Національна академія наук України
Інститут математики

Препринт 2004.8

И. Ю. Власенко, С. И. Максименко

Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий

Киев – 2004

УДК 517.938.5, 517.91
КОРНИ ИЗ ГОМЕОМОРФИЗМОВ И ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ / **И. Ю. Власенко, С. И. Максименко** — Киев, 2004. — 64 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2004.8)

Работа посвящена изучению корней из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов некоторых классов многообразий.

Описаны свойства корней из гомеоморфизмов как динамических систем в терминах разложения многообразия на множества точек с различным динамическим поведением. Полностью описана структура корней из гомеоморфизмов одномерных многообразий – прямой и окружности. Для всюду плотного класса диффеоморфизмов двумерных поверхностей (диффеоморфизмов Морса–Смейла) даны необходимые и достаточные условия существования корней.

Работа присвячена вивченню коренів із гомеоморфізмів і дифеоморфізмів деяких класів многовидів.

Описано властивості коренів із гомеоморфізмів як динамічних систем у термінах розкладу многовиду на множини точок с різноманітною динамічною поведінкою. Повністю описана структура коренів із гомеоморфізмів одновимірних многовидів – прямої і кола. Для всюди щільного класу дифеоморфізмів двовимірних поверхонь (дифеоморфізмів Морса–Смейла) дано необхідні і достатні умови існування коренів.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Пришляк А. О.

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

Введение

Пусть X — топологическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм. Один из подходов к изучению гомеоморфизмов состоит в поиске гомеоморфизмов, коммутирующих с данным. Можно ожидать, что чем сложнее устроен гомеоморфизм, тем меньше гомеоморфизмов с ним коммутирует. Тривиальными примерами коммутирующих с f гомеомофизмов являются его степени f^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Более интересный пример доставляют корни из f. Скажем, что f допускает корень степени n, если его можно представить в виде $f = g^n$, где g — также гомеоморфизм X. В некоторых случаях корней из f оказывается очень много, поэтому естественно наложить дополнительные условия на g: если f принадлежит какой-нибудь подгруппе $\mathcal{G}$ в группе всех гомеоморфизмов X, то можно потребовать, чтобы и g принадлежал $\mathcal{G}$.

Например, если X — многообразие (гладкое, аналитическое, кусочно-линейное, риманово, симплектическое и пр.) и f — его гомеоморфизм (класса C^∞, аналитический, кусочнолинейный, изометрия, симплектоморфизм, диффеоморфизм), то естественно требовать, чтобы таким же был и g.

Типичный способ доказательства *невозможности* извлечения корня состоит в том, чтобы свести задачу к алгебраической и доказать неразрешимость алгебраической задачи.

Предположим, что сущестует такой гомоморфизм $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ групы $\mathcal{G}$ на некоторую группу H, что образ $\phi(f)$ не имеет корней степени n в $\mathcal{H}$. Тогда и f не имеет корней в $\mathcal{G}$.

С другой стороны, наличие у $\phi(f)$ корня n-й степени в $\mathcal{H}$ еще не гарантирует существования корня у f.

Например, каждый гомеоморфизм f пространства X индуцирует автоморфизмы групп (ко-) гомологий (H^*X) H_*X и гомотопических групп π_*X пространства X. Поэтому имеется естественный гомоморфизм группы $\mathcal{G}$ в группы автоморфизмов этих групп H^*X, H_*X и π_*X. Если автоморфизм, соответствующий f, не допускает извлечения корня, то из f корень также не извлекается: изменяющий ориентацию гомеоморфизм ориентируемого многообразия M не допускает корней четной степени, но не каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм M допускает извлечение корня любой степени.

В случае общих топологических пространств, и даже многомерных многообразий, задача извлечения корня из их гомеоморфизмов вряд ли может иметь приемлемое решение. Кроме того, в каждом конкретном случае необходима своя особая техника, присущая даной задаче. Поэтому естественно ограничиться классом "хороших" пространств.

В даной работе исследуются гомеоморфизмы и диффеоморфизмы одномерных и двумерных многообразий и даются *конструктивные* способы построения корней.

В частности, показано, что каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f прямой имеет несчетное множество корней, но если f — диффеоморфизм "общего положения", имеющий неподвижные точки, то он имеет не более одного корня в классе диффеоморфизмов. Мы также приводим обзор результатов, относящихся к корням из гомеоморфизмов окружности.

В случае двумерных поверхностей мы ограничиваемся классом всюду плотного множества диффеоморфизмов Морса–Смейла и даем комбинаторный критерий существования корней (в классе гомеоморфизмов) у таких диффеоморфизмов.

Авторы благодарят В. В. Шарко, А. О. Пришляка, М. А. Панкова и Е. А. Полуляха за полезные обсуждения.

Глава 1

Предварительные сведения

1. Множества траекторий

Пусть M — топологическое пространство и $f : M \to M$ — гомеоморфизм.

Обозначим через $O_f(x)$ траекторию точки x, т.е. множество $\{f^n(x) | \ x \in \mathbb{Z}\}$. Пусть также

$$O_f^+(x) = \{f^n(x) | \ x \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{и} \quad O_f^-(x) = \{f^n(x) | \ x \in \mathbb{Z}^-\}$$

обозначают положительную и отрицательную полутраектории точки x соответственно.

1.1. Множество неблуждающих точек.

Определение 1.1. *Точка x называется* фиксированной *точкой гомеоморфизма f, если $f(x) = x$. Множество всех фиксированных точек f обозначаем* $\mathrm{Fix}(f)$.

Определение 1.2. *Точка x называется* периодической *периода n для гомеоморфизма f, если $f^n(x) = x$ и $f^k(x) \neq x$ для $k = 1, \ldots, n-1$. Множество всех периодических точек f обозначается* $\mathrm{Per}(f)$.

Для каждой точки x определено ω-предельное множество $\omega(x)$ и α-предельное множество $\alpha(x)$.

$$\omega(x) = \bigcap_N \overline{\bigcup_N^{+\infty} f^n(x)} \qquad \alpha(x) = \bigcap_N \overline{\bigcup_N^{+\infty} f^{-n}(x)}$$

Определение 1.3. *Точка x называется ω-(α-)* рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$ (соответственно, $x \in \alpha(x)$).*

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ множество ω-рекуррентных точек, через $\mathrm{Rec}_-(f)$ множество α-рекуррентных точек, и через $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cup \mathrm{Rec}_-(f)$ множество всех рекуррентных точек.

Обозначим через $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f) \cup \mathrm{Lim}_-(f)$ *предельное множество* f, объединение ω-предельных множеств и α-предельных множеств всех точек. Легко видеть, что $\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f)$.

Следующее определение было дано Биркгофом в [**2**].

Определение 1.4. *Точка $x \in M$ называется* блуждающей *для гомеоморфизма f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m > 0$.*

Множество блуждающих точек f обозначим $W(f)$. Поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью, то $W(f)$ открыто в M.

Остальные точки называются *неблуждающими*. Множество всех неблуждающих точек f обозначается $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Таким образом точка принадлежит множеству $\Omega(f)$, если для ее произвольной окрестности V найдется такое $m \in \mathbb{Z}$, что $f^m(V) \cap V \neq \varnothing$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

1.1.1. *Цепно-рекуррентные множества.* Цепно-рекуррентные множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Сравнительно недавно они были введены Конли в работе [**5**] и были с успехом использованы для описания динамики типичных гомеоморфизмов.

Определение 1.5. *Пусть $\varepsilon > 0$. ε-цепью называется конечная последовательность точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, где $n > 0$, $d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$ (d — метрика на M).*

Будем говорить, что ε-цепь начинается в x_0, заканчивается в x_n и имеет длину n. Обозначим множество точек, являющихся концами ε-цепей, начинающихся в x через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$

Определение 1.6. $\mathcal{C}(x, f) \overset{def}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$

Определение 1.7. *Точка* $x \in M$ *называется цепно-рекуррентной, если* $x \in \mathcal{C}(x, f)$.

Множество цепно-рекуррентных точек обозначается через $\mathcal{C}(f)$. Это компактное непустое множество, при чем, поскольку f — гомеоморфизм, $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$. Имеет место следующее включение:

$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f)$.

1.2. Регулярные компоненты. Во множестве $W(f)$ всех блуждающих точек гомеоморфизма f можно выделить подмножества ω-регулярных точек, α-регулярных точек, регулярных точек и нерегулярных точек благодаря понятию регулярности, введенному Биркгофом и Смитом [**3**].

Для удобства будем считать, что на M задана метрика.

Определение 1.8. *Блуждающая точка* x *называется* ω-регулярной, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(x)$ — δ*-окрестность точки* x, *и* $\exists N > 0$ *такое, что* $\forall k > N$ $f^k(\delta(x)) \subset \varepsilon(\Omega)$, *где* $\varepsilon(\Omega)$ — ε*-окрестность множества* Ω, $f^k(\delta(x))$ — *образ* $\delta(x)$ *при отображении* f^k.

Блуждающая точка $x \in M$ *называется* α-регулярной, *если она* ω*-регулярна для обратного гомеоморфизма* f^{-1}. *Блуждающая точка* $x \in M$ *называется* регулярной, *если она одновременно и* ω*- и* α*-регулярна. Остальные блуждающие точки из* M *называются* нерегулярными.

Множества ω-регулярных точек, α-регулярных точек, а следовательно, и регулярных точек являются открытыми множествами по определению.

Определение 1.9. *Область* $S \subset M$ *называется* областью блуждающего типа, *если* $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k \neq 0$. *Область* $S \subset M$ *называется областью* периодического *типа порядка* $q \geq 1$, *если* $f^q(S) = S$, $f^k(S) \cap S = \varnothing, k = 1...Q-1$. *При* $q = 1$ *мы имеем* инвариантную *область.*

Определение 1.10. *Максимальные связные компоненты множеств* ω*-регулярных точек,* α*-регулярных точек и регулярных точек называются соответственно* ω-регулярными, α-регулярными *или* регулярными *компонентами.*

Обозначим регулярную компоненту через S. В силу максимальности она может быть либо (a) областью блуждающего типа, тогда будем называть ее *блуждающей компонентой*, либо (b) областью периодического типа, тогда будем называть ее *периодической компонентой*.

Регулярные периодические компоненты гомеоморфизмов двумерных поверхностей были впервые исследованы Биркгофом и Смитом [**3**] для сферы, и Смитом [**6**] в общем случае. Позже С. Х. Арансон и В. С. Медведев в работе [**7**] обобщили результаты этих статей на случай n-мерной сферы, уточнив при этом доказательства. Было показано, что любая периодическая регулярная компонента S имеет топологический тип или односвязной или двусвязной области в $\mathbb{R}^2$ (другими словами, или диска, или кольца), при этом, в случае двусвязной области две компоненты связности границы S лежат во множестве неблуждающих точек, а точки S стекают с одной компоненты связности границы на другую.

Заметим, что периодическая регулярная компонента S всегда линейно связна как открытое подмножество локально линейно связного множества.

2. Гиперболические отображения.

2.1. Линейные гиперболические отображения.

Определение 1.11. *Линейное отображение $\mathbb{R}^n$ называется гиперболическим, если абсолютные величины всех его собственных значений отличны от единицы.*

Для всякого линейного отображения $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и его действительного собственного значения λ обозначим через E_λ корневое подпространство, соответствующее A, т. е. пространство всех таких векторов $v \in \mathbb{R}^n$, что $(A - \lambda \mathrm{Id})^k v = 0$ для некоторого целого k. Аналогично для пары комплексно сопряженных собственных значений λ и $\bar{\lambda}$ обозначим через $E_{\lambda,\bar{\lambda}}$ пересечение $\mathbb{R}^n$ с суммой корневых подпространств E_λ и $E_{\bar{\lambda}}$, соответствующих комплексификации A (т. е. продолжению отображения

A на комплексное пространство $\mathbb{C}^n$). Для краткости, пространства $E_{\lambda,\bar{\lambda}}$ мы также будем называть корневыми подпространствами. Пусть

$$E^- = E^-(A) = \bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|<1} E_{\lambda,\bar{\lambda}}$$

и, аналогично,

$$E^+ = E^+(A) = \bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|>1} E_{\lambda,\bar{\lambda}}.$$

Если отображение A обратимо, то $E^+(A) = E^-(A^{-1})$. Наконец, положим

$$E^0 = E^0(A) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1} E_{\lambda,\bar{\lambda}}.$$

Пространства E^-, E^+, E^0, очевидно, инвариантны относительно отображения A. При этом $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^+ \oplus E^0$.

Таким образом, отображение A — гиперболично тогда и только тогда, когда $E^0 = \{0\}$ или, что то же самое, если $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$.

Так как ограничение A на пространство $E^-(A)$ — линейный оператор, все собственные значения которого по модулю меньше единицы, то найдется норма, для которой ограничение линейного отображения A на пространство $E^-(A)$ сжимающее. Кроме того, если A обратимо, то ограничение A^{-1} на пространство $E^+(A)$ также сжимающее.

Определение 1.12. *Пространства $E^-(A)$ и $E^+(A)$ называются соответственно* сжимающимся *и* растягивающимся *подпространствами линейного отображения A.*

2.2. Гиперболические отображения. Пусть M — компактное многообразие класса C^∞ и $f : M \to M$ — диффеоморфизм класса C^r.

Определение 1.13. *f-инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется* гиперболическим, *если ограничение касательного расслоения на это множество $T_\Lambda(M)$ имеет разложение в* *виде топологической суммы Уитни:* $T_\Lambda(M) = E^u_\Lambda \oplus E^s_\Lambda$, *в котором слагаемые* E^u_Λ *и* E^s_Λ *инвариантны относительно дифференциала* ∂f *и* $\partial f|_{E^u_\Lambda}$ *— растягивающее, а* $\partial f|_{E^s_\Lambda}$ *— сжимающее отображение с константами растяжения и сжатия соответственно, равномерно отличными от единицы в некоторой метрике на* $T_\Lambda(M)$.

Обозначим через $B_r(x)$ шар радиуса r с центром в точке x.

Определение 1.14. *Подмногообразие* $W \subset M$ *называется* локальным устойчивым многообразием радиуса r *(относительно диффеоморфизма* f*), проходящим через точку* $x \in M$, *если*

$$W = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n} B_r(f^n(x)).$$

Обозначим это многообразие через $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$.

Определение 1.15. *Семейство* $W(x)_{x\in\Lambda}$ C^k*-подмногообразий* M *называется* непрерывным, *если для каждого* $x \in \Lambda$ *найдутся окрестности* $U \ni x$ *в множестве* Λ *и непрерывное отображение* $\Phi : U \to C^k(D^n, M)$ *такие, что отображение* Φy, $y \in U$, C^k*-диффеоморфно отображает* n*-мерный куб* D^n *в окрестность точки* y *в* $W(y)$ *для каждой* $y \in U$.

Теорема 1.16. Об устойчивых многообразиях для гиперболического множества (**[9, 19]**). *Пусть* M *— компактное многообразие,* $f : M \to M$ *—* C^k*-диффеоморфизм и* Λ *— компактное гиперболическое множество* f. *Тогда в некоторой римановой метрике* ρ *на* M *справедливы следующие утверждения:*

(i) *существует такое* $r > 0$, *что через каждую точку* $x \in \Lambda$ *проходит многообразие* $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$ *радиуса* r;

(ii) $\{W^s_{\mathrm{loc}}(x)\}$ *— непрерывное семейство* C^k*-подмногообразий* M;

(iii) *существует такое число* $0 < \lambda < 1$, *что для любых* $y, z \in W^s_{\mathrm{loc}}(x)$ *выполняется неравенство*
$$\rho(f^n y, f^n x) \leq \lambda^n \rho(y, z), \quad n \geq 0;$$

(iv) *если* $W^s_{\mathrm{loc}}(x) \cap W^s_{\mathrm{loc}}(y) \neq \varnothing$, *то это пересечение является окрестностью точек* x, $y \in \Lambda$ *в топологии,* *порожденной внутренней метрикой на* $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$, *индуцированной метрикой* ρ *на* M.

Определение 1.17. *Пусть* Λ *— компактное гиперболическое множество диффеоморфизма* $f\colon M \to M$. *Тогда* устойчивым многообразием *точки* $x \in \Lambda$ *называется множество* $W^s(x) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_{\mathrm{loc}}(f(x)))$, *а* устойчивым многообразием *множества* Λ *— множество* $W^s(\Lambda) = \cup_{x\in\Lambda} W^s(x)$.

Приведем некоторые свойства устойчивых многообразий из [**10**]:

(1) Многообразие $W^s(x)$, оснащенное внутренней метрикой, которая индуцирована метрикой $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$, гомеоморфно евклидовому пространству.
(2) $fW^s(x) = W^s(f(x))$, $f^{-1}W^s(x) = W^s(f^{-1}(x))$.
(3) Если $W^s(x) \cap W^s(y) \neq \varnothing$, то $W^s(x) = W^s(y)$.
(4) Если $W^s(x) \cap W^s(f^n(x)) \neq \varnothing$ для любого n, то в множестве $W^s(x)$ найдется периодическая точка диффеоморфизма f.

Аналогично определяются и неустойчивые многообразия $W^u(x)$ и $W^u(\Lambda)$.

2.3. Теорема Хартмана – Гробмана. В окрестности гиперболической неподвижной точки отображение топологически сопряжено своей линейной части.

Теорема 1.18 (Хартман, Гробман). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывно дифференцируемое отображение,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *открытое подмножество,* $p \in U$ *— гиперболическая неподвижная точка* f, *и* D_pf *— касательное отображение в точке* p. *Тогда существуют такие окрестности* U_1 *и* U_2 *точки* p, *окрестности* V_1 *и* V_2 *начала координат* $0 \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ *и такой гомеоморфизм* $h\colon U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$, *что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ V_1 & \xrightarrow{D_pf} & V_2 \end{array}$$

т. е. $f = h^{-1} \circ D_p f \circ h$ *на* U_1.

Таким образом топологические свойства f вблизи p вполне определяются размерностями устойчивого и неустойчивого многообразий точки p, а также ориентацией f на них, т.е. имеет место

Следствие 1.19. *Пусть* $f: U \to R^n$ *и* $g: V \to R^n$ *имеют гиперболические неподвижные точки* $p \in U$ *и* $q \in V$ *соответственно, причем*

$$\dim E^+(D_p f) = \dim E^+(D_q g), \quad \dim E^-(D_p f) = \dim E^-(D_q g),$$
$$\operatorname{sign}\det D_p f|_{E^+ D_p f} = \operatorname{sign}\det D_q g|_{E^+ D_q g},$$
$$\operatorname{sign}\det D_p f|_{E^- D_p f} = \operatorname{sign}\det D_q g|_{E^- D_q g}.$$

Тогда существуют окрестности $U_1 \in U$ *и* $V_1 \in V$ *точек* p *и* q *соответственно и гомеоморфизм* h*, такие, что* $h: U_1 \to V_1$*, и, корме того,* $h \circ f = g \circ h$.

2.4. Свойства гиперболических отображений. Пусть $f : M \to M$ — диффеоморфизм.

Определение 1.20. *Будем говорить, что* f *удовлетворяет* аксиоме А *если множество* $\Omega = \Omega(f)$ *гиперболическое и периодические точки* f *плотны в нем.*

Если $\dim M = 2$, то из гиперболичности Ω следует, что периодические точки f плотны в Ω. Определение и свойства гиперболических множеств можно найти, например, в **[11]**.

Пусть d — метрика на M и $x \in \Omega$. Определим устойчивое и неустойчивое многообразия точки x:

$$W^s(x) = \{y \in M |\ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \quad n \to +\infty\},$$
$$W^u(x) = \{y \in M |\ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \quad n \to -\infty\}.$$

Под *устойчивым* (*неустойчивым*) многообразием множества будем понимать объединение устойчивых (неустойчивых) многообразий составляющих его точек.

Поскольку формулировки и доказательства часто одинаковы для устойчивых и неустойчивых многоразий, то для удобства будем обозначать одно из них через $W^\sigma(x)$, а другое — $W^\rho(x)$. Таким образом, если $\sigma = u$, то $\rho = s$ и наоборот.

Если размерность многообразия $W^\sigma(x)$ равна 1, то множество $W^\sigma(x)\setminus\{x\}$ имеет две компоненты связности. Назовем эти компоненты *сепаратрисами* и обозначим их через $W_i^\sigma(x)$, где $\sigma\in\{u,s\}$, $i=1,2$.

Периодическая точка $x\in Per(f)$ периода m называется *гиперболической*, если спектр производной D_xf^m лежит вне единичной окружности. Если все собственные значения D_xf^m по модулю меньше 1 (больше 1), то x называется *стоком* (*источником*). В остальных случаях x называется *седлом*.

Пусть Γ — гиперболическая периодическая орбита с периодом m и $x\in\Gamma$. Пусть E^u (E^s) — подпространство в T_xM порожденное собственными подпространствами D_xf^m собственные значения которых по модулю больше (меньше) 1. Сопоставим орбите Γ число $+1$, если $D_xf^m\colon E^u\to E^u$ сохраняет ориентацию, и -1, если не сохраняет. Будем называть это число *ориентировочным типом* орбиты.

Множество всех седловых периодических точек f обозначим $Per'(f)$. Введем также обозначения

$$\partial W^\sigma(x)=\mathbf{cl}\ W^\sigma(x)\setminus W^\sigma(x),\qquad \partial W_i^\sigma(x)=\mathbf{cl}\ W_i^\sigma(x)\setminus W_i^\sigma(x),$$

где **cl** означает замыкание,

$$W'^u=\bigcup_{x\in Per'(f)}W^u(x),\quad W'^s=\bigcup_{x\in Per'(f)}W^s(x),\quad W'=W'^u\cup W'^s.$$

Определение 1.21. *Точки пересечения $W'^u\cap W'^s$ называются* гетероклиническими точками.

Определение 1.22. *Траектория гетероклинической точки называется* гетероклинической траекторией.

Из определения следует, что все точки гетероклинической траектории являются гетероклиническими точками.

Лемма 1.23 (λ-лемма, см. [**11**], разд. 2, §7). *Пусть p — гиперболическая периодическая точка f, $q\in W^s(p)$, D^u — диск размерности $u=\dim E^u$, трансверсальный к $W^s(p)$ в q. Пусть $B^u\subset W^u(p)$, $B^s\subset W^s(p)$, $V=B^u\times B^s$ — окрестность p, D_n^u — связная компонента множества $f^n(D^u)\cap V$, которая* *содержит $f^n(q)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что если $n \geq n_0$, то D_n^u и B^u ε-C^1-близки.*

3. Диффеоморфизмы Морса–Смейла

Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется диффеоморфизмом *Морса–Смейла*, если

1) $\Omega(f)$ конечно;

2) все периодические точки гиперболические;

3) для всех $x, y \in \Omega(f)$ многообразия $W^u(x)$ и $W^s(y)$ пересекаются трансверсально.

Приведем некоторые свойства диффеоморфизмов Морса-Смейла, взятые из работ Смейла **[18]**,**[19]**:

(1) Пусть $\Omega^u(f)$ и $\Omega^s(f)$ — наборы источников и стоков соответственно. Тогда для каждой точки $x \in \Omega(f)$ имеем: $\partial W^u(x) \subset W'^u \cup \Omega^s(f)$ и $\partial W^s(x) \subset W'^s \cup \Omega^u(f)$;
(2) если $\partial W^u(x_i) \cap W^u(x_j) \neq \varnothing$, то $W^u(x_i) \cap W^s(x_j) \neq \varnothing$;
(3) если $W^u(x_i) \cap W^s(x_j) \neq \varnothing$, то $\partial W^u(x_i) \supset W^u(x_j)$;
(4) если $W^u(x) \cap W^s(y) \neq \varnothing$ и $W^u(y) \cap W^s(z) \neq \varnothing$, то $W^u(x) \cap W^s(z) \neq \varnothing$;
(5) для каждой точки $x \in \Omega(f)$ множества $W^\sigma(x)$ являются собственно вложенными в M подмногообразиями.

3.1. Диффеоморфизмы Морса–Смейла. Пусть Ω_k — периодическая траектория, лежащая в $\Omega(f)$. Согласно **[16]**, множество периодических траекторий частично упорядочено с помощью следующего отношения: $\Omega_k \leq \Omega_l$ тогда и только тогда, когда $W^u(\Omega_l) \cap W^s(\Omega_k) \neq \varnothing$. Этот же частичный порядок определен и для периодических точек.

Пусть $x, y \in Per'(f)$ и $W^u(y) \cap W^s(x) \neq \varnothing$. Тогда, согласно **[18]**, существует последовательность точек $x = y_0, y_1, .., y_n = y$ из $Per'(f)$, где y_{i+1} не принадлежит траектории y_i, такая, что $W^s(y_i) \cap W^u(y_{i+1}) \neq \varnothing$.

Обозначим через $\mathrm{beh}(y|x)$ максимальную длину такой последовательности. Если $W^u(x) \cap W^s(y) = \varnothing$, то $\mathrm{beh}(y|x) = 0$. Если отношение частичного порядка на множестве периодических точек задать ориентированным графом, то $\mathrm{beh}(y|x)$ будет длиной максимального ориентированного по возрастанию пути на графе от y к x.

Определение 1.24 ([**15**]). *Будем говорить, что гетероклиническая точка* γ *из пересечения* $W^u(x) \cap W^s(y)$ *имеет (число)* $\mathrm{beh} = n$, *если* $\mathrm{beh}(y|x) = n$.

3.2. Определение трубчатого семейства. Пусть f — диффеоморфизм Морса–Смейла и $p \in \Omega(f)$ — фиксированная периодическая точка f. Согласно [**16**], *трубчатой окрестностью* $T^s(p)$ многообразия $W^s(p)$ называется семейство $\{t^s(\xi)\}$ попарно не пересекающихся C^r-подмногообразий $t^s(\xi) \in M$, индексированных точками ξ из открытой окрестности N точки p в $W^u(p)$ и обладающих следующими свойствами:

(1) $V = V(W^s(p)) = \cup_{\xi \in N} t^s(\xi)$ является открытым подмножеством M, которое содержит $W^s(p)$;
(2) $t^s(p) = W^s(p)$;
(3) $t^s(\xi)$ пересекает N трансверсально и только в одной точке ξ;
(4) отображение $\pi\colon V \to N$, которое переводит $t^s(\xi)$ в ξ, непрерывно; секущее отображение s, сопоставляющее точке $\eta \in t^s(\xi)$ касательное пространство к $T_\eta t^s(\xi)$ в этой точке является непрерывным отображением с V в грассманов пучок над V.

Заметим, что $f^i(T^s(p)) = \{f^i(t^s(\xi)\}$ — трубчатая окрестность точки $f^i(p)$.

Пусть $\Omega_p = \{f^i(p) \mid i = 0, \ldots, n-1\}$ траектория точки p под действием f. Тогда под *трубчатой окрестностью* $T^s(\Omega_p)$ многообразия $W^s(\Omega_p)$ будем понимать объединение трубчатых окрестностей $f^i(T^s(p))$ для $i = 0, \ldots, n-1$.

Трубчатая окрестность $T^s(p)$ подмногообразия $W^s(p)$ называется *инвариантной*, если $f^{-n}(t^s(\xi)) = t^s(f^{-n}(\xi))$.

Трубчатая окрестность $T^s(\Omega_p)$ многообразия $W^s(\Omega_p)$ называется *инвариантной*, если она построена по инвариантной трубчатой окрестности точки из Ω_p.

(Устойчивым) семейством трубчатых окрестностей f называется множество трубчатых окрестностей, построенных для устойчивых многообразий каждой периодической орбиты. Оно

обозначается через $T^s(f)$. Аналогично определяется неустойчивое семейство $T^u(f)$ трубчатых окрестностей f.

Пусть $T^\sigma(f)$ — семейство трубчатых окрестностей, где $\sigma \in \{s, u\}$. Тогда $T^\sigma(f)$ называется *инвариантным*, если оно состоит только из инвариантных трубчатых окрестностей. Будем говорить, что $T^\sigma(f)$ *согласовано*, если оно удовлетворяет следующему условию: из $t^s(\xi) \cap t^s(\eta) \neq \varnothing$ следует, что одно из этих подмногообразий содержит другое.

Палис и Смейл доказали в **[15, 16]**, что для f существуют инвариантные согласованные системы трубчатых семейств $T^u(f)$ и $T^s(f)$.

3.3. Дальнейшие свойства диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Лемма 1.25 (разложение блуждающего множества). *Блуждающие точки диффеоморфизма Морса–Смейла не являются ω-регулярными (α-регулярными) тогда и только тогда, когда они принадлежат устойчивому (неустойчивому) многообразию седловой периодической точки.*

Доказательство. Если блуждающая точка не принадлежит устойчивому многообразию седловой периодической точки, то она принадлежит устойчивому многообразию стока и в силу открытости этого многообразия является регулярной.

Предположим, что точка принадлежит устойчивому многообразию седловой периодической точки. Ее ω-предельным множеством является седловая периодическая точка. В то же время, поскольку размерность устойчивого многообразия седловой точки строго меньше размерности многообразия, в любой ее окрестности найдутся регулярные точки, у которых ω-предельное множество будет некоторым стоком.

Любая сколь угодно малая связная окрестность нашей точки будет содержать как точки, стремящиеся в седло, так и точки, стремящиеся в сток.

Поскольку у диффеоморфизма Морса–Смейла неблуждающее множество дискретно, его малая ε-окрестность будет несвязной и не сможет содержать в себе образы связной окрестности под действием итераций диффеоморфизма. Это противоречит определению 1.8 ω-регулярности. □

Следствие 1.26. *Множество регулярных блуждающих точек диффеоморфизма Морса–Смейла состоит из дополнения к объединению периодических точек и устойчивых и неустойчивых многообразий седел.*

Следствие 1.27. *Множество нерегулярных блуждающих точек диффеоморфизма Морса–Смейла состоит из гетероклинических точек.*

3.3.1. *Максимальные регулярные компоненты диффеоморфизмов Морса–Смейла.* Согласно [**7**], для двумерного многообразия связные компоненты множества $M \setminus (\mathbf{cl}W')$ могут быть только следующих типов:

1) односвязные компоненты блуждающего типа,
2) односвязные компоненты периодического типа,
3) двусвязные компоненты периодического типа.

В последнем случае S является компонентой инвариантного типа, граница ∂S состоит из двух фиксированных точек: $\partial S = \{\alpha, \omega\}$, где α — источник, ω — сток, и $M = S \cup \{\alpha, \omega\} = S^2$.

4. Структурно устойчивые диффеоморфизмы

Определение 1.28. *Диффеоморфизм f многообразия M удовлетворяет* сильному условию трансверсальности*, если $W^s(x)$ и $W^u(y)$ трансверсальны для всех $x, y \in \Omega(f)$.*

Определение 1.29. *Два диффеоморфизма f и g называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$ такой, что $h \circ f = g \circ h$.*

Определение 1.30. *Диффеоморфизм f называется структурно устойчивым, если он топологически сопряжен каждому диффеоморфизму некоторой малой своей окрестности.*

Ж. Палис и С. Смейл доказали в [**16**], что диффеоморфизмы Морса - Смейла совпадают с классом структурно устойчивых диффеоморфизмов с конечным неблуждающим множеством.

Диффеоморфизм f является структурно устойчивым (грубым) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме А и сильному условию трансверсальности.

Глава 2

Геометрические свойства корней из гомеоморфизмов

(И. Власенко)

Пусть M — компактное замкнутое многообразие и $f\colon M \to M$ — гомеоморфизм.

Определение 2.1. *Гомеоморфизм $g : M \to M$ называется корнем степени $n \in \mathbb{N}$ гомеоморфизма f, если $f = g^n$. В этом случае удобно записывать $g = \sqrt[n]{f}$.*

Для описания корней из гомеоморфизмов воспользуемся качественной теорией динамических систем. У отображения-корня опишем множества точек с различной динамикой и их связь с исходным отображением.

Следующие теоремы устанавливают связь между динамикой оригинального гомеоморфизма и его корня.

Теорема 2.2. *Множества $\mathrm{Per}(f)$, $\mathrm{Rec}(f)$, $\mathrm{Lim}(f)$, $\mathcal{C}(f)$ для отображения и его корня или степени совпадают. Множество $\Omega(f)$ при извлечении корня растет в рамках множества $\mathcal{C}(f)$.*

Теорема 2.3. *Если у исходного гомеоморфизма множество циклически зацепленных блуждающих точек пусто, то у исходного гомеоморфизма и у его корня множества неблуждающих, блуждающих, периодических, α-регулярных, ω-регулярных, регулярных и нерегулярных точек совпадают.*

Эти теоремы позволяют жестко очертить классы гомеоморфизмов, в которых лежат корни. В частности, как следствие из 1.25, корень из диффеоморфизма Морса–Смейла сохраняет топологическую структуру диффеоморфизмов Морса–Смейла.

Поэтому, если такой корень сам является диффеоморфизмом, то он также будет диффеоморфизмом Морса–Смейла.

Доказательство этих теорем состоит из приведенных ниже лемм.

1. Корни из множеств периодических и предельных точек

Покажем, что множество периодических точек $\mathrm{Per}(f)$, множество рекуррентных точек $\mathrm{Rec}(f)$ и предельное множество $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f) \cup \mathrm{Lim}_-(f)$ инвариантны относительно операции возведения гомеоморфизма в степень и взятия из него корня.

Пусть $f, g \colon M \to M$ – гомеоморфизмы, такие, что $f = g^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.4. $\mathrm{Per}(g) = \mathrm{Per}(f)$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{Per}(g)$, так что $g^m(p) = p$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $f^m(p) = g^{nm}(p) = p$, т.е. $\mathrm{Per}(g) \subset \mathrm{Per}(f)$.

Обратно если $f^m(p) = p$, то $g^{nm}(p) = f^m(p) = p$. Имеем $\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Per}(g)$. □

Лемма 2.5. $\mathrm{Lim}(g) = \mathrm{Lim}(f)$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{Lim}(g)$. Тогда $\exists x \in M \colon \overline{O_g(x)} \ni p$. Поскольку $O_g(x) = \cup_{i=0}^{n-1} O_f(g^i(x))$ $\exists i \colon p \in \overline{O_f(g^i(x))} \Rightarrow p \in \mathrm{Lim}(f)$.

Обратно если $p \in \mathrm{Lim}(f)$, тогда $\exists x \in M \colon p \in \overline{O_f(x)} \subset \overline{O_g(x)}$. Имеем $p \in \mathrm{Lim}(g)$. □

Лемма 2.6. $\mathrm{Rec}(g) = \mathrm{Rec}(f)$.

Доказательство. Легко видеть из определения, что точка, рекуррентная для гомеоморфизма, будет рекуррентной и для его корня. Поэтому $\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Rec}(g)$.

Покажем, что $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}(g)$. Пусть $p \in \mathrm{Rec}(g) \setminus \mathrm{Rec}(f)$, $f = g^n$. Рассмотрим $O_f(g^i(p))$, $i = 0 \ldots n-1$. Поскольку $p \in \mathrm{Rec}(g)$, $\exists k : O_f(g^0(p)) \subset \omega\left(O_f(g^k(p))\right)$. Подействуем g на это соотношение. Получим $O_f(g^i(p)) \subset \omega\left(O_f(g^{i+k}(p))\right)$, или $O_f(p) \subset$

$\omega\left(O_f(g^k(p))\right), O_f(g^k(p) \ \subset \ \omega\left(O_f(g^{2k}(p))\right), \ldots, O_f(g^{(n-1)k}(p) \ \subset$ $\omega\left(O_f(g^{nk}(p))\right)$.

Отношение "входить в ω-предельное множество" транзитивно: $x \in \omega(y)$, $y \in \omega(z) \Rightarrow x \in \omega(z)$. Имеем $O_f(p) \subset \omega\left(O_f(g^{nk}(p))\right) = \omega\left(O_f(p)\right)$, $p \in \mathrm{Rec}(f)$, что и доказывает лемму. $\square$

2. Корни из неблуждающего множества

Покажем, что неблуждающее множество гомеоморфизма не уменьшается при извлечении корня.

Лемма 2.7. *Пусть $g : M \to M$ — гомеоморфизм, $n \in \mathbb{N}$ и $f = g^n$. Тогда $\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g)$.*

Доказательство. Пусть $x \in M \setminus \Omega(g)$ — блуждающая точка гомеоморфизма g. Тогда найдется такая ее окрестность U, что $g^k(U) \cap U = \varnothing$. Тогда тем более $g^{nk}(U) \cap U = f^k(U) \cap U = \varnothing$ для $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, точка x является блуждающей и для f. Таким образом, $M \setminus \Omega(g) \subseteq M \setminus \Omega(g^n)$ и $\Omega(g) \supseteq \Omega(g^n)$. $\square$

Исследуем тот случай, когда неблуждающее множество увеличивается при извлечении корня.

Определение 2.8. *Точка ξ называется* зацепленной *с точкой μ под действием гомеоморфизма g, если для любых окрестностей $U(\mu)$ и $V(\xi)$ точек μ и ξ соответственно найдется такое $N \in \mathbb{Z}$, что $U(\mu) \cap g^N\left(V(\xi)\right) \neq \varnothing$.*

Определение 2.9. *Если в предыдущем определении всегда можно выбрать $N \in \mathbb{Z}^-$ ($N \in \mathbb{Z}^+$), то точка ξ называется* α-зацепленной (ω-зацепленной). *Точку, являющуюся одновременно α- и ω-зацепленной, назовем* двоякозацепленной.

Определение 2.10. *Точки $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ называются циклически зацепленными если найдется $k \in 1, \ldots, n-1$, такое, что для всех $i = 1, \ldots, n-1$ точка ξ_i зацеплена с точкой $\xi_{(k+i) \mod n}$.*

Пример 2.11. *Пусть $X_1 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = \pm 1\}$. Пусть X — фактор-пространство пространства X_1 по отношению $(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, x_1 \notin \mathbb{Z}, x_1 = x_2, y_1 = y_2, x_1 \in \mathbb{Z}$ и*

$g \to (x, y) \to (x+1, y)$ — отображение на X. Тогда точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ являются блуждающими циклически зацепленными точками g.

Лемма 2.12. *Пусть $\xi \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Тогда все траектории $O_{g^n}(g^i(\xi))$, $i = 1 \dots n-1$, на которые распадается траектория $O_g(\xi)$, являются блуждающими циклически зацепленными относительно g^n.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Поскольку $\xi \in \Omega(g)$, то найдется k такое, что ξ зацеплена с $g^k(\xi)$. Цикличность зацепления следует из того, что g переводит зацепленные точки в зацепленные. □

Лемма 2.13. *Блуждающие зацепленные точки не являются регулярными.*

Доказательство. Пусть ξ и μ — блуждающие точки, зацепленные между собой, причем ξ — регулярна. Поскольку μ — блуждающая, найдется окрестность $U(\mu)$ точки μ, целиком лежащая вне некоторой окрестности $B_\varepsilon(\Omega)$ неблуждающего множества. С другой стороны, по определению регулярности, найдется такая малая окрестность $V(\xi)$ точки ξ, что все итерации этой окрестности, кроме конечного числа, будут лежать в $B_\varepsilon(\Omega)$. Это противоречит зацепленности. □

Следствие 2.14. *Блуждающие ω-зацепленные точки не являются ω-регулярными. Блуждающие α-зацепленные точки не являются α-регулярными.*

Замечание 2.15. *Примером блуждающей зацепленной точки является гетероклиническая точка на устойчивом многообразии седла. Такая точка зацеплена со всеми точками неустойчивого многообразия седла, однако циклической зацепленности здесь нет.*

Замечание 2.16. *Примеров циклической зацепленности блуждающих точек для динамических систем на многообразиях автор пока не знает.*

Лемма 2.17. *Циклически зацепленные точки являются цепно-рекуррентными.*

Доказательство. Пусть x — циклически зацепленная точка. Тогда существует последовательность точек

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x,$$

таких, что x_i зацеплена с x_{i+1}. Взяв в определении зацепленных точек ε-окрестности этих точек, получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ x_i можно соединить ε-цепью с x_{i+1}. Соединив ε-цепи точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, получим, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется ε-цепь, соединяющая x с собой. □

Замечание 2.18. *Из результатов* [**1, 4**] *следует, что у C^0-типичных гомеоморфизмов и C^1-типичных диффеоморфизмов множество неблуждающих точек совпадает с множеством цепно-рекуррентных точек. В частности, это справедливо для структурно устойчивых диффеоморфизмов.*

Следствие 2.19. *Неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма (в частности, диффеоморфизма Морса–Смейла) сохраняется при извлечении корня.*

Доказательство. Поскольку у структурно устойчивого диффеоморфизма множество неблуждающих точек совпадает с множеством цепно-рекуррентных точек, то все циклически зацепленные точки будут неблуждающими. □

3. Корни из цепно-рекуррентного множества

Лемма 2.20. *Пусть (X, ρ) – метризуемое топологическое пространство, $g : X \to X$ – равномерно непрерывное отображение, $n \in \mathbb{N}$ и $f = g^n$. Тогда $\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Очевидно, что любая ε-цепь для f является ε-цепью для g.

Рассмотрим ε-цепь для g. По определению равномерной непрерывности $\exists C$: $\forall x, y \in X$ $\rho(g(x), g(y)) < C\rho(x, y)$. Используя это неравенство, каждую ε-цепь для g можно заменить $nC\varepsilon$-цепью для f. □

Поскольку M — компакт, то его непрерывные отображения равномерно непрерывны и мы имеем следующее следствие:

Следствие 2.21. *Пусть* $g : M \to M$ *– гомеоморфизм,* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f = g^n$*. Тогда* $\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$*.*

4. Корни из множества регулярных точек

Пусть f — гомеоморфизм.

Следующее замечание прямо следует из определения.

Замечание 2.22. *Пусть* x *—* ω*-регулярная точка гомеоморфизма* g *и* $\Omega(g) = \Omega(g^n)$*. Тогда ее орбита останется* ω*-регулярной для* g^n*.*

Покажем, что верно и обратное утверждение.

Лемма 2.23. *Пусть* x *—* ω*-регулярная точка гомеоморфизма* g^n*. Тогда ее орбита останется* ω*-регулярной для* g*.*

Доказательство. Пусть $U = \varepsilon(\Omega(g))$ — ε-окрестность множества $\Omega(g)$. Из утверждения (1) Леммы 2.12 и компактности $\Omega(g^n)$ следует, что найдется такая $\tilde{\varepsilon}$-окрестность V_n множества $\Omega(g^n)$, что $\cup_{i=0}^{n-1} g(V_n) \subset U$.

С другой стороны, так как x регулярна для g^n, то для V найдется такая ее δ-окрестность W_x и число $N \in \mathbb{N}$, что для всех $k > N$, $g^{nk}(W_x) \subset V_n$. Отсюда вытекает, что $g^{nk+i}(W_x) \subset g^i(V_n) \subset U$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$ и $k > N$. Следовательно, $x \in \Omega(g)$. □

Следствие 2.24. *Пусть* $\Omega(g) = \Omega(g^n)$*. Тогда множества* α*- и* ω*-регулярных и регулярных точек при операции извлечения корня сохраняются.*

5. Корни из линейного отображения

Лемма 2.25. *Пусть* A *и* B *линейные матрицы такие, что* $A^n = B$*. Тогда их устойчивые подпространства* E^s *и неустойчивые подпространства* E^u *совпадают.*

Доказательство. Пусть J_A — жорданова нормальная форма для A, и матрица T сопрягает A и J_A. Тогда

$$B = A^n = \left(T^{-1} J_A T\right)^n = T^{-1} J_A^n T.$$

Отсюда, если матрица J_A диагональна, утверждение леммы получается непосредственно.

Предположим, что J_A не диагональна. Поскольку B сопряжено J_A^n, собственные значения B равны n-й степени соответствующих собственных значений A. Покажем, что корневые подпространства A для соответствующих собственных значений являются корневыми подпространствами B. Пусть λ — собственное значение A. Соответствующее собственное значение B будет λ^n. Пусть l — корневой вектор для A и λ. Тогда $(A - \lambda E)^k (l) = 0$. Рассмотрим $(B - \lambda^n E)^k(l)$:

$$\begin{aligned}(B - \lambda^n E)^k(l) &= (A^n - (\lambda E)^n)^k (l) = \\ &= \left((A - \lambda E)(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} E)\right)^k (l) = \\ &= \left(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} E\right)^k (A - \lambda E)^k (l) = \\ &= \left(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} E\right)^k (0) = 0.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что степени матрицы коммутируют между собой. Отсюда вытекает, что l — корневой вектор для B и корневые подпространства для A являются корневыми для B. Так как A и B имеют одинаковую размерность, их корневые подпространства совпадают. Поскольку устойчивые и неустойчивые подпространства (см. 1.12) образованы из корневых подпространств, то они совпадают для A и B. $\square$

Лемма 2.26 ([**8**], глава VIII, §6). *Пусть B — линейная невырожденная матрица. Тогда матричное уравнение $A^n = B$ всегда имеет решение.*

Следствие 2.27. *В окрестности гиперболической периодической точки всегда можно извлечь корень.*

6. Корни из периодической гиперболической точки

Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f, и g — его корень степени n: $g^n = f$.

Из леммы 2.4 следует, что p будет периодической точкой и для g. Так как p является ω-предельным множеством для устойчивого многообразия и α-предельным множеством для неустойчивого многообразия, то из леммы 2.24 получаем

Следствие 2.28. *Устойчивые и неустойчивые многообразия точки p относительно g будут теми же, что и относительно f.*

Лемма 2.29. *Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f, и g — его гладкий корень степени n: $g^n = f$. Пусть $D_p(f)$ — производная f в p. Тогда g — локальный диффеоморфизм, и g локально топологически сопряжен некоторой матрице-корню из $D_p(f)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно полагать, что p — неподвижная точка g. По правилу дифференцирования, равенство $g^n = f$ дает $D_p^n(g) = D_p(f)$, и, значит, g — локальный диффеоморфизм. По теореме Гробмана–Хартмана 1.18 g в окрестности p топологически сопряжен своей производной $D_p(g)$: найдется гомеоморфизм $h\colon M \to M$, такой, что $gh = hD_p(g)$. Тогда $hD_p(f) = hD_p^n(g) = ghD_p^{n-1}(g) = g^n h = fh$, т. е. h дополнительно сопрягает f и $D_p(f)$. $\square$

7. Корни из класса топологической сопряженности

Определение 2.30. *Корнем из класса топологической сопряженности гомеоморфизма f назовем класс топологической сопряженности некоторого корня f.*

Лемма 2.31. *Пусть f и f_1 топологически сопряжены, т.е. существует такой гомеоморфизм h, что $f_1 = h^{-1}fh$. Если $f = g^n$, то $f_1 = (h^{-1}gh)^n$.* $\square$

Следствие 2.32. *Определение корня из класса топологической сопряженности корректно.*

Как следствие, вместо того, чтобы доказать существование корня из данного гомеоморфизма, мы можем взять некоторый другой гомеоморфизм, сопряженный данному, и построить корень из него.

Глава 3

Корни из диффеоморфизмов Морса–Смейла двумерных многообразий

(И. Власенко)

Пусть M — двумерное многообразие. В работах [**12, 13**] диффеоморфизму Морса–Смейла ставится в соответствие конечный объект — различающий граф. Изоморфизм двух различающих графов задает взаимно однозначное соответствие между периодическими точками, гетероклиническими точками, устойчивыми и неустойчивыми многообразиями седловых периодических точек, блуждающими и периодическими компонентами диффеоморфизма. Показано, что это приводит к топологической сопряженности f и g.

1. Пример диффеоморфизма Морса–Смейла, не допускающего извлечения корня

На рис. 1 изображен диффеоморфизм Морса–Смейла двумерной сферы с 6 сохраняющими ориентацию фиксированными периодическими точками, из которых 2 источника, 2 стока и 2 седла (седла обозначены буквами s и p). В кольце между неустойчивым многообразием точки s и устойчивым многообразием точки p находится единственная гетероклиническая траектория диффеоморфизма.

Поскольку для существования корня n-й степени необходимо хотя бы n траекторий, то данный диффеоморфизм не допускает извлечения корня.

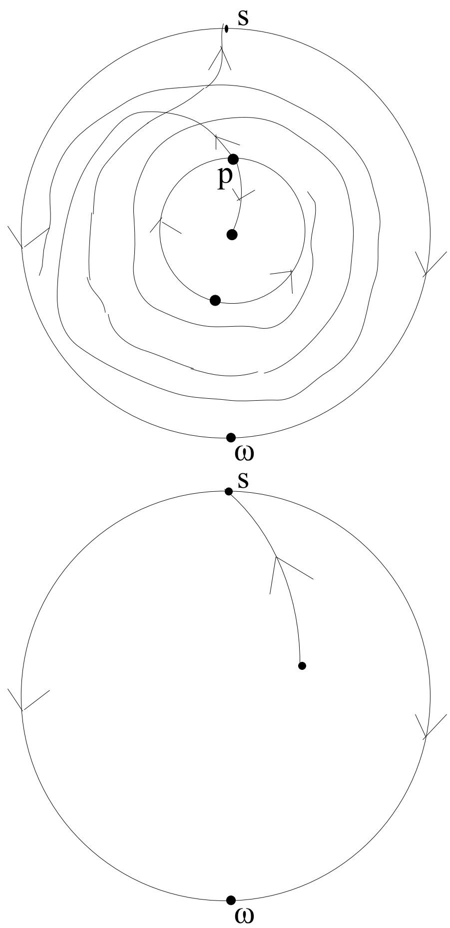


Рис. 1. Пример диффеоморфизма Морса–Смейла, не допускающего извлечения корня.

2. Различающий граф диффеоморфизма Морса–Смейла

Поставим в соответствие диффеоморфизму f ориентированный граф $G(f)$, вершины которого являются ориентированными кругами и соответствуют точкам из $\Omega(f)$, а ориентированные ребра — ориентированным “по течению” компонентам линейной связности множества $W \setminus \Omega(f)$. Все вершины (круги) ориентированы в соответствии с ориентацией поверхности. При этом граф имеет следующие свойства:

(1) вершины графа соответствуют периодическим точкам;
(2) ребра графа соответствуют сепаратрисам седел;
(3) каждой седловой вершине инцидентны в точности 2 входящих в нее (устойчивых) ребра и 2 выходящих из нее (неустойчивых) ребра. При этом на седловой вершине — ориентированном круге эти пары ребер размещены крестообразно;
(4) каждое ребро графа одним своим концом может быть инцидентно некоторой седловой вершине, а другим — стоку, источнику, или же иметь свободный конец (в этом случае соответствующая сепаратриса содержит гетероклинические точки, а соответствующее ребро называется **свободным**).

Пометим ребра графа и седловые вершины числовыми номерами.

Определение 3.1. *Граф $G(f)$, в котором ребра и седловые вершины помечены числовыми номерами, назовем* ***графом периодических точек*** *диффеоморфизма f.*

Диффеоморфизм f порождает на графе периодических точек некоторый автоморфизм $S_f : G(f) \to G(f)$. Его можно задать подстановкой на множестве ребер.

Пример графа периодических точек. В качестве примера выпишем граф периодических точек диффеоморфизма, изображенного на рис. 1.

Поскольку граф периодических точек несет на себе ориентацию многообразия, ориентируем многообразие на рис. 1 посредством правой ориентации. Периодические точки (в этом примере все они инвариантные) обведем малой окружностью с указанием ориентации многообразия.

Соединим эти окружности отрезками, соответствующими сепаратрисам седловых периодических точек так, чтобы взаимное расположение концов отрезков на окружности соответствовало взаимному расположению сепаратрис в окрестности периодической точки. В случае, если соответствующая сепаратриса не содержит гетероклинических точек, то она соединяет периодические точки и соответствующее ребро графа соединяет окружности. Иначе сепаратриса выходят из периодической точки и блуждает в многообразии.

Гетероклинические точки на графе периодических точек не указываются. Полученный граф изображен на рис. 2.

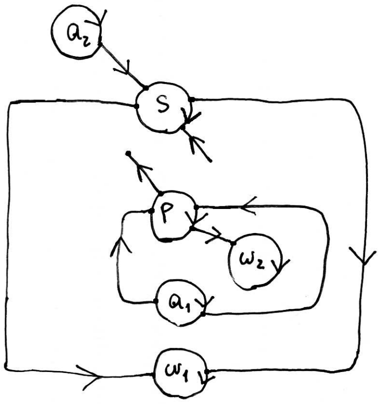


Рис. 2. Пример графа периодических точек.

2.1. Кодирующее множество диффеоморфизма Морса–Смейла. В работах [**12, 13**] построено множество, кодирующее гетероклинические траектории диффеоморфизма. В это множество ребра графа и седловые вершины входят с числовыми номерами, под которыми они помечены в графе периодических точек. Оно названо **основным кодирующим множеством**.

Пример кодирующего множества периодических точек. Выпишем кодирующее множество диффеоморфизма, изображенного на рис. 1.

Структура пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий этого диффеоморфизма в гетероклинических точках показана на рис. 3

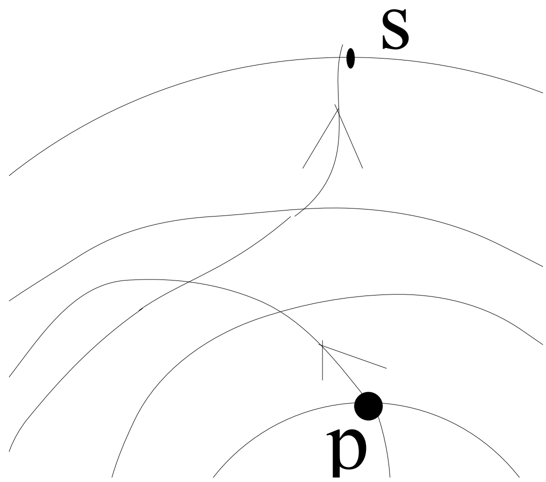


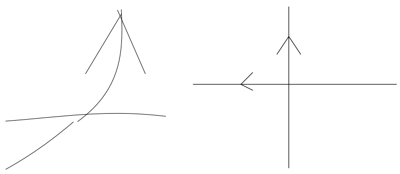
Рис. 3. Структура пересечения в гетероклинических точках.

В данном простейшем случае структура пересечения гетероклинических точек порождена единственной траекторией. Рассмотрим гетероклиническую точку этой траектории (см. рис. 4a). Репер пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий в этой точке задает левую ориентацию (см. рис. 4b).

Для построения графа периодических точек (см. рис. 2) была выбрана правая ориентация многообразия. Как мы видим, ориентация многообразия и ориентация пересечения могут не совпадать. Тот факт, что ориентации пересечения и ориентация многообразия различны, обозначим знаком "$-$", а случай, когда они совпадают — знаком "$+$".

Занумеруем согласно **[12, 13]** все гетероклинические точки на устойчивой $W_1^s(s)$ и неустойчивой $W_1^u(p)$ сепаратрисах. Точки орбиты получат пару номеров вида $(n, n,)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Сводя все вместе, получаем формулу кодирующего множества для этой орбиты, $W_1^s(s) \cap W_1^u(p)\,(n, n, -)_{n \in \mathbb{Z}}$.



$W_1^s(s) \cap W_1^u(p)\,(n, n, -)_{n \in \mathbb{Z}}$

a) b) c)

Рис. 4. Гетероклиническая точка. a) Фрагмент многообразия; b) граф пересечения; c) кодирование траектории формулой.

2.2. Различающий граф диффеоморфизма Морса–Смейла.

Определение 3.2. *Граф периодических точек $G(f)$, оснащенный подстановкой S_f и основным кодирующим множеством, называется* ***различающим графом*** *f и обозначается $G^*(f)$.*

Определение 3.3. *Различающие графы $G^*(f)$ и $G^*(g)$ диффеоморфизмов f и g соответственно будем называть* ***изоморфными****, если существуют:*

(1) *изоморфизм φ графов $G(f)$ и $G(g)$, сохраняющий ориентацию ребер и вершин и такой, что $Sf = \varphi S_g \varphi^{-1}$;*
(2) *изменение ориентации r, которое одновременно или сохраняет, или обращает ориентацию вершин графа и формул основного кодирующего множества;*
(3) *набор автоморфизмов нумерации для каждого свободного ребра $G(f)$*

такие, что основные кодирующие множества для f и g изоморфны.

Теорема 3.4. *Диффеоморфизмы f и g являются топологически сопряженными тогда и только тогда, когда их различающие графы изоморфны.*

2.3. Корень из различающего графа диффеоморфизма Морса–Смейла.

Определение 3.5. *Будем говорить, что основное кодирующее множество диффеоморфизма Морса–Смейла допускает извлечение корня m-й степени, если существует его подмножество такое, что при подстановке в его формулы вместо временного параметра t значений $t\frac{i}{m}$, $i = 0, \ldots, m$ оно порождает все множество.*

Определение 3.6. *Скажем, что различающий граф диффеоморфизма Морса–Смейла* ***допускает извлечение корня m-й степени****, если*

(1) *подстановка S_f допускает извлечение корня;*
(2) *основное кодирующее множество допускает извлечение корня m-й степени.*

Различающий граф корня диффеоморфизма Морса–Смейла. Различающий граф диффеоморфизма Морса-Смейла по своему определению является различающим графом для класса топологической сопряженности.

Из 2.19, 2.4, 2.24 следует, что у корня множества α–регулярных, ω-регулярных и регулярных точек, множества периодических точек будут теми же, что и для исходного диффеоморфизма Морса–Смейла. В частности, поскольку множества блуждающих нерегулярных точек состоят из устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек, корень из диффеоморфизма Морса–Смейла, даже не гладкий, обладает унаследованными гладко вложенными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Поэтому для корня диффеоморфизма Морса–Смейла, даже не гладкого, корректно определен различающий граф.

Следствие 3.7. *Диффеоморфизм Морса–Смейла допускает извлечение корня $\Longrightarrow$ различающий граф диффеоморфизма Морса–Смейла допускает извлечение корня.*

3. Основная теорема об извлечении корней

Следствие 3.7 формулирует необходимые условия существования корня из диффеоморфизма Морса–Смейла в терминах существования корня из различающего графа диффеоморфизма Морса–Смейла.

Фактически, корень из различающего графа диффеоморфизма Морса–Смейла является сужением некоторого потенциального корня диффеоморфизма Морса–Смейла на множества периодических и гетероклинических точек диффеоморфизма f. Целью настоящего раздела является обращение условий следствия 3.7.

Доказательство использует метод Дж. Палиса и С. Смейла [**16**], в котором они ввели и использовали трубчатые окрестности (см. определение трубчатых окрестностей и трубчатого семейства в разделе 3.2) для построения гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы Морса–Смейла.

Для упрощения доказательства мы используем трубчатые окрестности с дополнительными свойствами.

Определение 3.8. *Системы $T^u(\Omega_p)$ и $T^s(\Omega_p)$ трубчатых окрестностей неустойчивого и устойчивого многообразий периодической траектории Ω_p называются* ***системами трубчатых окрестностей с решетчатой структурой****, если они*

1) *инвариантные;*

2) *согласованные;*

3) *каждая трубчатая окрестность $T^u(\Omega_p)$ совпадает с соответствующей $T^s(\Omega_p)$ как топологическая окрестность;*

4) *Если $t^{u,k}(\xi) \cap t^{s,l}(\eta) \neq \varnothing$ то они имеют единственную точку пересечения.*

Легко увидеть, что объединение и пересечение систем с решетчатой структурой снова является системой с решетчатой структурой.

Существование таких систем трубчатых окрестностей было неявно упомянуто в работе [**16**]. Дадим простое доказательство их существования.

Лемма 3.9. *На двухмерном замкнутом многообразии каждый диффеоморфизм Морса–Смейла обладает системой трубчатых семейств с решетчатой структурой.*

Доказательство. Пусть $\Omega_k \in \Omega'(f)$ — периодическая седловая траектория, $T^u(\Omega_k)$ и $T^s(\Omega_k)$ — трубчатые семейства ее устойчивого и неустойчивого многообразий и x — периодическая точка из Ω_k.

Согласно λ-лемме для семейства трансверсальных дисков (см. [**11**]), $\forall\varepsilon > 0$ существует малая окрестность точки x, в которой волокна с $T^u(\Omega_k)$ ε-C^1 — близки к $W^u(x_k)$, а волокна с $T^s(\Omega_k)$ ε-C^1 — близки к $W^s(x_k)$. Взяв достаточно малое ε, получим, что жесткие ограничения на значения производных, препятствуют их повторному пересечению. Поэтому найдется малая окрестность $U(x) \subset T^u(\Omega_k) \cap T^s(\Omega_k)$ точки x такая, что в ней волокна из $T^u(\Omega_k)$ и $T^s(\Omega_k)$ пересекаются трансверсально и только в одной точке.

Выберем на $W^u(\Omega_k)$ и $W^s(\Omega_k)$ фундаментальные окрестности $G^u(\Omega_k)$ и $G^s(\Omega_k)$ такие, что множество

$$Q = \{x \in t^s(\xi) \cap t^u(\eta) \mid \xi \in G^u(\Omega_k), \eta \in G^s(\Omega_k)\}$$

полностью содержится в $U(x)$. Заметим, что $G^u(\Omega_k)$, $G^s(\Omega_k)$ имеют по две компоненты связности: $G^\sigma_1(x)$ и $G^\sigma_2(x)$. Зафиксируем произвольные гомеоморфизмы $d_{i,j} : G^u_i(x) \to G^s_j(x)$, которые обращают естественную ориентацию $G^u_i(x)$ и $G^s_j(x)$. Продолжим $d_{i,j}$ до гомеоморфизма $d_{i,j} : W^u_1(\Omega_k) \to W^s_1(\Omega_k)$, полагая, что $d_{i,j}(f^n(x)) = f^n(d_{i,j}(x))$, где $x \in G^\sigma_i(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть D множество графиков этих диффеоморфизмов в Q:

$$D = \{x \in t^s(\xi) \cap t^u(\eta) \mid \xi \in W^u(\Omega_k)\ \eta \in W^s(\Omega_k)\ d_{i,j}(\xi) = \eta\}.$$

В качестве новых трубчатых семейств $T^u_1(\Omega_k)$ и $T^s_1(\Omega_k)$ возьмем связные компоненты множеств $T^u(\Omega_k) \setminus D$ и $T^s(\Omega_k) \setminus D$, содержащие точки Ω_k.

Проверим, что это действительно трубчатое семейство. По построению оно открыто, расслоено на согласованную систему волокон по наследству от $T^u(\Omega_k)$ и $T^s(\Omega_k)$, инвариантность сохраняется благодаря построению, условие трансверсального пересечения волокон в одной точке выполняется по построению.

Ту же операцию проделаем и для других многообразий. □

Следствие 3.10. *По построению границы трубчатых семейств с решетчатой структурой гомеоморфны прямой. Более того, взяв в качестве* $d_{i,j} : G_i^u(x) \to G_j^s(x)$ *диффеоморфизмы, можно считать, что границы трубчатых семейств с решетчатой структурой являются кусочно-гладкими или даже гладкими кривыми.*

Далее мы будем использовать термины "трубчатая окрестность" и "система трубчатых окрестностей" считая, что это трубчатые окрестности с решетчатой структурой и системы трубчатых окрестностей с решетчатой структурой.

Понятие числа behavior периодической точки (см. 3.1), данное в **[15, 16]** для описания периодических точек, не очень удобно при работе с гетероклиническими траекториями. Удобнее использовать следующую его форму:

Определение 3.11. *Точку пересечения многообразий* $W^u(y)$ *и* $W^s(x)$*,* $x, y \in \Omega'(f)$ *будем называть* точкой beh-типа n*, если* $\mathrm{beh}(y|x) = n$*. Траекторию точки будем называть* траекторией beh-типа n.

Лемма 3.12. *Пусть* $W^\rho(x)$ *пересекает* $W^\sigma(y)$ *с* beh-*типом* n*. Тогда* $W^\rho(x)$ *не может иметь предельных кривых, которые пересекают* $W^\sigma(y)$ *с* beh-*типом, большим или равным* n*.*

Доказательство. Предположим, что существует предельная для $W^\rho(x)$ кривая $W^\rho(z)$, которая пересекает $W^\sigma(y)$ с beh-типом большим или равным n. Тогда мы можем соединить x и y путем длиной не менее n. Поскольку $W^\rho(z)$ является предельной кривой для $W^\rho(x)$, мы можем соединить x и z путем длиной не менее 1, и, значит, мы можем соединить x и y путем длиной не менее $n+1$. Но, по определению, максимальная длина такой дороги равна n. Получили противоречие. □

Лемма 3.13. *Для каждой седловой точки* y *на многообразии* $W^\sigma(y)$ *найдется конечное число таких траекторий, что* *объединение их трубчатых окрестностей содержит все гетероклинические траектории из* $W^\sigma(y)$.

Доказательство. Рассмотрим гетероклинические траектории beh-типа 1. $G^\sigma(y)$ содержит конечное число траекторий beh-типа 1. Другими словами, мы можем выбрать конечное число траекторий на $W^\sigma(y)$ beh-типа ≤ 1, содержащих в своих трубчатых окрестностях на $W^\sigma(y)$ остаток гетероклинических траекторий из $W^\sigma(y)$ beh-типа ≤ 1.

Продолжим доказательство индукцией по beh-типу траекторий из $W^\sigma(y)$. Предположим, что существует конечное множество траекторий $\{z_i\}_{i=1..p}$ из $W^\sigma(y)$ beh-типа $\leq k-1$, содержащие в своих трубчатых окрестностях на $W^\sigma(y)$ остаток гетероклинических траекторий из $W^\sigma(y)$ beh-типа также $\leq k-1$. Согласно лемме 3.12 множество траекторий beh-типа k не может иметь своими предельными траекториями траектории большего beh-типа, поэтому множество траекторий beh-типа k лежащих вне трубчатых окрестностей траекторий множества $\{z_i\}_{i=1..p}$ конечно, и его можно записать как $\{z_i\}_{i=p+1..q}$. Таким образом, множество $\{z_i\}_{i=1..q}$ имеет следующее свойство: трубчатые окрестности его точек содержат остаток гетероклинических траекторий на $W^\sigma(y)$ beh-типа $\leq k$.

Утверждение леммы получится когда k будет максимальным beh-типом траекторий на $W^\sigma(y)$. □

Пусть точка γ принадлежит пересечению $W^\sigma(z)$ и $W^\rho(x)$, $x, z \in \Omega'(f)$.

Определение 3.14. Трубчатой окрестностью $TU^\rho(\gamma)$ гетероклинической точки γ в $W^\sigma(z)$ *будем называть окрестность точки* γ *в* $W^\sigma(z)$, *являющуюся содержащей точку* γ *связной компонентой множества* $T^\rho(x) \cap W^\sigma(z)$.

Это определение, первоначально введенное в **[13]**, может несколько запутать читателя. Чтобы этого не произошло, напомним, что ранее было дано определение трубчатой окрестности периодической точки. Эта трубчатая окрестность является двухмерной окрестностью. Здесь же определена трубчатая окрестность гетероклинической точки, которая является одномерным отрезком, открытым в $W^\sigma(z)$. Таким образом, у гетероклинической точки γ есть две ее трубчатые окрестности, ρ-окрестность в $W^\sigma(z)$ и σ-окрестность в $W^\rho(x)$.

Определение 3.15. Трубчатой окрестностью $TU^\rho(\Gamma)$ траектории $\Gamma(\gamma)$ *назовем объединение трубчатых ρ-окрестностей ее точек.*

По определению трубчатая окрестность $TU^\rho(\Gamma)$ траектории Γ является несвязным объединением отрезков, лежащих в W'^σ.

Теорема 3.16. *Диффеоморфизм Морса–Смейла допускает извлечение корня $\Longleftrightarrow$ различающий граф диффеоморфизма Морса-Смейла допускает извлечение корня.*

Доказательство. *Необходимость* следует из 2.19.

Достаточность. Обозначим через f исходный диффеоморфизм Морса–Смейла. Нам необходимо построить гомеоморфизм g, являющийся искомым корнем из f.

Соответственно условиям теоремы, мы имеем отображение

$$g_0\colon (W'^u(f) \cap W'^s(f)) \cup \Omega(f) \to (W'^u(f) \cap W'^s(f)) \cup \Omega(f)$$

такое, что $g_0^n = f|_{(W'^u(f) \cap W'^s(f)) \cup \Omega(f)}$. Это отображение индуцировано корнем из различающего графа диффеоморфизма Морса–Смейла.

Положим $g|_{(W'^u(f) \cap W'^s(f)) \cup \Omega(f)} = g_0$.

Расширим область определения g отображения на все двухмерное многообразие.

Часть 1. В этой части мы строим отображение g_1, которое является расширением g_0 на множество $W'(f) \cup \Omega(f)$. Для простоты обозначений положим $g_0(\Omega_k) = \Omega_k$.

Построим g_1, используя индукцию по величине максимального beh-типа точек на $W^\sigma(\Omega_k)$. На шаге k индукции мы распространяем g_0 на все многообразия, в которых максимальный beh-тип точек равен k.

Рассмотрим трубчатую ρ-окрестность $TU^\rho(\gamma)$ гетероклинической точки $\gamma \in W^\rho(\Omega_k) \cap W^\sigma(x)$ в $W^\sigma(x)$. Пусть ν_γ^{-1} — непрерывное отображение $TU^\rho(\gamma) \to \pi(TU^\rho(\gamma))$, являющееся ограничением проекции $\pi\colon T^\rho(\Omega_k) \to W^\sigma(\Omega_k)$ на точки отрезка $TU^\rho(\gamma)$. Поскольку $TU^\rho(\gamma)$ является пересечением $T^\rho(\Omega_k)$ с $W^\sigma(x)$, то $W^\sigma(x)$ пересекает каждый слой из $T^\rho(\Omega_k)$ в единственной точке, так что ν_γ^{-1} является биекцией и имеет обратное отображение ν.

База индукции. Рассмотрим $W^\sigma(\Omega_k)$, которое не содержит гетероклинических точек (для него максимальный beh-тип можно положить равным 0). Возьмем произвольную фундаментальную окрестность $G^\sigma(\Omega_k)$ многообразия $W^\sigma(\Omega_k)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $G^\sigma(\Omega_k)$ — один отрезок (в этом случае Ω_k состоит из одной точки, а именно, из сохраняющего ориентацию седла).

Граница $G^\sigma(\Omega_k)$ состоит из точек x и $f(x)$. Тогда произвольный непрерывный корень степени n из сужения $f|_{W^\sigma(\Omega_k)}$ строится следующим образом: выберем на $G^\sigma(\Omega_k)$ $n-1$ произвольных точек. В порядке их расположения между точками x и $f(x)$ назовем их $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Дополнительно положим $x_0 = x$, $x_n = f(x)$, $x_{n+1} = f(x_1)$. Выберем произвольные гомеоморфизмы $d_i : [x_{i-1}, x_i] \to [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, и определим с их помощью g_1 на $G^\sigma(\Omega_k)$: $g_1|_{[x_{i-1},x_i]} = d_i$. Теперь определим g_1 на $W^\sigma(\Omega_k)$ следующим образом: для $x \in W^\sigma(\Omega_k)$, $f^m(x) \in G^\sigma(\Omega_k)$ положим $g_1(x) = f^m(g_1(f^{-m}(x)))$.

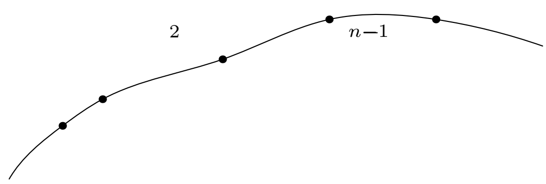


Рис. 5. $G^\sigma(\Omega_k)$

В случае, когда $G^\sigma(\Omega_k)$ состоит из нескольких отрезков, отображение g_0 задает порядок перекладывания этих отрезков. При этом число отрезков делит степень корня (иначе различающий граф диффеоморфизма Морса–Смейла не допускал бы извлечения корня). Пусть число отрезков m. Выберем на каждом из отрезков $\frac{n}{m}$ произвольных точек и применим те же рассуждения.

Повторим эту операцию для всех многообразий, не содержащих гетероклинические точки.

Шаг индукции. Допустим, что мы расширили g_0 к g_1 на многообразия с W'^{σ}, которые содержат гетероклинические точки с beh-типом, не превышающим $n-1$.

Расширим g_0 к g_1 на многообразия с W'^{σ}, которые содержат гетероклинические точки с beh-типом $\leq n$. Пусть $W^{\sigma}(z)$ будет таким многообразием. Выберем на $W^{\sigma}(\Omega_k)$ фундаментальную окрестность $G^{\sigma}(\Omega_k)$ такую, что $\partial G^{\sigma}(\Omega_k) \subset W'^{u}(f) \cap W'^{s}(f)$. Положим

$$U = G^{\sigma}(\Omega_k) \setminus \cup_l TU^{\rho,k}(\Omega_l),$$

где $TU^{\rho,k}(\Omega_l)$ — множество трубчатых окрестностей в многообразии $W^{\sigma}(\Omega_k)$ для точек с $W^{\rho}(\Omega_l)$.

По лемме 3.13, $\cup_l TU^{\rho,k}(\Omega_l)$ может быть вложено в конечное число окрестностей $TU(\gamma_1)...,TU(\gamma_m)$. Определим g_1 на каждой окрестности $TU(\gamma_i)$ с помощью локальной структуры прямого произведения, полагая $g_1(x) = \nu_{(\gamma_i)}(g_1(\nu^{-1}_{(\gamma_i)}(x)))$ (на проекциях g_1 определен на предыдущих шагах индукции). Вне U продолжим g_1 по непрерывности каким-нибудь гомеоморфизмом.

Продолжим g_1 на все многообразие $W^{\sigma}(\Omega_k))$. Пусть $x \in W^{\sigma}(\Omega_k) \setminus G^{\sigma}(\Omega_k)$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^n(x) \in G^{\sigma}(\Omega_k)$. Положим $g_1(x) = f^{-n}(g_1(f^n(x)))$. Полученный g_1 непрерывен благодаря использованию в построении локальной структуры прямого произведения.

Часть 2. В предыдущей части мы построили гомеоморфизм g_1, являющийся расширением g_0 на множество $W'(f) \cup \Omega(f)$. Чтобы построить расширение g на все многообразие M гомеоморфизма g_1, продолжим g_1 из множества $\mathbf{cl}W'$ на множество $V(\{T\}) = \cup_k \mathbf{cl}(T^{\sigma}\,(\Omega_k))$. Согласно лемме 3.9 $V(\{T\})$ имеет структуру прямого произведения. Определим $g\colon V(\{T\}) \to V(\{T\})$ следующим образом: если $x = t^{\rho,k}(\xi_1) \cap t^{\sigma,l}(\xi_2)$, то в качестве $g(x)$ возьмем $t^{\rho,k}\,(g(\xi_1)) \cap t^{\sigma,l}\,(g(\xi_2))$, т. е. образ точки определяется через образы ее проекций ξ_1 и ξ_2 в некоторой трубчатой окрестности. Поскольку трубчатые окрестности согласованы, образ точки не зависит от выбора проекций. Непрерывность g вытекает из непрерывности g_1 благодаря используемой при ее определении структуре прямого произведения.

Рассмотрим оставшееся множество $M \setminus V(\{T\})$. Связные компоненты этого множества состоят из регулярных блуждающих точек (см. лемму 1.25). Соответственно, связные компоненты этого множества лежат либо в блуждающих, либо в периодических регулярных компонентах диффеоморфизма (см. определение регулярных компонент в 1.10).

Определим g как расширение g_1 на такие компоненты.

Пусть связная компонента S множества $M \setminus V(\{T\})$ содержится в периодической компоненте диффеоморфизма.

Как было показано в [**17**], в границу каждой периодической компоненты входят сток и источник, причем в этой компоненте найдется кривая, соединяющая сток и источник, разбивающая ее на две компоненты связности. В действительности (поскольку трубчатая окрестность утончается по мере приближения к стоку или источнику) эту кривую всегда можно выбрать так, чтобы она разбивала и рассматриваемую компоненту S. Соответственно, в дополнении к стоку и источнику мы будем иметь две компоненты границы трубчатых окрестностей в S. Обозначим через S' дополнение в S к множеству трубчатых окрестностей. При этом границы трубчатых окрестностей в S будут границами S'.

Поскольку отображение g_1 уже задано на трубчатых окрестностях, на каждой из двух компонент границы S' отображение g_1 уже задано. Продолжим его внутрь S'. Воспользуемся тем, что в силу построения границы трубчатых окрестностей можно считать кусочно-гладкими кривыми (см. 3.10).

Рассмотрим сначала случай, когда S — инвариантная компонента. Пусть x_0^1 — точка на первой компоненте границы S', а x_0^2 — точка на второй компоненте. Обозначим $x_i^j = g_1^i(x_0^j)$.

Произвольный непрерывный корень степени n из сужения $f|_{S'}$ строится следующим образом: выберем в S' n произвольных гладких кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ таких, что граница $\partial\gamma_i = \{x_i^1, x_i^2\}$. Дополнительно положим $\gamma_n = f(\gamma_0)$, $\gamma_{n+1} = f(\gamma_1)$.

Обозначим через Δ_i, где $i = 1 \dots n$, область, ограниченную γ_{i-1}, отрезком первой компоненты границы $[x^1_{i-1}, x^1_i]$, γ_{i-1} и отрезком второй компоненты границы $[x^2_{i-1}, x^2_i]$. Выберем произвольный набор гомеоморфизмов $d_i : \Delta_i \to \Delta_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$ и определим с их помощью g на S': $g|_{S'} = d_i$. Обозначим $\Delta = \bigcup_{i=1 \dots n} \Delta_i$. Теперь определим g на S' следующим образом: для $x \in S'$, $f^m(x) \in \Delta$ положим $g(x) = f^m(g(f^{-m}(x)))$.

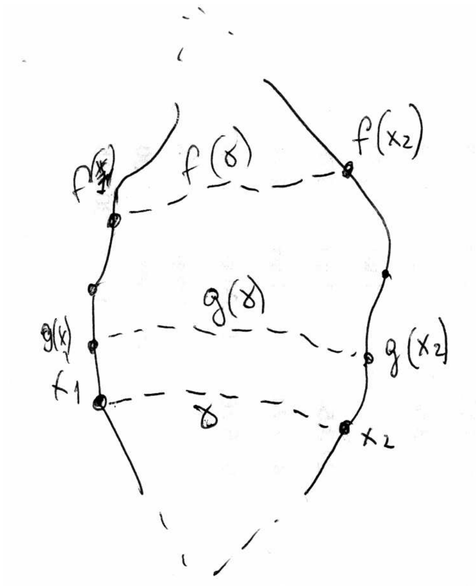


Рис. 6. S' и Δ.

В случае, когда S не инвариантная, а периодическая компонента, применимы те же рассуждения, с тем только отличием, что дополнительно вовлекаются другие периодические компоненты, лежащие в орбите S.

Повторим эту операцию для всех периодических компонент.

Определим g на связных компонентах $M \setminus V(\{T\})$ содержащихся в блуждающих компонентах диффеоморфизма. Под действием f эти компоненты разбиваются на конечное число классов эквивалентности (это является простым следствием из леммы 3.13). Поскольку каждая блуждающая компонента диффеоморфизма Морса–Смейла поверхности гомеоморфна диску [**6**], то и связные компоненты множества $M \setminus V(\{T\})$ тоже гомеоморфны диску.

Выберем по соответствующему представителю D_i из каждого класса эквивалентности связных компонент множества $M \setminus V(\{T\})$ под действием f. На границах D_i гомеоморфизм g уже задан. Продолжим его внутрь этих компонент по непрерывности какими-нибудь гомеоморфизмами. На остальных компонентах положим $g(f^n(D_i)) = f^n(g(D_i))$.

Таким образом, мы определили гомеоморфизм $g : M \to M$, такой, что $g^n = f$. Это и доказывает теорему. $\square$

Глава 4

Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов числовой прямой $\mathbb{R}$

(С. Максименко)

В даном обзоре мы описываем структуру корней из гомеоморфизмов одномерных многообразий числовой прямой $\mathbb{R}$ и окружности S^1. Построения основаны на работе Ш. Стернберга [**23**] (случай $\mathbb{R}$), и на работах ван Кампена [**24**] и Н. Маркли [**21**] (случай S^1) о классификации гомеоморфизмов этих пространств с точностью до сопряженности. Из этих классификаций мы извлекаем информацию о корнях.

Везде ниже все гомеоморфизмы прямой (отрезка, окружности) предполагаются сохраняющими ориентацию. Через $\mathrm{Fix}(f)$ мы обозначаем множество неподвижных точек гомеоморфизма f.

Пусть $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ — группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов числовой прямой $\mathbb{R}$.

Лемма 4.1. (i) *Если* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, *то* $\mathrm{Fix}(f^n) = \mathrm{Fix}(f)$ *для* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) *Пусть* $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *— поток на* $\mathbb{R}$. *Тогда* $\mathrm{Fix}(f_s) = \mathrm{Fix}(f_t)$ *для* $s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Таким образом, произвольная (даже дробная в случае потоков) степень f имеет те же неподвижные точки.

Доказательство. (i) Пусть $x \in \mathrm{Fix}(f^n)$, $n \geq 2$, т.е. $f^n(x) = x$. Можем считать, что $x \leq f(x)$. Так как f — это строго возрастающая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то

$$x \leq f(x) \leq \cdots \leq f^n(x) = x,$$

откуда $f(x) = x$.

(ii) Пусть $s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если $ms = nt$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$, то $f_{ms} = (f_s)^m$, то из (i) получаем

$$\mathrm{Fix}(f_s) = \mathrm{Fix}(f_{ms}) = \mathrm{Fix}(f_{nt}) = \mathrm{Fix}(f_t).$$

Если же $ms \neq nt$ ни для каких $m, n \in \mathbb{Z}$, то найдутся последовательности $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ такие, что $|m_i s - n_i t| \to 0$. Пусть $x \in \mathrm{Fix}(f_s)$. Тогда

$$\lim_{i\to\infty} (f_t)^{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i t}(x) = \lim_{i\to\infty} f_{m_i s}(x) = x,$$

что возможно, только если $f_t(x) = x$. Таким образом, $\mathrm{Fix}(f_s) \subset \mathrm{Fix}(f_t)$. Аналогично, $\mathrm{Fix}(f_t) \subset \mathrm{Fix}(f_s)$. □

1. Классификация гомеоморфизмов $\mathbb{R}$

Напомним, что два гомеоморфизма $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ топологических пространств X и Y сопряжены, если существует гомеоморфизм $h : X \to Y$ такой, что $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Если $f : X \to X$ — гомеоморфизм, то дискретным потоком (X, f) на X, соответствующим f, называется совокупность всех степеней f, т.е.

$$(X, f) = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Гомоморфизмом дискретных потоков $p : (X, f) \to (Y, g)$ называется такое непрерывное отображение $h : X \to Y$, что $f = h \circ g \circ h^{-1}$. В случае, если h — гомеоморфизм, то соответствующие дискретные потоки (X, f) и (Y, g) называются *изоморфными*, а гомеоморфизмы f и g — *сопряженными.*

Следующая теорема дает классификацию гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ с точностью до сопряженности.

Теорема 4.2 (Ш. Стернберг [**23**]). *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гомеоморфизмы. Они сопряжены тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что выполнены следующие два условия:*

(i) *$p(\mathrm{Fix}(g)) = \mathrm{Fix}(f)$;*
(ii) *для каждой точки $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ знаки чисел $f(x) - x$ и $g(p(x)) - p(x)$ одинаковы.*

Поясним подробнее условие (ii). Пусть J — дополнительный интервал к $\mathrm{Fix}(f)$. Тогда из (i) следует, что $p(J)$ — соответствующий дополнительный интервал к $\mathrm{Fix}(g)$. Требуется, чтобы графики ограничений f на J и g на $p(J)$ одновременно лежали либо выше прямой $y = x$, либо ниже ее.

Доказательство. Очевидно, что условия (i) и (ii) необходимы. Обратно, если они выполняются, то для построения гомеоморфизма h, сопрягающего f и g, нужно только подправить p на дополнительных к $\mathrm{Fix}(f)$ интервалах. Положим $h(x) = p(x)$ для $x \in \mathrm{Fix}(f)$.

Пусть $J = (a, b)$ — дополнительный интервал к $\mathrm{Fix}(f)$, где a и b могут быть бесконечными, и пусть $A_0 \in J$ — произвольная точка. Обозначим $A_i = f^i(A_0)$, $i \in \mathbb{Z}$. Не теряя общности, можем предполагать, что $A_0 < f(A_0)$. Тогда $\{A_i\} \subset J$, $A_i < A_{i+1}$ для $i \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{i\to-\infty} A_i = a$ и $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = b$.

Заметим, что $K = p(J)$ — дополнительный интервал к $\mathrm{Fix}(g)$. Пусть $B_0 \in K$ произвольная точка и $B_i = g^i(B_0)$, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда, по условию (ii), $B_0 < g(B_0)$, и мы получаем аналогичную $\{A_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ последовательность $\{B_i\} \subset K$ такую, что $B_i < B_{i+1}$ для $i \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{i\to-\infty} B_i = p(a)$ и $\lim\limits_{i\to+\infty} B_i = p(b)$.

Положим $h(A_0) = B_0$. Тогда

$$h(A_i) = h \circ f^i(A_0) = g^i \circ h(A_0) = g^i(B_0) = B_i,$$

и значит $h([A_i, A_{i+1}]) = [B_i, B_{i+1}]$. Зафиксируем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\xi : [A_0, A_1] \to [B_0, B_1]$ и для каждого $i \in \mathbb{Z}$ определим $h : [A_i, A_{i+1}] \to [B_i, B_{i+1}]$ с помощью формулы $h = f^i \circ \xi \circ g^{-i}$. Очевидно, что так определенный диффеоморфизм h сопрягает f и g. Идея этого построения проиллюстрирована на Рис. 1. $\square$

Следствие 4.3. *Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ включается в поток, т.е. существует поток $\Phi(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) = \Phi(x, 1)$.*

Доказательство. Для каждого $\alpha > 0$ определим гомеоморфизм $f_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ по формуле $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Очевидно,

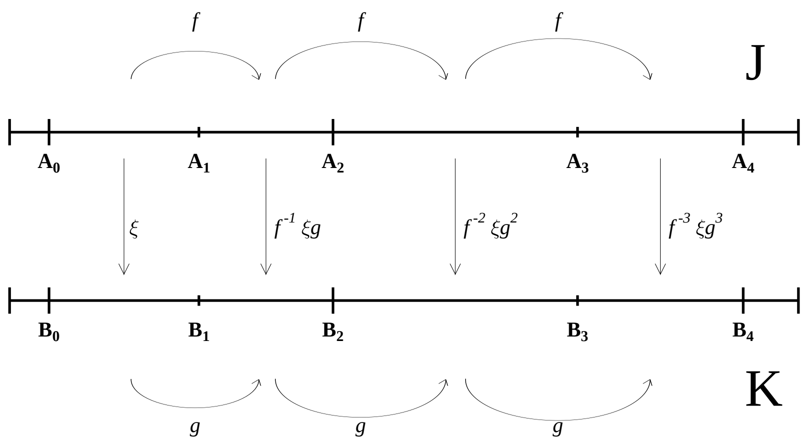


Рис. 1

что $\mathrm{Fix}(f_\alpha) = \{0, 1\}$ при $\alpha \neq 1$. Кроме того, f_α включается в следующий поток: $\Phi(x, t) = x^{\alpha^t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, то удобней считать, что g является гомеоморфизмом отрезка $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Кроме того, по лемме 4.1 поток, содержащий g, обязательно неподвижен на множестве $\mathrm{Fix}(g)$. Поэтому достаточно включить в поток ограничение g на дополнительные интервалы к $\mathrm{Fix}(g)$. Пусть J такой интервал. Если $g(x) > x$ для всех $x \in J$, то из теоремы 4.2 следует, что сужение g на замыкание $\overline{J}$ сопряжено с f_α для каждого $\alpha < 1$. Аналогично, при $g(x) < x$ сужение $g|_{\overline{J}}$ сопряжено с f_α для $\alpha > 1$. Так как f_α включается в поток, то то же самое верно и для $g|_{\overline{J}}$. $\square$

2. Корни из гомеоморфизмов $\mathbb{R}$

Согласно следствию 4.3 каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм прямой включается в поток, и поэтому допускает извлечение корней произвольной степени.

В доказательстве следующей теоремы мы дадим конструктивное построение корней из гомеоморфизма прямой.

Теорема 4.4. *Для каждого нетождественного гомеоморфизма f прямой и каждого $n \geq 2$ множество корней степени n из f несчетно.*

Доказательство. По лемме 4.1, корень из f имеет те же неподвижные точки, что и f. Следовательно, нужно научиться извлекать корни из сужения f на дополнительные к $\mathrm{Fix}(f)$ интервалы.

Достаточно рассмотреть случай такого гомеоморфизма $f : [0,1] \to [0,1]$, у которого $\mathrm{Fix}(f) = \{0,1\}$. Для определенности будем также предполагать, что $f(x) > x$ для $x \in (0,1)$. Рассмотрим вначале случай $n = 2$.

1) Выберем произвольно числа $A_0, A_1 \in (0,1)$ таким образом, чтобы $A_0 < A_1 < f(A_0)$ и для каждого $i \in \mathbb{Z}$ положим

$$A_{2i} = f^i(A_0) \qquad \text{и} \qquad A_{2i+1} = f^i(A_1),$$

см. рис. 2.

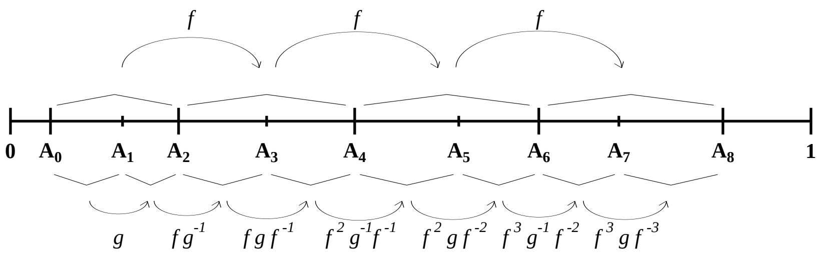


Рис. 2

Отметим, что $\lim\limits_{i\to-\infty} A_i = 0$ и $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = 1$.

Предположим, что мы построили такой квадратный корень g из f, что $g(A_0) = A_1$. Тогда $A_i = g^i(A_0)$.

Выберем произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : [A_0, A_1] \to [A_1, A_2]$ и определим гомеоморфизм

$g : [0, 1] \to [0, 1]$ по формуле:

$$g(x) = \begin{cases} f^i \circ h \circ f^{-i}(x), & x \in [A_{2i}, A_{2i+1}], \\ f^{i+1} \circ h^{-1} \circ f^{-i}(x), & x \in [A_{2i+1}, A_{2i+2}]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Легко проверяется, что $g^2 = f$. Эта формула проиллюстрирована на рис. 2.

Произвол в построении корня из f состоит в выборе точки $A_1 \in (A_0, f(A_0))$ и гомеоморфизма $h : [A_0, A_1] \to [A_1, f(A_0)]$. Множество таких пар, очевидно, несчетно.

Аналогично, корень n-й степени из f однозначно определяется выбором $n-1$ точек $A_1 < A_2 < \ldots < A_{n-1} \in (A_0, A_n)$ и $n-1$ гомеоморфизмов $h_i : [A_i, A_{i+1}] \to [A_{i+1}, A_{i+2}]$, где $A_n = f(A_0)$ и $i = 0, ..., n-2$. Теорему 4.4 доказано. □

Следствие 4.5. *Пусть x — изолированная неподвижная точка гомеоморфизма $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$. Пусть (a, x) и (x, b) — дополнительные интервалы к $\mathrm{Fix}(f)$ с концами в точке x. Предположим, что g_1, g_2 — корни n-й степени из f, совпадающие в окрестности точки x. Тогда $g_1 = g_2$ на $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим, что $g_1 = g_2$ на отрезке $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset [a, b]$. Тогда найдется такая точка $y \in (x - \varepsilon, x)$, что $f(y) \in (x - \varepsilon, x)$. Согласно построению корня n-й степени из f, описанному в теореме 4.4, задание его на отрезке $[y, f(y)]$ однозначно определяет этот корень и на (a, x). Так как $g_1 = g_2$ на $[y, f(y)] \subset [a, x]$, то $g_1 = g_2$ на $[a, x]$. Аналогично, $g_1 = g_2$ на $[x, b]$. □

3. Корни из специальных классов гомеоморфизмов $\mathbb{R}$

Для $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ и $r = 1, \ldots, \infty$ обозначим через $\mathcal{H}^r_{fix}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}^r_{fix}(\mathbb{R})$ подгруппы в $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, состоящие из таких гомеоморфизмов g, что сужение $g|_{\mathbb{R}\setminus\mathrm{Fix}(f)}$ принадлежит классу C^r или является диффеоморфизмом класса C^r соответственно. Пусть также $\mathcal{PL}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}^r(\mathbb{R})$ — соответственно группы сохраняющих ориентацию кусочно-линейных гомеоморфизмов и диффеоморфизмов $\mathbb{R}$.

Следствие 4.6. *Пусть G обозначает одну из групп: $\mathcal{PL}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}^r_{fix}(\mathbb{R})$ или $\mathcal{D}^r_{fix}(\mathbb{R})$. Если $f \in G$ и $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, то множество корней степени $n \geq 2$ из f, принадлежащих G, несчетно.*

Доказательство. Пусть $f \in G$. Покажем, что корень n-й степени из f можно выбрать так, чтобы он лежал в G. Для простоты ограничимся случаем $n = 2$ и сохраним обозначения использованные в доказательстве теоремы 4.4.

Пусть

$$J_0 = (A_0 - \varepsilon_0, A_0 + \varepsilon_0), \qquad \text{и} \qquad J_1 = (A_1 - \varepsilon_1, A_1 + \varepsilon_1)$$

дизъюнктные окрестности A_0 и A_1, не содержащие других точек A_i для $i \neq 0, 1$ и такие, что $f(J_0) \cap J_1 = \varnothing$. Положим

$$J_{2i} = f(J_0), \qquad \text{и} \qquad J_{2i+1} = f(J_1).$$

Тогда J_i — окрестность A_i и $J_i \cap J_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Пусть $h_0 : J_0 \to J_1$ — произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм "на" такой, что $h_0(A_0) = A_1$. Другими словами h_0 — это монотонная функция заданная на J_0 и такая, что $h_0(A_0 - \varepsilon_0) = A_1 - \varepsilon_1$ и $h_0(A_0 + \varepsilon_0) = A_1 + \varepsilon_1$.

Положим $h_1 = f \circ h_0^{-1} : J_1 \to J_2$. Рассмотрим отрезок $[A_0, A_1]$. В окрестностях его концов заданы монотонные функции h_0 и h_1. Построим теперь произвольную монотонную функцию $h : [A_0, A_1] \to [A_1, A_2]$, которая совпадает с h_i в окрестности A_i, $i = 0, 1$.

Наконец, доопределим g на весь отрезок $[0, 1]$ по формуле (2.1).

Если f принадлежит группе G, то в описанной конструкции можем выбрать h_0 и h так, чтобы они принадлежали классу C^r, были кусочно-линейными гомеоморфизмами или диффеоморфизмами. Тогда таким же будет и g. □

4. Корни из диффеоморфизмов $\mathbb{R}$

Рассмотрим теперь вопрос о возможном количестве корней n-й степени из диффеоморфизма, которые также являются диффеоморфизмами. Мы покажем, что в противоположность предыдущим случаям, таких корней не более чем один.

Утверждение 4.7. *Пусть* $f \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R})$, $r \geq 2$. *Предположим, что* $f'(x) \neq 1$ *для некоторой своей неподвижной точки* x. *Тогда* x *— изолированная точка множества* $\mathrm{Fix}(f)$. *Пусть* (a, x) *и* (x, b) *— дополнительные интервалы к* $\mathrm{Fix}(f)$ *с концами в точке* x. *Если* $g_1, g_2 \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R})$ *— корни* n*-й степени из* f, *то* $g_1 = g_2$ *на* $[a, b]$.

Доказательство. Отметим, что если x не является изолированной для $\mathrm{Fix}(f)$, то из непрерывности производной f' следует, что $f'(x) = 1$. Поэтому в соответствии со следствием 4.5 достаточно доказать, что $g_1 = g_2$ в окрестности точки x.

Обозначим $a = f'(x) \neq 1$. Тогда

$$g_1'(x) = g_2'(x) = \sqrt[n]{f'(x)} = \sqrt[n]{a}.$$

Не теряя общности, можем предполагать, что $x = 0$. Тогда по теореме 2 из [**23**], f сопряжен с линейным диффеоморфизмом $\widetilde{f}(x) = ax$ с помощью диффеоморфизма q класса C^{r-1}, т.е. $\widetilde{f} = q \circ f \circ q^{-1}$. Тогда $\widetilde{g}_i = q \circ g_i \circ q^{-1}$ является корнем n-й степени из $\widetilde{f}$ класса C^{r-1}. Теперь единственность корня вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.8. *Пусть* $f(x) = a^n x$ *— линейный диффеоморфизм, где* $a > 0$, $a \neq 1$, $n = 2, 3, \ldots$. *Тогда существует* единственный диффеоморфизм g *класса* C^1 *такой, что* $g^n = f$. *Он также является линейным и задается формулой:* $g(x) = ax$.

Действительно, так как $r - 1 \geq 1$, то $\widetilde{g}_1 = \widetilde{g}_2$, а следовательно, и $g_1 = g_2$ в окрестности 0. Это доказывает утверждение 4.7. □

Доказательство Леммы 4.8. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Пусть g — произвольный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм класса C^1 такой, что $f = g^2$. Выберем произвольную точку $A_0 \neq 0$ и покажем, что $g(A_0) = aA_0$. Положим $A_i = g^i(A_0)$.

Для определенности, пусть $a < 1$. Тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} A_i = 0$. Действительно,

$$\lim_{k\to+\infty} A_{2k} = \lim_{k\to+\infty} g^{2k}(A_0) = \lim_{k\to+\infty} f^k(A_0) = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} A_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} g^{2k}(A_1) = \lim_{k\to+\infty} f^k(A_1) = 0.$$

Так как g принадлежит классу C^1, то $g'(0) = a$. Следовательно,

$$a = g'(0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{g(A_{2i})}{A_{2i}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f^i(A_1)}{f^i(A_0)} = \frac{a^i A_1}{a^i A_0} = \frac{A_1}{A_0},$$

т.е. $g(A_0) = A_1 = aA_0$. □

Предположим, что $f : [0,1] \to [0,1] - C^r$, $r \geq 2$ диффеоморфизм, у которого $f'(0) \neq 1 \neq f'(1)$. Тогда из предложения 4.7 следует, что в окрестности 0 существует единственный корень g_0 степени n из f класса C^{r-1}. Из построения корня вытекает, что g_0 может быть продолжен до корня на всем отрезке с возможной потерей гладкости в окрестности 1.

Аналогично, в окрестности 1 существует единственный корень g_1 степени n из f класса C^{r-1}, который продолжается до корня на всем отрезке с возможной потерей гладкости в окрестности 0.

Априори неизвестно совпадут ли g_0 и g_1. Это показывает, что диффеоморфизм может не иметь гладких корней.

5. Классификация гомеоморфизмов окружности S^1

Под окружностью S^1 будем понимать единичную окружность в комплексной плоскости: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Определим универсальное накрывающее отображение $q : \mathbb{R} \to S^1$ по формуле $q(t) = e^{2\pi i t}$.

Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Тогда f поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, удовлетворяющего условию

$$\widetilde{f}(x+1) = \widetilde{f}(x) + 1. \tag{5.2}$$

Обратно, всякий гомеоморфизм $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию (5.2), индуцирует некоторый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности.

5.1. Число вращения. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм и $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ его поднятие. Тогда, предел

$$r(\widetilde{f}) = \lim_{|n|\to\infty} \frac{\widetilde{f}^n(t)}{n}$$

существует и не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$. Он называется *числом вращения* гомеоморфизма f.

Следующее утверждение можно найти в работе ван Кампена [**24**], (см. также З. Нитецки [**22**]).

Лемма 4.9. *1) Пусть $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — два различных поднятия гомеоморфизма $f : S^1 \to S^1$. Тогда $r(\widetilde{f}_1) \equiv r(\widetilde{f}_2) \mod \mathbb{Z}$. Поэтому класс $r(\widetilde{f}) + \mathbb{Z}$ можно обозначать через $r(f)$.*

2) Класс $r(\widetilde{f})$ инвариантен относительно сохраняющей ориентацию топологической сопряженности, т.е. если $g = h \circ f \circ h^{-1}$ и h сохраняет ориентацию, то $r(f) = r(g)$.

3) Число вращения $r(f)$ иррационально (т.е. соответствующий класс состоит из иррациональных чисел) тогда и только тогда, когда f не имеет периодических точек.

Пусть f — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности. Обозначим через $\Omega(f)$ множество его неблуждающих точек f, а через $\mathrm{Per}(f)$ — множество его периодических точек.

Оказывается, что возможны 4 принципиально различных случая, описанные ниже. Для каждого из них мы даем необходимое и достаточное условие существования корней.

Случай 1. $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$**.** Очевидно, что тогда

$$\Omega(f) = \mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(f) \qquad \text{и} \qquad r(f) = 0.$$

Следовательно, f определяется своими ограничениями на дополнительные интервалы к $\mathrm{Fix}(f)$. Поэтому f включается в поток, неподвижные точки которого совпадают с $\mathrm{Fix}(f)$. В частности, если $f \neq \mathrm{id}_{S^1}$, то для каждого $n \geq 2$, существует несчетное множество гомеоморфизмов g таких, что $g^n = f$ и $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(f)$. Более интересно найти корни n-й степени из f, не имеющие неподвижных точек.

Лемма 4.10. *Предположим, что* $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *f допускает корень g степени n без неподвижных точек, т.е. $g^n = f$ и $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$;*

(ii) *найдется k таких попарно различных неподвижных точек f, где $k > 1$ — делитель числа n, что сужения $f^{n/k}$ на дополнительные интервалы к этим точкам попарно сопряжены.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть g гомеоморфизм, удовлетворяющий условию (i) и A_0 — произвольная неподвижная точка f. Тогда A_0 является периодической точкой g некоторого периода k, где k — делитель n. Положим $A_i = g^i(A_0)$ для $i \in \mathbb{Z}$. Тогда $A_i \in \mathrm{Fix}(f)$ и $A_i = A_{i+k}$.

Пусть A_s, $0 < s < k$ — первая точка, лежащая после A_0 в направлении против часовой стрелки. Тогда точки A_i разбивают окружность на дуги $[A_{ts}, A_{(t+1)s}]$, инвариантные относительно f, $g^s[A_{ts}, A_{(t+1)s}] = [A_{(t+1)s}, A_{(t+2)s}]$. Так как f коммутирует с g, то $f^{n/k} \circ g^s = g^s \circ f^{n/k}$, т.е. ограничения $f^{n/k}$ на $[A_{ts}, A_{(t+1)s}]$ сопряжены посредством g^s. Условие (ii) выполнено.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Пусть A_i, $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ попарно различные неподвижные точки f такие, что $A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-1} < A_0$ в направлении против часовой стрелки на окружности. Тогда $f[A_i, A_{i+1}] = [A_i, A_{i+1}]$, где индексы берутся по модулю k. Условие (ii) означает, что для каждого $i = 0, \ldots, k-2$ найдутся гомеоморфизмы

$$h_i : [A_i, A_{i+1}] \to [A_{i+1}, A_{i+2}]$$

такие, что $h_i \circ f^{n/k} = f^{n/k} \circ h_i$. Тогда гомеоморфизм $g : S^1 \to S^1$, удовлетворяющий условию (i) можно задать по формуле:

$$g(x) = \begin{cases} h_i(x), & x \in [A_i, A_{i+1}], i = 0, \ldots, k-2; \\ f^{n/k} h_0^{-1} h_1^{-1} \cdots h_{k-1}^{-1}(x), & x \in [A_{k-1}, A_0]. \end{cases}$$

Идея построения для $k = 4$ показана на рис. 3. □

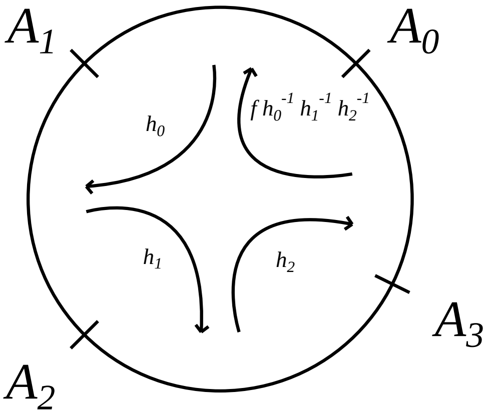


Рис. 3

Случай 2. $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$**, но** $\mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$**.** Тогда, как отмечалось в Лемме 4.9, $r(f)$ рационально.

Лемма 4.11. *Следующие условия* (i) *и* (ii) *эквивалентны:*

(i) *f обладает корнем g степени k;*

(ii) *найдутся k таких попарно различных периодических точек B_i, $i = 0, \dots, k-1$, одинакового периода, скажем n, что*

(a) *$B_0 < B_1 < \dots < B_{k-1} < B_k$, где $B_k = f^s(B_0)$ для некоторого s;*
(b) *интервал $\big(B_0, B_k\big)$ не содержит точек вида $f^i(B_0)$;*
(c) *ограничения $f^n|_{[B_i, B_{i+1}]} : [B_i, B_{i+1}] \to [B_i, B_{i+1}]$ попарно сопряжены.*

Доказательство. Эта лемма аналогична построениям теоремы 4.4.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Пусть $f = g^k$ и пусть A_0 — произвольная точка периода n для f. Как и выше, обозначим $A_i = f^i(A_0)$, $i \in \mathbb{Z}$. Эти точки разбивают S^1 на n попарно дизъюнктных интервалов. Пусть (A_0, A_s) — интервал с началом в A_0.

Заметим, что A_0 является периодической точкой, периода nk для g. Отсюда вытекает, что (A_0, A_s) содержит ровно $k-1$

точку вида $g^j(A_0)$. Обозначим их в порядке возрастания от A_0 до A_s через $B_1, \dots, B_{k-1}$. Положим также $B_0 = A_0$.

Очевидно, что каждая точка вида B_i является периодической для f периода n. Это влечет (a) и (b). Наконец, (c) следует из перестановочности f и g.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Для упрощения снова рассмотрим случай $k = 2$. Предположим, что условия (a)–(c) выполнены. Заметим, что (c) означает, что найдется гомеоморфизм h такой, что $f^n \circ h = h \circ f^n$.

Обозначим $B_{2i} = f^i(B_0)$ и $B_{2i+1} = f^i(B_1)$. Тогда g можно задать формулой, вполне аналогичной формуле (2.1):

$$g(x) = \begin{cases} f^i \circ h \circ f^{-i}(x), & x \in [B_{2i}, B_{2i+1}], \\ f^{i+1} \circ h^{-1} \circ f^{-i}(x), & x \in [B_{2i+1}, B_{2i+2}]. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $g^2 = f$. Согласованность гарантируется условием (c) (см. рис. 4). □

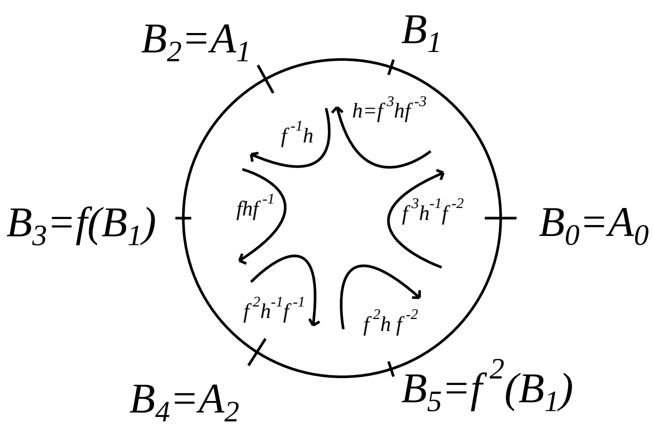


Рис. 4

Предположим теперь, что $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$. Тогда число вращения $r(f)$ иррационально и множество неблуждающих точек

$\Omega(f)$ является совершенным подмножеством в S^1 и либо совпадает со всей окружностью, либо нигде не плотно, и следовательно, гомеоморфно канторовому множеству C.

Случай 3. $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$ **и** $\Omega(f) = S^1$**.** Тогда f сопряжен с вращением окружности на иррациональный угол $r(f)$ [**24**]. Следовательно, f включается в поток и, в частности, допускает извлечение корней произвольной степени.

Отметим одно достаточное условие для случая 3.

Теорема 4.12 (А. Данжуа [**20**]). *Предположим, что f является C^1-диффеоморфизмом, причем производная f' имеет ограниченную вариацию. Если $r(f)$ иррационально, то f сопряжен с поворотом на иррациональный угол $r(\widetilde{f})$ (доказательство см. также Ван Кампен* [**24**]*).* □

Случай 4. $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$ **и** $\Omega(f) \approx C$**.** Ниже мы следуем работе Н. Маркли [**21**]. Пусть $M_\gamma : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм вращения окружности на угол γ. Скажем, что подмножества $X, Y \subset S^1$ конгруэнтны, $X \equiv Y$, если $Y = M_\gamma(X)$ для некоторого $\gamma \in S^1$.

Заметим, что дополнение к $\Omega(f)$ является счетным дизъюнктным объединением открытых интервалов:

$$S^1 \setminus \Omega(f) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i).$$

Множество $I = S^1 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \ \subset \Omega(f)$ состоит из *недостижимых* точек канторового множества, а множество $A = \Omega(f) \setminus I$ из *достижимых*.

Произведем факторизацию окружности по отношению эквивалентности $\sim$ следующим образом: каждую дугу $[a_i, b_i]$ сожмем в точку. Тогда фактор-пространство $S^1_{/\sim}$ остается гомеоморфным окружности, а фактор-отображение

$$p : S^1 \to S^1_{/\sim} \ \approx \ S^1$$

является аналогом хорошо известной функции Кантора, которая локально постоянна на всюду плотном открытом множестве. Очевидно, что $p(\Omega(f)) = S^1$, причем ограничение $p|_I$ является гомеоморфизмом, а $p|_A$ склеивает точки, являющиеся концами одного и того же дополнительного интервала. Так как I и A инвариантны относительно f, то f индуцирует некоторый гомеоморфизм $\widetilde{f}$ фактор-пространства $S^1_{/\sim}$ так, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & S^1 \end{array} \tag{5.3}$$

Отметим также, что $\Omega(\widetilde{f}) = S^1$. Следовательно, мы имеем случай 3 и поэтому $\widetilde{f}$ сопряжен с вращением на иррациональный угол $r(\widetilde{f})$. Кроме того, несложно показать, что числа вращения f и $\widetilde{f}$ совпадают. Таким образом в диаграмме (5.3) можно считать, что $\widetilde{f} = M_{r(f)}$.

Пусть $p_1 : (S^1, f) \to (S^1, M_{r(f)})$ — какой-нибудь другой гомоморфизм. Тогда они отличаются на некоторый автоморфизм потока $(S^1, M_{r(f)})$. Но все автоморфизмы этого потока также являются вращениями поэтому, $p(I)$ и $p_1(I)$ получаются друг из друга вращением окружности, т.е. $p(I) \equiv p_1(I)$.

Обозначим множество $p(I)$ через $T(f)$. Таким образом, $T(f)$ — это образ множества недостижимых точек при гомоморфизме дискретного потока (S^1, f) на поворот $M_{r(f)}$ на угол $r(f)$.

Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизмы без периодических точек, для которых $\Omega(f)$ и $\Omega(g)$ гомеоморфны канторовому множеству. Следующие утверждения принадлежат Н. Маркли [**21**].

Теорема 4.13 (Н. Маркли [**21**]). *f и g сопряжены тогда и только тогда, когда $r(f_1) = r(f_2)$ и $T(f_1) \equiv T(f_2)$.*

Следствие 4.14 (Н. Маркли [**21**]). *f допускает корень степени n, когда вращение окружности на угол $r(f)/n$ отображает множество $T(f)$ на себя.*

Литература

[1] *Akin E., Hurley M, Kennedy J.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms. // Memoirs of the A.M.S. –2003. – **164**, No. 783. Publications. V. 9, AMS, Providence, RI. –1927.

[2] *Birkhoff G.* Dynamical systems. // Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI. –1927.

[3] *Birkhoff G., Smith P.* Structure analysis of surface transformations. // J. Math. –1928. – **7**. –P. 357-369.

[4] *Bonatti C.* Generic Dynamics. // Lectures. Albus Salam ICTP, SMR. - 2004. – 11.

[5] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. // CBMS Reg. Reg. Conf. Ser. in Math. AMS, Providence. –1978. – **38**.

[6] *Smith P.* The Regular Components of Surface Transformations. // Amer. Jour. of math., Baltimore. –1930. – **52**, No. 2. –P. 357-369.

[7] *Арансон С. Х., Медведев В. С.* Регулярные компоненты гомеоморфизмов n-мерной сферы. // Мат. Сборник. –1971. –**85(127)**, №1(5). – С. 3–17.

[8] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

[9] *Hirsch M. W., Pugh C. C.* Stable manifolds and hyperbolic sets. // Proc. Berk. Symp. On Global Analysis, 1970. – 14. – P. 133–163.

[10] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 768 с.

[11] *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.

[12] *Власенко И. Ю.*, Полный инвариант для диффеоморфизмов Морса–Смейла на двумерных многообразиях. Часть I. // Некоторые вопросы современной математики: Праці Інститут математики НАН України. – Київ: Інститут математики НАН України, 1998. – 25. – С. 60–85.

[13] *Власенко И. Ю.*, Полный инвариант для диффеоморфизмов Морса–Смейла на двумерных многообразиях. Часть II. // Некоторые вопросы современной математики: Праці Інститут математики НАН України. – Київ: Інститут математики НАН України, 1998. – 25. – С. 86–93.

[14] *Bonatti C., Langevin R.* Diffeomorphismes de Smale des surfaces. Asterisque, 1998. – 250. – 243 p.

[15] *Palis J.* On Morse-Smale dynamical systems // Topology. – 1969. – **8**, No.4. – P. 385–403.

[16] *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems // Glob. Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., Amer. Math. Soc.,. Providence, R. I., – 1970. – **14**. – P. 223-231.

[17] *Bezen A.* On the topological properties and the topological conjugacy of two-dimensional Morse-Smale diffeomorphisms // Random & computational dynamic. – 1994. – **2**, No.2. – P. 183-203.

[18] *Smale S.* Morse inequalities for dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1960. – **66**. – P. 43-49. / рус. пер.: Математика (сб. пер.). –1967. –**11**, No.4. –С. 49–87.

[19] *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**.

[20] Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // J. de Math. Pures. Appl. – 1932. – **11**. – P. 333-375.

[21] Markley .N. G. Homeomorphisms of the circle without periodic points // Proc. Lond. Math. Soc. (3) – 1970. – **20**. – P. 688-698.

[22] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975

[23] Sternberg S. Local C^{∞}-transformations of the real line // Duke. Math. Journ. – 1957. – **24**. – no.1. – P. 99-102.

[24] van Kampen E. R. The topological transformations of a simple closed curve into itself // Amer. J. Math. – 1935. – **57**. – P. 142-152.

[25] Пришляк А.О. Векторные поля Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий на трехмерных многообразиях // Доповiдi НАН Украни. – 1998. – №6. – С. 43-47.

[26] Пришляк А.О. Классификация трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Некоторые вопросы современной математики: Працi Iнститут математики НАН України. – Київ: Iнститут математики НАН України, 1998. – 25. – С. 305-301.

[27] Пришляк А.О. Топологическая эквивалентность векторных полей Морса-Смейла с beh 2 на трехмерных многообразиях // УМЖ. – 2002. – т.54. – No.4. – С.492-500.

[28] Пришляк А.О. Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях // Мат. заметки. – 2002. – т.71. – вып. 2. – С.254-260.

[29] Prishlyak A.O. Gradient like Morse-Smale dynamical systems on 4-manifolds // Mat. studii. – 2001. – vol.16. – no. 1. – P.99-104.

[30] Prishlyak A.O. Topological classification of flows and functions on low-dimensional manifolds // Preprint. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. no.6. – 58 p.

Наукове видання

Власенко Ігор Юрійович
Максименко Сергій Іванович

КОРЕНІ З ГОМЕОМОРФІЗМІВ ТА
ДИФЕОМОРФІЗМІВ МНОГОВИДІВ

(Рос. мовою)

Комп'ютерний набір та верстка
І. Ю. Власенко, С. І. Максименко

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку .10.2004. Формат $60 \times 84/16$. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 4,0. Ум. друк арк. 3.72
Тираж 100 пр. Зам. 145.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
01601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3