы 4.0.3. В последнем случае мы можем положить $G_i = (x_1, 0, \dots, 0)$ тех в координатах, в которых $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 + i$. Пусть $\{U'_j\}$ — конечное покрытие L_i вписанное в покрытие $\{U_z\}_{z \in L_i}$ этого множества. Тогда на каждом U'_j мы имеем такое векторное поле G'_j, что $G'_j.f = f - i$. Пусть $\mu_j : U'_j \to [0,1]$ — разбиение единицы подчиненное $\{U'_j\}$, т.е. $\operatorname{supp} \mu_j \subset U'_j$ и $\sum_j \mu_j \equiv 1$. Определим следующее векторное поле G_i на окрестности L_i по формуле: $G_i = \sum_j \mu_j G'_j$. Тогда

$$G_i.f = \Big(\sum_j \mu_j \, G'_j\Big).f = \sum_j \mu_j \, \big(G'_j.f\big) = \sum_j \mu_j \, (f - i) = f - i. \quad \square$$

Уменьшая U_i, если необходимо, можно считать, что G_i определено даже на некоторой окрестности замыкания $\overline{U_i}$. Тогда $G_i.f < 0$ на U_i^- и $G_i.f > 0$ на U_i^+. Пусть $\mathcal{G}_i : U_i \times (-\delta, \delta) \to M$ — локальный поток порожденный G_i.

Заметим, что у f нет критических точек в V_i, поэтому там существует такое векторное поле H_i, что $H_i.f > 0$. Можно даже предполагать, что H_i порождает *глобальный* поток $\mathcal{H}_i : V_i \times \mathbb{R} \to V_i$.

Более того, не нарушая условие (5.1) можно также считать, что $G_i(z) = H_i(z)$ для $z \in V_i$, и $G_i(z) = -H_{i-1}(z)$ для $z \in V_{i-1}$ при условии, что вектор $G_i(z)$ определен.

Тогда $\mathcal{G}_i(z,t) = \mathcal{H}_i(z,t)$ для $z \in U_i^+$ и $\mathcal{G}_i(z,t) = \mathcal{H}_{i-1}(z,-t)$ для $z \in U_i^-$.

Замечание 5.1.2. Векторные поля G_i и H_i можно схематически представить указывая поведение f вдоль их траекторий, см. Рис. 1a) и 2a). Таким образом, f возрастает вдоль H_i и вдоль "верхней части" G_i, а также убывает вдоль "нижней" части G_i. Жирные точки на этих рисунках означают, что G_i касается i-го исключительного множества уровня f.

Предположим, что либо $P = \mathbb{R}$ либо $P = S^1$ но в последнем случае n четно. Тогда векторные поля H_i и G_i позволяют определить глобальное векторное поле F на M. Чтобы построить F, достаточно просто изменить знаки у полей H_{2i} и G_{2i} (имеющих четные индексы), см. Рис. 1b) и 2b).

На Рис. 1c) изображено такое векторное поле для функции высоты на 2-торе. Жирным обозначены критические точки f. Вместе с белыми точками они образуют множество сингулярных точек поля F. Существование F упрощает доказательство. Но мы не будем использовать этот подход, так как в случае, когда $P = S^1$ и n нечетное, глобальное векторное поле F не существует, см. Рис. 2c).

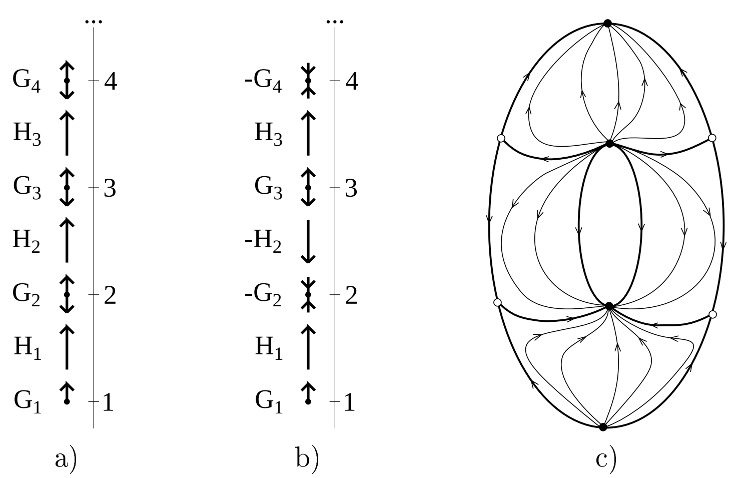

Рис. 1

Лемма 5.1.3. *Для каждого $\phi \in \mathcal{D}^e_P$ существует такой диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}_M$, что $\phi \circ f = f \circ h$.*

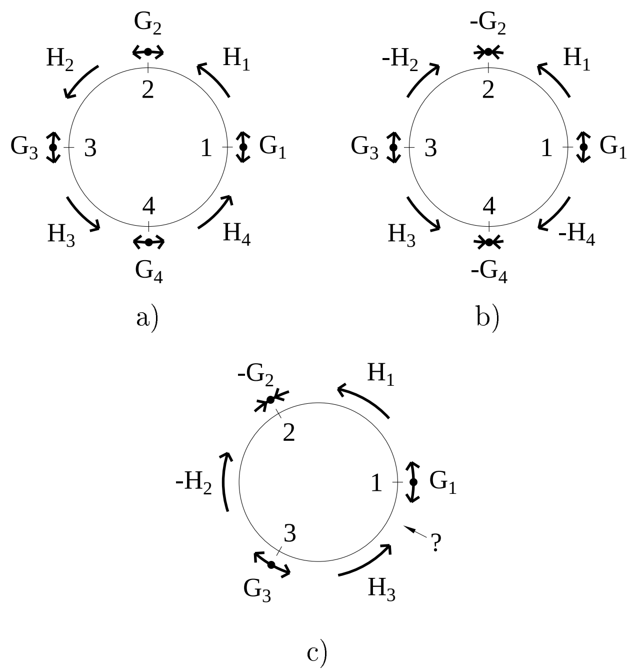

Рис. 2

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathcal{D}^e_P$. Мы найдем такие гладкие функции $\sigma_i : V_i \to \mathbb{R}$ и $\rho_i : U_i' \to (-\delta, \delta)$, определенные на некоторых окрестностях $U_i' \subset U_i$ множеств L_i, что следующие отображения $h_i : V_i \to V_i$ и $g_i : U_i' \to U_i$, заданные формулами:

$$h_i(z) = \mathcal{H}_i(z, \sigma_i(z)) \qquad \text{и} \qquad g_i(z) = \mathcal{G}_i(z, \rho_i(z)), \tag{5.2}$$

являются вложениями, которые удовлетворяют условиям: $\phi \circ f = f \circ h_i$ на V_i, и $\phi \circ f = f \circ g_i$ на U_i'.

Более того, все эти отображения h_i и g_i будут совпадать в общих точках определения и, потому определять некоторый диффеоморфизм h многообразия M, удовлетворяющий утверждению леммы.

Шаг 1. Определение σ_i и h_i. Для каждой точки $x \in V_i$ обозначим через $\omega_x \subset V_i$ ее траекторию относительно $\mathcal{H}_i$. Заметим, что f диффеоморфно отображает ω_x на открытый интервал $(i, i+1)$ и что ω_x трансверсально пересекает множества уровня f. В частности, пересечение ω_x с множеством уровня $f^{-1}(\phi \circ f(x))$ состоит из единственной точки, которую мы обозначим через y, см. Рис. 3. Положим

$$h_i(x) = y,$$

тогда $f \circ h_i(x) = \phi \circ f(x)$. Пусть $\sigma_i(x)$ — время вдоль траектории ω_x от точки x до y относительно потока $\mathcal{H}_i$. Тогда $y = h_i(x) = \mathcal{H}_i(x, \sigma_i(x))$.

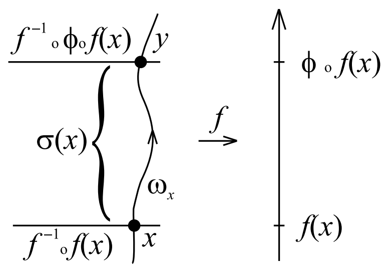

Рис. 3

Покажем, что σ_i гладкая функция. Отсюда будет следовать гладкость h_i.

Пусть $z \in V_i$. Тогда $H_i(z) \neq 0$. Поэтому можно считать, что в некоторых локальных координатах $(x_1, \ldots, x_m)$ в окрестности z мы имеем $H_i(x) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Упростим обозначения, положив

$$\overline{x} = (x_2, \ldots, x_m) \qquad \text{и} \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \overline{x}).$$

Тогда $\mathcal{H}_i(x, t) = (x_1 + t, \overline{x})$. Предположим, что точка y принадлежит траектории ω_x точки $x = (x_1, \overline{x})$. Тогда $y = (y_1, \overline{x})$, а время вдоль ω_x между x и y равно $y_1 - x_1$.

Так как $H_i.f = f'_{x_1} \neq 0$, то существует единственная гладкая функция $q(x)$ такая, что $x_1 = q(f(x), \overline{x})$. Тогда из определения

σ_i вытекает, что

$$(5.3) \quad \sigma_i(x) = q(\phi \circ f(x), \overline{x}) - q(f(x), \overline{x}) = q(\phi \circ f(x), \overline{x}) - x_1.$$

Следовательно, σ_i и h_i гладкие.

Проверим, что h_i диффеоморфизм. Пусть $z \in V_i$. По Теореме 19 из [4] h_i будет диффеоморфизмом в окрестности V_i тогда и только тогда, когда для каждой точки $z \in V_i$ выполняется неравенство:

$$(5.4) \qquad H_i.\sigma_i(z) + 1 > 0.$$

Заметим, что

$$H_i.\sigma_i \; = \; \tfrac{\partial \sigma_i}{\partial x_1} \; = \; q'_{x_1}(\phi \circ f(x), \overline{x}) \cdot \phi'(f(x)) \cdot f'_{x_1}(x) \, - \, 1.$$

Так как ϕ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, то $\phi' > 0$. Кроме того, f'_{x_1} и q'_{x_1} имеют одинаковые знаки. Поэтому $H_i.\sigma_i + 1 > 0$.

Шаг 2. Определение ρ_i и g_i. Пусть $z \in L_i$. Напомним, что мы хотим определить g_i по формуле (5.2). Для простоты предположим, что $f(z) = 0$. Тогда $\phi(0) = 0$ и из леммы Адамара получаем, что $\phi(s) = s \cdot \bar{\phi}(s)$ для некоторой гладкой функции $\bar{\phi}(s)$ такой, что $\bar{\phi}(0) = \phi'(0) > 0$.

Теперь Лемма 3.4.2, см. (3.4), показывает, что соотношение

$$\phi \circ f = f \circ \mathcal{G}_i(x, \rho_i(x))$$

можно переписать в следующем виде:

$$f(x) \cdot \bar{\phi}(f(x)) = f(x) \cdot e^{\varepsilon \rho_i(x)}.$$

Откуда

$$(5.5) \qquad \rho_i(x) = \varepsilon \ln \bar{\phi}(f(x)).$$

Таким образом, ρ_i и g_i гладкие в некоторой окрестности U'_i множества L_i. Проверим, что g_i — диффеоморфизм, т.е. что $G_i.\rho_i(z) > -1$. Заметим, что

$$G_i.\rho_i \; = \; G_.(\varepsilon \ln \bar{\phi}(f)) \; = \; \frac{\varepsilon \bar{\phi}'_t(f)}{\bar{\phi}(f)} \, G_.f \; = \; \frac{\varepsilon \bar{\phi}'_t(f)}{\bar{\phi}(f)} \, f.$$

Так как $f(z) = 0$, то мы получаем, что $G_i.\rho_i(z) = 0 > -1$. Следовательно, g_i — диффеоморфизм в окрестности z.

Шаг 3. Согласованность h_i и g_i. Нужно показать, что $g_i = h_i$ на U_i^+ и $g_i = h_{i-1}$ на U_i^-.

Возьмем точку $z \in U_i^+$. Тогда $\phi \circ f = f \circ h_i(z) = f \circ g_i(z)$. Другими словами:

$$f \circ \mathcal{H}_i(z, \sigma_i(z)) = f \circ \mathcal{G}_i(z, \rho_i(z)).$$

Заметим, что функция f монотонна вдоль траекторий потока $\mathcal{H}_i$, а также вдоль тех траекторий потока $\mathcal{G}_i$, которые не лежат в L_i. Так как $\mathcal{G}_i(z,t) = \mathcal{H}_i(z,t)$ на U_i^+, то $\sigma_i(z) = \rho_i(z)$ и

$$g_i(z) = \mathcal{G}_i(z, \rho_i(z)) = \mathcal{H}_i(z, \sigma_i(z)) = h_i(z).$$

Аналогично, из того, что $\mathcal{G}_i(z,t) = \mathcal{H}_{i-1}(z,-t)$ на U_i^- следует, что $\rho_i(z) = -\sigma_{i-1}(z)$ и $g_i(z) = \mathcal{G}_i(z, \rho_i(z)) = \mathcal{H}_{i-1}(z, \rho_{i-1}(z)) = h_{i-1}(z)$. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, мы видим, что соответствие $\phi \mapsto h$ есть отображение $\theta : \mathcal{D}_P^e \to \mathcal{D}_M$ такое, что $(\theta(\phi), \phi) \in \mathcal{S}_{MP}(f)$. Остается доказать следующие два утверждения.

Утверждение 5.1.4. *θ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}_P^e$, $\phi_0 = \phi_1 \circ \phi_2$, $\theta_k = \theta(\phi_k)$, $k = 0, 1, 2$. Нужно установить, что диффеоморфизм $\hat{\theta} = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_0^{-1}$ совпадает id_M.

Заметим, что $\hat{\theta} \in \mathcal{S}_M(f)$. Действительно, из $\phi_k \circ f = f \circ \theta_k$, получаем, что

$$f \circ \theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_0^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_0^{-1} \circ f = f.$$

Это означает, что $\hat{\theta} \in \mathcal{S}_M(f)$ и, поэтому, оставляет инвариантным каждое множество уровня f. Пусть $z \in V_i$ и пусть ω_z ее траектория относительно потока $\mathcal{H}_i$. Из построения θ_k вытекает, что этот диффеоморфизм сохраняет траектории ω_z $(k = 0, 1, 2)$, поэтому, таким же свойством обладает и $\hat{\theta}$. Следовательно, $\hat{\theta}$ также сохраняет пересечение $z = f^{-1}f(z) \cap \gamma_z$, т.е. $\hat{\theta}(z) = z$. Таким образом, $\hat{\theta}$ тождественен на $\overline{M \setminus L}$.

Если $z \in L_i$, то $\theta_k(x) = \mathcal{G}_i(x, \rho_i^k(x))$ для некоторой гладкой функции ρ_i^k, $k = 0, 1, 2$. Но из (5.5) вытекает, что ρ_i^k постоянна на L_i также как и f. Отсюда следует, что $\hat{\theta}$ тождественен и на L_i. $\square$

Утверждение 5.1.5. *Отображение $\theta : \mathcal{D}^e_P \to \mathcal{D}_M$ непрерывно в C^∞-топологиях этих групп.*

Доказательство. Это утверждение следует из формул (5.2), (5.3) и (5.5). Детали мы опускаем. $\square$

5.2. **Доказательство Предложения 5.0.3.** Напомним, что из условий Предложения 5.0.3, т.е. $n = 0$, вытекает, что многообразие M замкнуто, $P = S^1$, а отображение $f : M \to S^1$ является локально тривиальным расслоением. Покажем, что $p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) = \mathcal{D}^+_{S^1}$.

Пусть H — векторное поле градиента f (в некоторой метрике на M), и $\mathcal{H}$ — поток порожденный H. Тогда $H.f > 0$ на всем M. Утверждается, что для каждого $\phi \in \mathcal{D}^+_{S^1}$ существует гладкая функция $\sigma : M \to \mathbb{R}$ такая, что отображение $h : M \to M$ определенное по формуле $h(x) = \mathcal{H}(x, \sigma(x))$ является диффеоморфизмом и $\phi \circ f = f \circ h$.

Чтобы построить σ, заметим, что существует такая изотопия $\phi_t : S^1 \to S^1$, что $\phi_0 = \mathrm{id}_{S^1}$ и $\phi_1 = \phi$. Возьмем точку $x \in M$ и рассмотрим путь $\gamma : [0,1] \to S^1$ образа $f(x)$ этой точки под действием изотопии ϕ_t, т.е. $\gamma(t) = \phi_t(f(x))$. Так как f — локально тривиальное расслоение, то существует *единственное* поднятие $\omega : [0,1] \to M$ пути γ в M, которое начинается в точке x и содержится в траектории точки x относительно $\mathcal{H}$. Таким образом, $\omega(0) = x$, $f(\omega(x)) = \gamma(t) = \phi_t(f(x))$.

Пусть $\sigma(x)$ — время вдоль траектории ω относительно $\mathcal{H}$ и $h(x) = \mathcal{H}(x, \sigma(x))$. Тогда, как и на Шаге 2 Леммы 5.1.3, можно показать, что σ и $\mathcal{H}$ гладкие.

Заметим, что определение σ и h зависит от изотопии ϕ_t. Так как группа $\mathcal{D}^+_{S^1}$ не является стягиваемой, то невозможно выбрать h непрерывно зависящим от ϕ.

Предположим теперь, что f — тривиальное расслоение, т.е. $M = N \times S^1$ и $f : N \times S^1 \to S^1$ определяется по формуле $f(x,s) = s$. Тогда гомоморфизм $\theta : \mathcal{D}^+_{S^1} \to \mathcal{D}_M$ можно определить по формуле $\theta(\phi)(x,s) = (x, \phi(s))$. При этом $\phi \circ f(x,s) = \phi(s) = f \circ \theta(\phi)(x,s)$.

Обратно, пусть существует такое непрерывное отображение $\theta : \mathcal{D}^+_{S^1} \to \mathcal{D}_M$, что $\phi \circ f = f \circ \theta(\phi)$. Мы всегда можем считать, что $\theta(\mathrm{id}_{S^1}) = \mathrm{id}_M$. Пусть $\phi_t : S^1 \to S^1$ — "вращение" S^1: $\phi_t(s) = s + t \mod 1$. Эта изотопия индуцирует изотопию $h_t = \theta(\phi_t)$ многообразия M (отметим, что а приори h_t является только непрерывным, но этого достаточно для доказательства тривиальности f). Так как $\phi_0 = \phi_1 = \mathrm{id}_P$, мы также можем считать, что $h_0 = \theta(\phi_0) = \theta(\phi_1) = h_1$.

Обозначим $N = f^{-1}(0)$. Тогда h_t индуцирует непрерывное отображение $q : N \times S^1 \to M$ определенное по формуле $q(x,s) = h_s(x)$. Легко проверить, что q — гомеоморфизм. Более того, композиция $N \times S^1 \xrightarrow{q} M \xrightarrow{f} S^1$ имеет вид:

$$f \circ q(x,s) = f \circ h_s(x) = \phi_s \circ f(x) = f(x) + s = 0 + s = s.$$

Таким образом, она совпадает с проекцией $N \times S^1 \to S^1$. Следовательно, f определяет тривиальное расслоение. $\square$

6. Пространства $\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1}$.

Наделим группы $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^+_{S^1}$ соответствующими сильными C^r-топологиями Уитни для какого-нибудь $r = 0, 1, \dots, \infty$. Эти топологии индуцируют некоторые топологии на $\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}^e_{S^1}$, а также на пространствах *левых* смежных классов $\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1}$.

Лемма 6.0.1. *Группы $\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{D}^e_{S^1}$ для $n \geq 1$ стягиваемы.*

Доказательство. Стягивание каждой из этих групп задается стандартной формулой: $H(\phi, t)(x) = (1-t)x + t\phi(x)$. $\square$

Теорема 6.1. *Существуют гомеоморфизмы*

$$\mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^{n-2} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \approx S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Доказательство. Случай $P = \mathbb{R}$. Пусть $q : \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ — естественная проекция. Рассмотрим следующее подмножество в $\mathbb{R}^{n-2}$:

$$\Delta^{n-2} = \{(x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-2} < n\}.$$

Очевидно, что Δ^{n-2} открыто, выпукло и, следовательно, диффеоморфно $\mathbb{R}^{n-2}$. Мы покажем, что $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}/\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e}$ канонически гомеморфно Δ^{n-2}.

Рассмотрим отображение *вычисления* $e : \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]} \to \Delta^{n-2}$ определенное по формуле $e(\phi) = \bigl(\phi(2), \ldots, \phi(n-1)\bigr)$ для $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$. Очевидно, что оно индуцирует такую биекцию $c : \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}/\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e} \to \Delta^{n-2}$, что

$$e = c \circ q : \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]} \xrightarrow{\ q\ } \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}/\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e} \xrightarrow{\ c\ } \Delta^{n-2}.$$

Нам нужно показать, что c является гомеморфизмом во всех C^r-топологиях. Легко видеть, что e непрерывно в C^0-топологии (C^0-непрерывно). Поэтому оно непрерывно во всех C^r-топологиях для $r = 1, \ldots, \infty$. Тогда из определения фактор-топологии на $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}/\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e}$ получаем, что c также C^r-непрерывно для $r = 0, \ldots, \infty$.

Мы покажем, что e допускает сечение $s : \Delta^{n-2} \to \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$ которое C^r-непрерывно для всех $r = 0, \ldots, \infty$. Отсюда будет следовать, что $c^{-1} = e \circ s$, а значит, и c — C^r-гомеоморфизмы.

Рассмотрим другое подмножество в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < n+1\}.$$

Его можно отождествить с подмножеством $\{1\} \times \Delta^{n-2} \times \{n\}$ в Δ^n.

Лемма 6.1.1. *Существует гладкая функция $u : \Delta^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

(1) $u'_t(x_1, \ldots, x_n, t) > 0$ для всех $(x_1, \ldots, x_n, t) \in \Delta^n \times \mathbb{R}$;
(2) $u(x_1, \ldots, x_n, t) = t$ для $t \le 0$ и $t \ge n+1$;
(3) $u\,(x_1, \ldots, x_n, k) = x_k$ для $k = 1, 2, \ldots, n$.
(4) $u\,(1, 2, \ldots, n, t) = t$ для $t \in \mathbb{R}$.

Из этой леммы вытекает, что функция u индуцирует сечение $s : \Delta^{n-2} \to \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$ определенное по формуле:

$$s(x_2, \ldots, x_{n-1})(t) = u(1, x_2, \ldots, x_{n-1}, n, t). \tag{6.1}$$

Заметим, что в силу (2), диффеоморфизмы $s(x_2, \ldots, x_{n-1})$ неподвижны вне $[0, n+1]$. Поэтому u является равномерно непрерывной, а s будет непрерывным во всех C^r-топологиях.

Действительно, пусть $x = (x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Delta^{n-2}$, $\varepsilon : M \to (0, \infty)$ — строго положительная непрерывная функция и B_ε — базисная окрестность ϕ в некоторой C^r-топологии состоящая из таких $\psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$, что $\sum\limits_{i=0}^{r} \|D^k s(x)(z) - D^k \psi(z)\| < \varepsilon(z)$ для всех $z \in M$.

Из равномерной непрерывности u вытекает существование такой окрестности V точки x в Δ^n, что

$$\sum_{i=0}^{r} |D^k s(x)(z) - D^k s(y)(z)| < \varepsilon(z)$$

для всех $y \in V$ и $z \in M$. Таким образом, $s(V \cap \Delta^{n-2}) \subset B_\varepsilon$, откуда s является непрерывным в C^r-топологии для всех $r < \infty$. Поэтому оно также непрерывно в C^∞-топологии. Это доказывает случай $\mathbb{R}$ нашей теоремы по модулю Леммы 6.1.1. $\square$

Доказательство Леммы 6.1.1. Предположим, что u уже определена. Положим $v = u'_t$. Тогда

(1′) $v > 0$;
(2′) $v(x_1, \dots, x_n, t) = 1$, для $t \notin (0, n+1)$;
(3′) $\int\limits_k^{k+1} v(x_1, \dots, x_n, t) dt = x_{k+1} - x_k$;
(4′) $v(1, 2, \dots, n, t) \equiv 1$

и $u(x, t) = \int\limits_0^t v(x, s) ds$.

Таким образом, достаточно построить функцию v, удовлетворяющую условиям (1′)-(4′). Тогда (1)-(4) также будут выполняться.

Для каждой пары чисел $a < b \in \mathbb{R}$ мы сейчас определим такую гладкую функцию $q_{a,b}(t, s) \geq 0$, что

(2″) $q_{a,b}(t, s) = 0$ для $t \notin (a, b)$ и $s \in \mathbb{R}$;
(3″) $\int\limits_a^b q_{a,b}(t, s) dt = s - (b - a)$.

Тогда из (3″) и условия $q_{a,b}(t, s) \geq 0$ получим, что

(4″) $q_{a,b}(t, b - a) = 0$ для $t \in \mathbb{R}$.

Следовательно, v можно будет определить по формуле:

$$v(x_1,\dots,x_n,t)=1+\sum_{k=0}^{n}q_{k,k+1}(t,x_{k+1}-x_k)=$$
$$=1+q_{0,1}(t,x_1)\ +\ q_{1,2}(t,x_2-x_1)\ +\ \cdots\ +\ q_{n,n+1}(t,x_{n+1}-x_n).$$

Действительно, $v>0$. Далее, $(2')$ и $(4')$ вытекают соответственно из $(2'')$ и $(4'')$. Наконец, проверим $(3')$. При $k=0,\dots,n$ получим

$$\int\limits_{k}^{k+1} v(x_1,\dots,x_n,t)dt \overset{(2'')}{=} \int\limits_{k}^{k+1}\left(1+q_{k,k+1}(t,x_{k+1}-x_k)\right)dt \overset{(3'')}{=}$$
$$=(k+1-k)+(x_{k+1}-x_k-1)=x_{k+1}-x_k.$$

Итак, остается построить $q_{a,b}\geq 0$ удовлетворяющую $(2'')$ и $(3'')$. Рассмотрим следующие гладкие функции

$$\alpha(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\cdot e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}}, & t\in(a,b)\\ 0, & t\notin(a,b),\end{cases}$$

$$\beta(t,c)=e^{c\cdot\alpha(t)}-1 \qquad \text{и} \qquad \gamma(c)=\int\limits_{a}^{b}\beta(t,c)dt.$$

Тогда $\gamma(c)$ гладкая, $\lim\limits_{c\to-\infty}\gamma(c)=-(b-a)$, $\lim\limits_{c\to+\infty}\gamma(c)=+\infty$, $\gamma(0)=0$ и

$$\gamma_c'(c)=\int\limits_{a}^{b}\beta_c'(t,c)dt=\int\limits_{a}^{b}\alpha(t)e^{c\cdot\alpha(t)}dt>0.$$

Таким образом, γ является диффеоморфизмом $\mathbb{R}$ на $\big(-(b-a),+\infty\big)$.

Пусть $\gamma^{-1}:\big(-(b-a),\infty\big)\to\mathbb{R}$ — обратный к γ диффеоморфизм. Тогда следующая функция удовлетворяет $(2'')$ и $(3'')$:

$$q_{a,b}(t,s)=\beta(t,\gamma^{-1}(s-(b-a))).$$

Действительно, выполнение $(2'')$ очевидно. Проверим $(3'')$:

$$\int_a^b q_{a,b}(t,s)dt \;=\; \int_a^b \beta(t,\gamma^{-1}(s-(b-a)))dt \;=$$
$$= \gamma\big(\gamma^{-1}(s-(b-a))\big) \;=\; s-(b-a). \quad \square$$

Доказательство. Случай $P = S^1$. Напомним, что n-е конфигурационное пространство S^1 это следующее подмножество

$$\mathcal{F}_n(S^1) = \{(x_1,\dots,x_n) \in T^n \mid x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}$$

n-мерного тора $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

Обозначим через $F_n(S^1)$ связную компоненту $\mathcal{F}_n(S^1)$ содержащую точку $(1,\dots,n)$. Пусть также

$$\Delta^{n-1} = \{(x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < n\}.$$

Тогда Δ^{n-1} является открытым и выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^{n-1}$. Поэтому оно диффеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$.

Лемма 6.1.2. $F_n(S^1)$ *диффеоморфно* $\Delta^{n-1} \times S^1$.

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем окружность S^1 как $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$. Рассмотрим отображение $\xi : \mathcal{F}_n(S^1) \to \Delta^{n-1} \times S^1$ определенное по формуле

$$\xi(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = \big(x_1 - x_n,\ \dots,\ x_{n-1} - x_n,\ [x_n]\big).$$

Здесь все разности берутся по модулю n, а $[x]$ означает $x \bmod n$. Так как $x_a \neq x_{a'}$ для $a \neq a'$, то ξ корректно определено. Заметим также, что $\xi(1,\dots,n-1,n) = (1,\dots,n-1,[n])$. Очевидно, что ξ гладкое отображение обладающее сечением $s : \Delta^{n-1} \times S^1 \to \mathcal{F}_n(S^1)$, $s(t_1,\dots,t_{n-1},x) = (t_1 + x,\dots,t_{n-1}+x,x)$. Так как $\Delta^{n-1} \times S^1$ связно, то ξ индуцирует диффеоморфизм связной компоненты $\mathcal{F}_n(S^1)$ содержащей точку $(1,\dots,n)$, т.е. $F_n(S^1)$, на $\Delta^{n-1} \times S^1$. $\square$

Рассмотрим отображение *вычисления* $e : \mathcal{D}^+_{S^1} \to \mathcal{F}_n(S^1)$ заданное по формуле:

$$e(\phi) = (\phi(1),\dots,\phi(n)), \quad \phi \in \mathcal{D}^+_{S^1}. \tag{6.2}$$

Так как группа $\mathcal{D}^+_{S^1}$ связна, то образ $e(\mathcal{D}^+_{S^1})$ совпадает с $F_n(S^1)$, т.е. со связной компонентой пространства $\mathcal{F}_n(S^1)$ содержащей точку $e(\mathrm{id}_{S^1}) = (1, \dots, n)$.

Так же как и в случае $P = \mathbb{R}$, отображение e постоянно на смежных классах $\mathcal{D}^+_{S^1}$ по $\mathcal{D}^e_{S^1}$ и индуцирует такую непрерывную биекцию $\widetilde{e} : \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \to F_n(S^1)$, что

$$e = \widetilde{e} \circ q : \mathcal{D}^+_{S^1} \xrightarrow{\quad q \quad} \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \xrightarrow{\quad \widetilde{e} \quad} F_n(S^1).$$

Здесь q — фактор-отображение. Таким образом, чтобы показать, что $\widetilde{e}$ — гомеоморфизм, достаточно установить, что композиция отображений $\xi \circ \widetilde{e} : \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \to \Delta^{n-1} \times S^1$ является гомеоморфизмом во всех топологиях Уитни.

Рассмотрим композицию:

$$E = \xi \circ \widetilde{e} \circ q : \mathcal{D}^+_{S^1} \xrightarrow{q} \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} \xrightarrow{\widetilde{e}} F_n(S^1) \xrightarrow{\xi} \Delta^{n-1} \times S^1$$

Также, как и в предыдущем случае, достаточно найти непрерывное сечение $s : \Delta^{n-1} \times S^1 \to \mathcal{D}^+_{S^1}$ отображения E.

Пусть $u : \Delta^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, построенная в Лемме 6.1.1, но для $n-1$, а не для n. Тогда u отображает $\Delta^{n-1} \times [0, n]$ на $[0, n]$ так, что $u(x, 0) = 0$ и $u(x, n) = n$ для всех $x \in \Delta^{n-1}$. Следовательно, u индуцирует *непрерывное* отображение, $\omega : \Delta^{n-1} \times S^1 \to S^1$ получающееся факторизацией $[0, n]$ на S^1 при помощи склейки концов 0 и n.

Более того, $u'_t(x, 0) = u'_t(x, n) = 1$ и $u^{(s)}_t(x, 0) = u^{(s)}_t(x, n) = 0$ для $s \geq 2$ и $x \in \Delta^{n-1}$. Поэтому, ω принадлежит классу C^∞. Теперь несложно проверить, что отображение $s : \Delta^{n-1} \times S^1 \to \mathcal{D}^+_{S^1}$ определенное формулой:

$$s(x_1, \dots, x_{n-1}, t)(\tau) \;=\; \omega(x_1, \dots, x_{n-1}, \tau) + t \mod n \tag{6.3}$$

является непрерывным сечением E. Теорема 6.1 доказана. $\square$

6.2. **Циклическое действие на $\mathcal{F}_n(S^1)$.** Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_n$ на $\mathcal{F}_n(S^1)$ порожденное циклическим сдвигом $\nu : \mathcal{F}_n(S^1) \to \mathcal{F}_n(S^1)$ координат:

$$\nu(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1).$$

Очевидно, что это действие свободно и $\nu(F_n(S^1)) = F_n(S^1)$. Кроме этого, несложно видеть, что ν сохраняет ориентацию $F_n(S^1)$ тогда и только тогда, когда n нечетно.

Предположим, что $n = cd$ и пусть $\mathbb{Z}_c$ — циклическая подгруппа порядка c в $\mathbb{Z}_n$ порожденная ν^d.

Лемма 6.2.1. *Если n — четно, а $d = n/c$ — нечетно, то $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_c$ диффеоморфно "скрученному" произведению*

$$F_n(S^1)/\mathbb{Z}_c \approx \Delta^{n-1} \mathbin{\widetilde{\times}} S^1,$$

В остальных случаях, $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_c \approx \Delta^{n-1} \times S^1$.

Доказательство. Лемма вытекает из того факта, что ν^d обращает ориентацию тогда и только тогда, когда n четно, а d — нечетно. $\square$

7. Исключительные значения

Предположим, что $f \in C^\infty(M, P)$ удовлетворяет условию (V). Каждому $g \in \mathcal{O}_{MP}(f)$ мы сейчас сопоставим множество его исключительных значений и дадим условие, когда это соответствие является непрерывным.

Если $P = \mathbb{R}$, то для каждого $g \in \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$ упорядоченное по возрастанию множество его исключительных значений представляет собой точку в

$$\Delta^{n-2} \equiv \{1\} \times \Delta^{n-2} \times \{n\} \subset \Delta^n,$$

т.к. минимальное и максимальное значения (1 и n) неподвижны относительно $\mathcal{D}_{M\mathbb{R}}$. Следовательно, мы получаем корректно определенное отображение

$$k : \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \to \Delta^{n-2}.$$

Предположим, что $P = S^1$. Тогда исключительные значения f упорядочены циклически. Поэтому множество исключительных значений $g \in \mathcal{O}_{MS^1}(f)$ можно рассматривать как точку $[g]$ в фактор-пространстве $\mathcal{F}_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$. Отметим, что мы действуем *связной* группой $\mathcal{D}^+_{S^1}$, поэтому $[g]$ принадлежит связной компоненте $\mathcal{F}_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$, содержащей класс множества $1, \ldots, n$ исключительных f. Эта связная компонента есть $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$. Таким образом, мы получаем отображение:

$$k : \mathcal{O}_{MS^1}(f) \to F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n.$$

По Лемме 6.2.1 $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$ диффеоморфно пространству $S^1 \times \Delta^{n-1}$ для четных n и пространству $S^1 \widetilde{\times} \Delta^{n-1}$ для четных n.

Мы дадим здесь достаточное условие для для непрерывности k. Кроме того, мы покажем, что без этого условия непрерывность k может нарушаться даже в C^∞-топологии $\mathcal{O}_{MP}(f)$.

Лемма 7.0.1. *Предположим, что каждый* критический *уровень f содержит либо связную компоненту ∂M либо существенную критическую точку. Тогда k непрерывно в индуцированной C^∞-топологии орбиты $\mathcal{O}_{MP}(f)$.*

Доказательство. Достаточно установить непрерывность k в точке f. Возьмем $\varepsilon \in (0, 1/3)$ и окрестность $W = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (i-\varepsilon, i+\varepsilon)$ множества исключительных значений отображения f. Необходимо найти такую C^∞-окрестность $\mathcal{U}$ функции f в $C^\infty(M, P)$, что $k(\mathcal{U} \cap \mathcal{O}_{MP}(f)) \subset W$.

Для $i = 1, \ldots, n$ обозначим через $C_i = \Sigma_f \cap f^{-1}(i)$ множество критических точек f принадлежащих i-му исключительному множеству уровня f. Очевидно, $C_i \cap C_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Кроме того, C_i пусто тогда и только, когда i является граничным, но не критическим значением f.

Зафиксируем на M какую-нибудь риманову метрику. Тогда для каждого $g \in C^\infty(M, P)$ можно определить норму дифференциала $\|dg(x)\|$. Заметим, что $\|df\| = 0$ на C_i. Следовательно, существуют такое $\delta > 0$ и, для каждого $i = 1, \ldots, n$, такая компактная окрестность V_i множества C_i, что

- $V_i = \emptyset$ при условии, что $C_i = \emptyset$;
- $\|df\| > \delta$ на $\overline{M \setminus V}$, где $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ и
- $V_i \cap V_j = \emptyset$ для $i \neq j$.

Пусть Λ — множество критических значений f, не являющихся граничными. Если $i \in \Lambda$, то по предположению найдется существенная критическая точка $z_i \in C_i \subset V_i$. Поэтому для окрестности V_i можно найти такую окрестность $\mathcal{U}_i$ отображения f в $C^\infty(M, P)$, что каждое $g \in \mathcal{U}_i$ имеет критическую точку в V_i.

Пусть еще $\mathcal{U}_0$ — C^1-окрестность f в $C^\infty(M, P)$, состоящая из таких гладких отображений, что

(i) $\|dg\| > \delta$ на $\overline{M \setminus V}$, и
(ii) $|f - g| < \varepsilon$.

Обозначим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cap \big(\bigcap\limits_{i \in \Lambda} \mathcal{U}_i\big)$. Тогда $k(\mathcal{U} \cap \mathcal{O}_{MP}(f)) \subset W$.

Действительно, предположим, что $g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{O}_{MP}(f)$. Нужно показать, что i-е исключительное значение g отличается от i меньше чем на ε. Так как g имеет ровно n исключительных значений, то достаточно установить, что каждый интервал вида $(i - \varepsilon, i + \varepsilon)$ для $i = 1, \dots, n$ содержит исключительное значение g.

Из (i) получаем, что g может иметь критические точки только в V. Если $i \in \Lambda$, то, по построению $\mathcal{U}_i$, отображение g имеет критическую точку в V_i.

Более того, из (ii) вытекает, что граничные значения g на связных компонентах ∂M отличаются от соответствующих значений f меньше чем на ε. Таким образом, каждый интервал $(i - \varepsilon, i + \varepsilon)$ для $i = 1, \dots, n$ содержит исключительное значение g. Лемма доказана. $\square$

7.1. **Пример функции для которой k не является непрерывным.** Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – гладкая неубывающая функция имеющая две *плоские* критические точки $a < b$, т.е. $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$ для всех $r \geq 1$.

Пусть U_a и U_b — две дизъюнктные ε-окрестности точек a и b и некоторого $\varepsilon > 0$, U — окрестность отрезка $[a, b]$ и $0 < \delta < \frac{1}{3}(f(b) - f(a))$.

Возьмем произвольную окрестность $\mathcal{V}$ функции f в $C^\infty(\mathbb{R})$, состоящую их таких функций g, для которых

$$\|g - f\|^r_{\overline{U}} \;=\; \sup_{x \in \overline{U}} \sum_{i=0}^{r} |g^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \;<\; \delta.$$

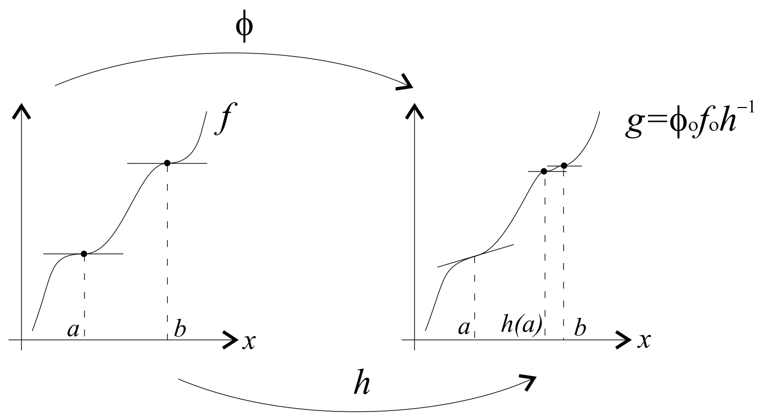

Рис. 4

Легко видеть, что $\mathcal{V}$ содержит такую функцию $g = \phi \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$, где ϕ и h — диффеоморфизмы $\mathbb{R}$, что $h(a) \in U_b$, $h(b) = b$, $g \circ h(a) = \phi \circ f(a) \in (f(b) - \delta, f(b) + \delta)$ и $g \circ h(b) = \phi \circ f(b) = f(b)$.

График такой функции g показан в правой части Рис. 4. Идея состоит в том, что критическая точка a может быть уничтожена произвольно малым шевелением f в любой C^r-топологии. С другой стороны, мы можем "создать" критическую точку эквивалентную a в произвольно малой окрестности точки b. Все это можно проделать с помощью сопряжения f так, чтобы $\|g - f\|^r_U < \delta$.

Таким образом, оба критических значения $g \circ h(a)$ и $g \circ h(b)$ функции g принадлежат U_b, т.е. расстояние в $\mathbb{R}^2$ точками $(g \circ h(a), g \circ h(b))$ и $(f(a), f(b))$ больше δ.

Так как это выполняется для произвольного $\delta > 0$, то k не может быть непрерывным в C^r-топологии ни для какого $r \geq 0$. Поэтому оно не является непрерывным в C^∞-топологии.

8. Доказательство Теоремы 1.5

Предположим, что $f \in C^\infty(M, P)$ удовлетворяет условиям (J) и (V), а также, что каждый критический уровень f содержит либо существенную критическую точку, либо связную компоненту ∂M. По Лемме 7.0.1 последнее предположение влечет непрерывность отображения k соотносящего каждому $g \in \mathcal{O}_{MP}(f)$ его упорядоченное множество исключительных значений.

8.1. **Случай $\mathbb{R}$.** Заметим, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{S}_M(f) & \longrightarrow & \mathcal{D}_M & \longrightarrow & \mathcal{D}_M/\mathcal{S}_M(f) & \longrightarrow & \mathcal{O}_M(f) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{M\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{M\mathbb{R}}/\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle k}\downarrow \\
\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{q} & \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}/\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{c} & \Delta^{n-2}
\end{array}$$

Здесь c — гомеоморфизм, правые вертикальные стрелки — непрерывные биекции, каждая верхняя вертикальная стрелка — вложение, а каждая левая вертикальная — отображение “на”.

Случай $P = \mathbb{R}$ Теоремы 1.5 вытекает из следующей леммы:

Лемма 8.1.1. *Пусть $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ обладает свойством* (V). *Предположим также, что выполнены следующие условия*

1. *отображение $k : \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \to \Delta^{n-2}$ непрерывно и существуют*
2. *сечение $s : \Delta^{n-2} \to \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}$ отображения $c \circ q$ (см. Лемму 6.1.1) и*
3. *сечение проекции p, т.е.такой гомоморфизм $\theta : \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}} \to \mathcal{D}_M$, что $\phi \circ f = f \circ \theta(\phi)$ (см. Лемму 5.0.1).*

Тогда существует гомеоморфизм $\mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \approx \mathcal{O}_M(f) \times \Delta^{n-2}$.

Доказательство. Рассмотрим композицию:

$$sk = s \circ k : \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \xrightarrow{k} \Delta^{n-2} \xrightarrow{s} \mathcal{D}^{[1,n]}_{\mathbb{R}}.$$

Тогда каждую функцию $g \in \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$ можно представить в виде

$$g = sk(g) \ \circ \ \big(sk(g)^{-1} \circ g\big).$$

Утверждение 8.1.2. *$sk(g)^{-1} \circ g \in \mathcal{O}_M(f)$.*

Доказательство. Так как $g \in \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$, то g можно представить в виде $g = \phi \circ f \circ h^{-1}$, где $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{[1,n]}$ и $h \in \mathcal{D}_M$.

Заметим, что $sk(g)^{-1} \circ \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{e}$. Тогда из Предложения 5.0.2 получаем

$$sk(g)^{-1} \circ g = \big(sk(g)^{-1} \circ \phi\big) \circ f \circ h^{-1} = \\ = f \circ \theta\left[sk(g)^{-1} \circ \phi\right] \circ h^{-1} \in \mathcal{O}_M(f). \quad \square$$

Теперь легко видеть, что следующие отображения непрерывны и взаимно обратны:

$$\beta : \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f) \to \mathcal{O}_M(f) \times \Delta^{n-2}, \qquad \beta(g) = \big(\, sk(g)^{-1} \circ g\,,\, k(g)\,\big),$$

$$\alpha : \mathcal{O}_M(f) \times \Delta^{n-2} \to \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f), \qquad \alpha(\psi, z) = s(z) \circ \psi,$$

где $g \in \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$, $\psi \in \mathcal{O}_M(f)$ и $z \in \Delta^{n-2}$. $\square$

8.2. **Случай $P = S^1$, $n = 0$.** Итак, f является локально тривиальным расслоением над S^1. Очевидно, что $\mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{MS^1}(f)$. Обратно, пусть $g = \phi \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{O}_{MS^1}(f)$ для $\phi \in \mathcal{D}_{S^1}^{+}$ и $h \in \mathcal{D}_M$. Тогда по Предложению 5.0.3 для ϕ существует такой диффеоморфизм h_1, что $\phi \circ f = f \circ h_1$, откуда $g = f \circ h_1 \circ h^{-1} \in \mathcal{O}_M(f)$. Таким образом, $\mathcal{O}_M(f) = \mathcal{O}_{MS^1}(f)$.

8.3. **Случай $P = S^1$, $n \geq 1$.** Определим отображение

$$\tau : \mathcal{D}_{MS^1} \to \mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1)$$

по формуле

$$\tau(h, \phi) = \big(\phi \circ f \circ h^{-1}; \phi(1), \ldots, \phi(n)\big).$$

Очевидно, что оно непрерывно. Будем обозначать образ τ через $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$:

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f) \;:=\; \tau(\mathcal{D}_{MS^1}) \;\subset\; \mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1).$$

Пусть $p_1 : \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f) \to \mathcal{O}_{MS^1}(f)$ — ограничение стандартной проекции $\mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1) \to \mathcal{O}_{MS^1}(f)$ на $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$.

Напомним, что $\mathbb{Z}_n$ действует $F_n(S^1)$ циклическими сдвигами координат:

$$\nu \cdot \{x_a\} = \{x_{a+1}\},$$

где для простоты $(x_1, \ldots, x_n) \in F_n(S^1)$ обозначено через $\{x_a\}$. Это действие, вместе с тривиальным действием на $\mathcal{O}_{MS^1}(f)$, дает действие $\mathbb{Z}_n$ на $\mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1)$.

По Теореме 1.3 $p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))/\mathcal{D}^e_{S^1}$ — циклическая группа некоторого порядка c делящего n. Обозначим $d = n/c$ и определим $\bar{\phi} \in \mathcal{D}^+_{S^1}$ по формуле

$$\bar{\phi}(z) = z + d \mod n. \tag{8.1}$$

Пусть еще $\mathbb{Z}_c$ — подгруппа в $\mathbb{Z}_n$ порожденная ν^d.

Лемма 8.3.1. *$\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ инвариантно относительно действия ν^d и p_1 индуцирует непрерывную биекцию $\mu : \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)/\mathbb{Z}_c \to \mathcal{O}_{MS^1}(f)$. Если k непрерывно, то p_1 — c-листное накрытие, а μ — гомеоморфизм.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\bar{\phi} \in p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))$, т.е. $(\bar{h}, \bar{\phi}) \in \mathcal{S}_{MS^1}(f)$ для некоторого диффеоморфизма $\bar{h} \in \mathcal{D}_M$.

Действительно, так как $p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))/\mathcal{D}^e_{S^1} \approx \mathbb{Z}_c$, то существует такое $(h_1, \phi_1) \in \mathcal{S}_{MS^1}(f)$, что $\phi_1(a) = a+d$ для всех $a = 1, \ldots, n$. Тогда $\bar{\phi}^{-1} \circ \phi_1 \in \mathcal{D}^e_{S^1}$, откуда

$$f = \bar{\phi} \circ \bar{\phi}^{-1} \circ \phi_1 \circ f \circ h_1^{-1} = \bar{\phi} \circ f \circ \underbrace{\theta(\bar{\phi}^{-1} \circ \phi_1) \circ h_1^{-1}}_{\bar{h}^{-1}}.$$

Предположим, что $(g, \{x_a\}) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$, т.е. что $g = \phi \circ f \circ h^{-1}$ и $\phi(a) = x_a$ для $a = 1, \ldots, n$. Покажем, что $\nu^d \cdot (g, \{x_a\}) = (g, \{x_{a+d}\})$ также принадлежит $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$.

Мы имеем, что

$$g = \phi \circ f \circ h^{-1} = \phi \circ \bar{\phi} \circ f \circ \bar{h}^{-1} \circ h^{-1}.$$

Более того, $\phi \circ \bar{\phi}(a) = \phi(d+a) = x_{d+a}$. Следовательно, положив $\hat{\phi} = \phi \circ \bar{\phi}$ и $\hat{h} = h \circ \bar{h}$, получим, что $\tau(\hat{h}, \hat{\phi}) = (g, \{x_{d+a}\})$, т.е. $(g, \{x_{d+a}\})$ принадлежит образу $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ проекции τ. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ инвариантно относительно $\mathbb{Z}_c$.

Так как группа $\mathbb{Z}_c$ конечна, а ее действие свободно и p_1-эквивариантно, то фактор-отображение $\widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f) \to \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)/\mathbb{Z}_c$

является c-листным накрытием. Более того, т.к. p_1 есть отображение "на", то p_1 индуцирует непрерывную биекцию

$$\mu : \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)/\mathbb{Z}_c \to \mathcal{O}_{MS^1}(f).$$

Наконец предположим, что k непрерывно. Нужно показать, что p_1 — локальный гомеоморфизм. Отсюда будет следовать, что таким же является и μ, откуда μ в действительности гомеоморфизм. Достаточно проверить, что p_1 обладает непрерывным сечением, т.е. для каждого $(g,x) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ существуют такие окрестность $\mathcal{U}_g$ функции g в $\mathcal{O}_{MS^1}(f)$ и непрерывное отображение $G : \mathcal{U}_g \to F_n(S^1)$, что $(g', G(g')) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ и $G(g) = x$.

Отметим, что мы имеем следующие отображения:

$$F_n(S^1) \xrightarrow{\nu} F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n \xleftarrow{k} \mathcal{O}_{MS^1}(f).$$

Пусть $(g,x) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$ и $[x] = \nu(x)$ — соответствующий класс x в $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$. Тогда $k(g) = [x]$. Так как ν — накрытие, то существуют такие окрестность U_x точки x в $F_n(S^1)$ и окрестность $V_{[x]}$ класса $[x]$ в $F_n(S^1)/\mathbb{Z}_n$, что ν гомеоморфно отображает U_x на $V_{[x]}$.

Положим $\mathcal{U}_g = k^{-1}(V_{[x]})$. Так как k непрерывно, то $\mathcal{U}_g$ является открытой окрестностью g. Тогда отображение $\nu^{-1} \circ k : \mathcal{U}_g \to U_x$ есть локальное сечение p_1. $\square$

Рассмотрим теперь проекцию $k_2 : \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f) \subset \mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1) \to F_n(S^1)$. Так как композиция

$$k_2 \circ \tau : \mathcal{D}_{MS^1} \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}_{MS^1}(f) \times F_n(S^1) \xrightarrow{k_2} F_n(S^1).$$

определяется формулой $(h,\phi) \mapsto \big(\phi(1),\dots,\phi(n-1)\big)$, то следующая диаграмма оказывается коммутативной:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{S}_M(f) & \longrightarrow & \mathcal{D}_M & \longrightarrow & \mathcal{D}_M/\mathcal{S}_M(f) & \longrightarrow & \mathcal{O}_M(f) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{MS^1} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{MS^1}/\widetilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f) \\
{\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & {\scriptstyle k_2}\big\downarrow \\
\mathcal{D}^e_{S^1} & \longrightarrow & \mathcal{D}^+_{S^1} & \xrightarrow{q} & \mathcal{D}^+_{S^1}/\mathcal{D}^e_{S^1} & \xrightarrow{c} & F_n(S^1)
\end{array}
$$

Здесь опять c — гомеоморфизм, остальные правые горизонтальные стрелки — непрерывные биекции, верхние вертикальные стрелки — вложения, а нижние вертикальные — отображения “на”.

Заметим, что

(1) k_2 непрерывно,
(2) $c \circ q$ обладает непрерывным сечением s (Лемма 5.0.1), и
(3) p имеет непрерывное сечение-гомоморфизм Θ (Теорема 1.3).

Тогда аргументы, аналогичные доказательству Леммы 8.1.1, показывают, что вложение

$$\mathcal{O}_M(f) \equiv \mathcal{O}_M(f) \times (1,\dots,n) \subset \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)$$

продолжается до гомеоморфизма

$$\alpha : \mathcal{O}_M(f) \times F_n(S^1) \approx \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f), \qquad \alpha(g,x) = (s(x)\circ g, x),$$

где $g \in \mathcal{O}_M(f)$ и $x \in F_n(S^1)$.

Напомним, что по Лемме 8.3.1 $\mathcal{O}_{MS^1}(f) = \widetilde{\mathcal{O}}_{MS^1}(f)/\mathbb{Z}_c$. Так как $\mathbb{Z}_c$ тривиально действует на $\mathcal{O}_M(f)$, то мы получаем гомеоморфизм:

$$\mathcal{O}_{MS^1}(f) \approx \mathcal{O}_M(f) \times (F_n(S^1)/\mathbb{Z}_c).$$

Теперь остается применить Лемму 6.2.1. Теорема 1.5 полностью доказана. $\square$

Список литературы

[1] Арнольд В.И., Варченко А.Н, Гусейн-Заде С.М., Особенности дифференцируемых отображений, I. М.Наука, 1982

[2] Арнольд В.И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек, УМН, т.29, №2 (1974) с. 11-49

[3] Levine H., Thom R. Singularities of differentiable mappings. I. Bonn, 1959.

[4] Maksymenko S. Smooth shifts along trajectories of flows. Topology And its Applications 130 (2003) 183-204.

Содержание

Наукове видання

Максименко Сергій Іванович

СТАБІЛІЗАТОРИ ТА ОРБІТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ
(Рос. мовою)

Комп'ютерний набір та верстка
С. І. Максименко

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 17.10.2005. Формат $60 \times 84/16$. Папір офс.
Офс. друк. Физ. друк. арк. 3.75 Ум. друк. арк. 3.3
Тираж 60 пр. Зам. 150.

Ін-т математики НАН України
01601, Київ 4, ГПС, вул. Терещенківська, 3