Національна академія наук України
Інститут математики

И. Ю. Власенко

Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения

Киев – 2014

УДК 517.938.5, 517.91
Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. / Власенко И. Ю. // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. — Київ, 2014. — Т.101. 225 с.

Работа посвящена вопросам классификации внутренних отображений метрического пространства с точностью до топологической сопряженности. Построенная теория позволяет привлечь аналоги методов теории динамических систем для исследования тонкой структуры разветвленных накрытий поверхностей и других внутренних отображений.

Робота присвячена питанням класифікації внутрішніх відображень метричного простору с точністю до топологічної спряженості. Побудована теорія дозволяє застосувати аналоги методів теорії динамічних ситем для вивчення тонкої структури розгалужених накриттів поверхонь та інших внутрішніх відображень.

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Зелинский Ю. Б.,
доктор физ.-мат. наук, профессор Пришляк А. О.

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-7379-5

И. Ю. Власенко

ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРАЦІ

Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 101

Засновано в 1994 р.

Оглавление

ГЛАВА 1

Введение.

Посвящается дорогому Учителю
Владимиру Васильевичу Шарко.

1.1. Предисловие.

Идея этой книги родилась при знакомстве с монографией Ю. Ю. Трохимчука “Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности” [**35**]. Внутренние отображения, свойства которых там изучались, даже в своих особых точках выглядели достаточно похоже на гомеоморфизмы. Из этого сходства возникла идея изучать эти отображения методами геометрической теории динамических систем, уже наработанными для гомеоморфизмов и диффеоморфизмов.

Эти методы, как оказалось, нельзя перенести дословно: у необратимых внутренних отображений есть своя специфика, к которой нужно адаптировать подходы и методы для обратимых систем.

Изучение динамических систем с топологической точки зрения представляет собой изучение классов топологической сопряженности отображений. Сопряженность может быть локальной, заданной в некоторой окрестности, либо глобальной, на всем пространстве. Среди задач, которые ставятся в этой теории — нахождение различных топологических инвариантов классов сопряженности, а также локальная и глобальная топологическая классификация. Такие задачи требуют рассмотрения всего спектра предельных множеств динамической системы.

Данная работа посвящена построению топологической теории динамических систем, порожденных дискретными открытыми сюръективными отображениями метрических пространств, далее называемыми внутренними по Трохимчуку, по образцу топологической теории динамических систем обратимых отображений.

Примером плодотворности такого подхода служит приведенная в данной работе классификация с точностью до топологической сопряженности многолистных накрытий окружности. И сама формулировка полученного результата, и методы доказательства основаны на понятиях и приемах, построенных в данной работе.

Необходимость такой работы вызвана тем, что современная теория необратимых динамических систем сфокусирована на изучении инвариантных множеств, связанных с позитивными итерациями точек. Другие инвариантные множества, как правило, не рассматриваются. Это можно объяснить тем, что обычные необратимые отображения проследить назад во времени крайне тяжело: прообразы превращаются во множества, топология окрестностей нарушатся, отсутствуют классические инвариантные множества. Однако внутренние отображения устроены достаточно хорошо, чтобы быть исключением: как показано в этой работе, внутренние отображения оказываются тем подклассом необратимых отображений, для которых возможен и естественен перенос подходов топологической теории динамических систем обратимых отображений на итерации назад во времени.

Такой перенос наиболее полон для конечнократных отображений. Уже для счетнократных внутренних отображений часть из полученных здесь результатов либо не имеет места, либо требует специальных оговорок и ограничений на отображение. Полученные в данной работе результаты и методы напрямую не применимы к более общим нульмерным открытым и легким открытым отображениям.

Как следствие, внутренние отображения являются тем естественным подклассом необратимых отображений, для которых можно изучать динамику системы назад во времени, а также решать задачи топологической сопряженности.

1.2. Внутренние отображения.

Рассматриваемый здесь класс отображений — открытые дискретные отображения — и сам термин — внутренние отображения — возник из комплексного анализа.

Внутренние отображения были введены С. Стоиловым для описания топологических свойств голоморфных отображений.

Согласно теореме Стоилова [**112, 114, 32**], внутренние отображения поверхностей являются топологическим аналогом голоморфных отображений, т. е. внутреннее отображение можно представить как голоморфное отображение “с точностью до гомеоморфизма”, т. е. как композицию гомеоморфизма и голоморфного отображения.

Определение легких открытых отображений было дано Г. Вайбурном, который показал, что легкие открытые отображения замкнутых поверхностей являются дискретными [**121, 122**].

Нужно отметить, что в его оригинальном определении как открытого нульмерного отображения термин “внутреннее отображение” не прижился в англоязычной литературе.

С одной стороны, в англоязычной литературе сильна традиция работ Вайбурна. Вайбурн **[121]** дал определение легких открытых отображений, и, вслед за Стоиловым, показал, что для двумерных поверхностей легкие открытые отображения дискретны. При этом открытые нульмерные отображения для широкого класса пространств совпадают с легкими открытыми отображениями. Поэтому во многих практических случаях его можно было использовать взаимозаменяемо с термином “легкие открытые отображения” (light open maps), который и стал общеупотребительным.

С другой стороны, терминологической путанице способствовала неоднозначность человеческого языка. Французское слово, которое употребил Стоилов, можно перевести на английский язык и как “внутреннее (inner)” и как “внутреннее (interior)”. Соответственно, путаница возникала и при переводе этих работ на английский язык.

Термин “внутренние отображения” переводился и как “inner mappings”, и как “interior transformations”. Но “inner” как термин не прижился, а похожий термин “внутреннее (interior) отображение” уже использовался во многих работах того времени для определения поточечно открытых отображений[1]. Это в свое время привело к терминологической путанице между “внутренними (inner)” и “внутренними (interior)” отображениями. В некоторых работах при необходимости использовать оба понятия проводилось различение между “внутренними отображениями в широком смысле”, т.е. открытыми отображениями, и “внутренними отображениями в узком смысле” Стоилова.

[1]Отображение называется открытым в точке, если в образ открытой окрестности точки имеет непустую внутренность.

Остатки этой путаницы можно еще видеть, например, в переводе книги “Топология” Куратовского ([**22**], т. 1, §13), где в определении открытого отображения упоминается, что внутреннее отображение является его синонимом, но при этом идет ссылка на работу Стоилова, содержащую более узкое определение.

Поскольку было установлено, что класс поточечно открытых отображений совпадает с классом открытых на свой образ отображений в смысле определения 2.2, то термин “interior transformations” вскоре был практически вытеснен термином “открытые отображения” (“open maps”). Таким образом, в современной литературе терминологическую путаницу можно считать преодоленной.

С 60-х годов прошлого столетия внутренние отображения активно изучались в Киеве, в отделе комплексного анализа института математики НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком, Ю. Б. Зелинским, и их учениками. Среди работ Киевской школы в этом направлении необходимо отметить [**33**], [**34**], [**35**], [**36**], [**37**], [**19**], [**20**], [**8**], [**125**].

В оригинальных работах Стоилова внутренние отображения поверхностей были определены как нульмерные, и было показано, что на самом деле они дискретные.

Поскольку при попытке дословного переноса оригинального определения на случай больших размерностей часть важных свойств так определенных внутренних отображений, которые были справедливы в двумерном случае, теряется, Ю. Ю. Трохимчук стал определять внутренние отображения в общем случае сразу как дискретные открытые отображения.

Таким образом, термин “внутренние отображения” в значении “открытые дискретные отображения” прижился в Киевской математической школе комплексного анализа и топологии.

В этой работе следуя традиции Киевской математической школы, а также для удобства — ведь описательная конструкция “открытое дискретное отображение (с дополнительными ограничениями)” слишком громоздка, а близкий термин “разветвленное накрытие” уже наполнен другим смыслом в алгебраической топологии — будет использоваться термин “внутреннее отображение”.

Во избежание неоднозначности, внутренние по оригинальному определению Стоилова нульмерные открытые отображения названы здесь отображениями, внутренними по Стоилову, а открытые дискретные отображения названы отображениями, внутренними по Трохимчуку.

1.2.1. Внутренние отображения в современной топологической динамике.

Современная топологическая теория динамических систем представляет собой в основном динамику обратимых отображений.

Внутренние (открытые дискретные) отображения, являясь одним из наиболее простых классов необратимых отображений, тем не менее, включают в себя такие практически важные классы отображений, как локальные гомеоморфизмы (накрытия), разветвленные накрытия, в том числе и гладкие, отображения с ограниченным возмущением, квазирегулярные отображения, голоморфные отображения, и, конечно, обратимые отображения.

Как отдельный класс динамических систем динамические системы, образованные внутренними отображениями, до настоящего времени практически не изучались. Развиваемый в данной работе подход с использованием топологических инвариантов широких траекторий является новым оригинальным методом исследования таких систем. Однако, естественно, многие результаты, полученные для разных классов необратимых динамичекских систем, имеют отношение и к динамическим системам, образованным внутренними отображениями.

Не претендуя на полноту, упомянем здесь наиболее важные направления современной необратимой динамики, и дадим ссылки на некоторые результаты и обзоры по этим направлениям.

Среди наиболее изученных областей в топологической динамике необратимых отображений можно назвать такие направления, как одномерная динамика (книги, посвященные соверменной теории одномерных динамических систем см. [**42, 41, 108, 96, 60**]), в том числе ее методы методы распространены и на другие классы отображений, в частности, на треугольные отображения [**85**], и голоморфная динамика (см. например, обзоры [**16, 95**]). Также за последние десятилетия в поле зрения топологической динамики попадали различные частные классы необратимых отображений, такие, как растягивающие отображения, линейные автоморфизмы тора и другие. Здесь же можно упомянуть изучение минимальные отображений, аттракторов и энтропии для необратимых систем в работах [**83, 45, 84**].

1.2.2. Обзор результатов работы.

Данная работа посвящена построению топологической теории динамических систем, порожденных эндоморфизмами метрических пространств, внутренними по Трохимчуку.

В главе 2 дается строгое определение изучаемого класса внутренних отображений и приводятся их основные топологические свойства, которые будут использованы далее в данной работе.

В главе 3 “Динамика траекторий” для внутренних отображений определяются аналоги инвариантных множеств рекуррентных точек и доказываются их свойства.

В главе 4 “Динамика окрестностей” изучаются базовые топологические инварианты динамических систем, образованных внутренними отображениями, связанные с локальной динамикой отображения в окрестности точки, особенности динамики бесконечнократных внутренних отображений, и ищутся ограничения, с помощью которых из класса всех внутренних отображений можно выделить внутренние отображения, для которых свойства их динамики подобны “образцовым” разветвленным накрытиям компактных замкнутых многообразий.

В главе 5 “Гомеоморфизмы, полусопряженные внутреннему отображению” определяются различные фактор-пространства динамической системы, такие, на которых внутреннее отображение индуцирует гомеоморфизм, и изучаются их свойства.

В главе 6 “Цепно-рекуррентные множества и основная теорема динамики внутренних отображений” рассматриваются особенности теории цепно-рекуррентных множеств применительно к внутренним отображениям.

В доказательствах утверждений общего характера мы ограничиваемся случаем внутренних отображений локально компактных метрических пространств. Можно было бы пытаться распространить доказательства и на более широкий класс топологических пространств, однако это, повидимому, лишено особого смысла с точки зрения динамических систем.

Выделение и изучение конкретных классов внутренних отображений в этой работе ограничено рассмотрением внутренних отображений на многообразиях без края.

Следует заметить, что внутренние отображения на многообразиях с краем существенно отличаются от внутренних отображений многообразий без края тем, что позволяют отображать свои особые точки на край, поэтому их множество особых точек, как правило, имеет на единицу большую размерность, чем в случае многообразий без края. Поэтому динамика внутренних отображений на многообразиях с краем и на многообразиях без края представляют собой достаточно разные теории.

Наработанные в предыдущих разделах методы и результаты применяются в главе 7 “Внутренние отображения одномерных многообразий” для топологической классификации накрытий окружности.

Построенная теория позволяет привлечь методы теории динамических систем для исследования тонкой структуры разветвленных накрытий поверхностей и других внутренних отображений.

ГЛАВА 2

Предварительные сведения

2.1. Определение внутренних отображений.

Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство и $f : M \to M$ — непрерывное сюръективное отображение. В специальной литературе по динамическим системам уже сложилась традиция называть такие отображения эпиморфизмами, поэтому в дальнейшем в тексте термин "эпиморфизм" будет использоваться как синоним сюръективного отображения.[1]

Определение 2.1. *Отображение f называется* ***факторным*** *(identification mapping), если для любого открытого множества U такого, что $f^{-1}(f(U)) = U$, $f(U)$ открыто.*

Определение 2.2. *Отображение f называется* ***открытым****, если образ любого открытого множества открыт.*

Определение 2.3. *Отображение f называется* ***замкнутым****, если образ любого замкнутого множества замкнут.*

Открытые и замкнутые отображения являются факторными отображениями. Также, факторным является

[1]Во избежание путаницы необходимо подчеркнуть, что здесь термин "эпиморфизм" используется только как синоним сюръективного отображения, поскольку в теории категорий за эпиморфизмами закрепилось несколько другое значение.

проекция на фактор-пространство по произвольному разбиению.

Определение 2.4. *Отображение f называется* ***локальным гомеоморфизмом в точке*** *x, если у точки x найдется окрестность U такая, что сужение f на U будет гомеоморфизмом на свой образ.*

Определение 2.5. *Отображение f называется* ***локальным гомеоморфизмом****, если оно является локальным гомеоморфизмом во всех точках.*

Для всякой точки топологического пространства объединение всех связных подмножеств, ее содержащих, есть наибольшее связное подмножество, ее содержащее, называемое компонентой точки. Квазикомпонентой точки называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств, содержащих эту точку. Компонента точки содержится в ее квазикомпоненте, и они совпадают в компактных пространствах.

К числу пространств, обладающих высокой степенью несвязности относятся:

(1) *наследственно несвязные* (hereditary disconnected) пространства (пространство X наследственно несвязно, если X не содержит никакого связного подпространства, содержащего более одной точки, т.е. все компоненты одноточечны; Ф. Хаусдорф (1914);
(2) *вполне несвязные* (totally disconnected) пространства (X вполне несвязно, если все квазикомпоненты одноточечны; В. Серпинский (1921);
(3) *индуктивно-нульмерные* пространства (X индуктивно-нульмерно, если X обладает базой из открыто-замкнутых множеств; В. Серпинский (1921); их также называют нульмерными);

(4) *нульмерные* пространства (X нульмерно, если $\dim X = 0$; их также называют сильно нульмерными);
(5) *экстремально несвязные* пространства (X экстремально несвязно, если замыкание любого открытого множества открыто; М. Стоун (1937)).
(6) *дискретные* пространства (X дискретно, если каждая его точка является изолированной).

Определение 2.6. *Отображение f называется* ***легким****, если прообраз любой точки вполне несвязен.*

Определение 2.7. *Отображение f называется* ***легким открытым****, если оно легкое и открытое.*

Антиподом легкого отображения является монотонное отображение.

Определение 2.8. *Отображение f называется* ***монотонным****, если прообраз точки связен.*

Определение 2.9. *Отображение f называется* ***нульмерным****, если прообраз любого нульмерного множества нульмерен (эквивалентное определение — прообраз любой точки нульмерен).*

Нульмерные отображения являются легкими, но обратное, вообще говоря, не верно: существуют сепарабельные метрические вполне несвязные топологические пространства, не являющиеся нульмерными.

Однако легкое отображение локально компактного хаусдорфова пространства нульмерно.

Определение 2.10. *Отображение f назовем* ***внутренним (inner) по Стоилову****, если оно нульмерно и открыто.*

Определение 2.11. *Отображение f называется* ***изолированным****, если прообраз точки состоит из изолированных точек. Изолированное отображение еще называют* ***дискретным****.*

Замечание 2.12. *Изолированное отображение нульмерно.*

Замечание 2.13. *Прообраз каждой точки изолированного отображения сепарабельного пространства состоит из не более чем счетного числа точек.*

Определение 2.14. *Отображение f называется* ***конечнократным****, если прообраз точки состоит из конечного числа точек.*

Определение 2.15. *Отображение f называется* ***k-кратным****, если прообраз точки состоит из ровно k точек.*

Определение 2.16. *Отображение f назовем* ***внутренним (inner) по Трохимчуку****, если оно открыто и изолированно.*

Заметим, что произвольное внутреннее по Стоилову отображение может и не быть изолированным.

Для примера рассмотрим множество A, состоящее из стандартного Канторова множества на отрезке $[0,1]$ и изолированной точки $\{2\}$. Внутренний эпиморфизм A в себя, заданный формулой $f(x) = \min\{3x, 2\}$, очевидно, не является изолированным в точке $\{2\}$.

Согласно Стоилову, [**112, 114, 32**], также [**51**], открытое нульмерное отображение поверхности в комплексную плоскость топологически эквивалентно голоморфной функции, т. е. внутреннее отображение можно представить как голоморфное отображение "с точностью до гомеоморфизма", т. е. как композицию гомеоморфизма и голоморфного отображения; открытое нульмерное отображение поверхности в комплексную плоскость является изолированным; открытое нульмерное отображение замкнутой компактной поверхности на другую поверхность является открыто-замкнутым конечнократным отображением.

Внутренние по Стоилову отображения многообразий размерности 1 и 2 являются и внутренними по Трохимчуку [**121**]. Для многообразий размерности ≥ 3, даже компактных, существует контрпример Д. К. Вилсона, [**124**].

Далее в этой работе под *внутренними отображениями* всюду будем подразумевать отображения, внутренние по Трохимчуку.

2.2. Топологические свойства

2.2.1. Некоторые свойства открытых и замкнутых отображений.

Лемма 2.17 (Критерий замкнутости отображения,[**1**]). *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

(C^{-1}) *Для любого множества $M \subseteq Y$ и любой окрестности O множества $f^{-1}M$ существует такая окрестность V множества M, что $f^{-1}V \subseteq O$.*

Теорема 2.18 ([**7**], Глава II, 342). *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение топологического пространства X на Y. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *f — факторное отображение;*
(2) *f открыто;*
(3) *f замкнуто;*
(4) *f — гомеоморфизм.*

Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое отображение, $R \subset Y$ — некоторое открытое связное множество в Y, $p \in f^{-1}(R)$.

Определение 2.19 ([**121**]). *Квазикомпонентой множества $f^{-1}(R)$, содержащей точку p, называется множество, состоящее из p и всех точек $q \in f^{-1}(R)$, таких, что $f^{-1}(R)$ нельзя представить в виде двух отделимых множеств A и B $(f^{-1}(R) = A \cup B)$, где $p \in A$ and $q \in B$ (p не отделимо от q в $f^{-1}(R)$).*

Теорема 2.20 ([**121**]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытый эпиморфизм, X — компакт и $R \subset Y$ — некоторое связное открытое множество в Y. Тогда каждая квазикомпонента Q прообраза $f^{-1}(R)$ отображается на R под действием f.*

Теорема 2.21 ([**121**]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытый эпиморфизм, X — компакт и $C \subset Y$ — некоторый континуум. Тогда каждая компонента K множества $f^{-1}(C)$ отображается на C под действием f $(f(K) = C)$.*

Теорема 2.22 ([**121**]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытый эпиморфизм. Если $A \subset Y$ — замкнутое непустое подмножество of Y и $f^{-1}(A)$ локально не разделяет X в точке $x \in f^{-1}(A)$, то A локально не разделяет Y в точке $f(x)$.*

Теорема 2.23 (Специальный случай нульмерно-монотонной факторизации, [**68, 120**]). *Если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение X на Y, где X компакт, то найдется топологическое пространство Z такое, что f единственным образом представляется как композиция $f = lm$, где m — монотонное отображение X на Z и l легкое открытое отображение Z на Y.*

Теорема 2.24 ([**7**], Глава VI, 128). *Если $f\colon X \to Y$ непрерывное открыто-замкнутое отображение топологического пространства X на Y, а $\varphi\colon X \to I$ — непрерывная ограниченная вещественная функция, то функция ψ,* *определенная на Y формулой $\psi(y) = \sup\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ для каждого $y \in Y$, определена и непрерывна на Y.*

Пусть X и Y — компактные метрические пространства. Введем на 2^X и 2^Y Хаусдорфову метрику. Пусть y_i — последовательность множеств из Y.

Теорема 2.25 ([**98**],p. 280). *Пусть X и Y — компактные метрические пространства. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f^{-1}(y_i) \to f^{-1}(y)$*[2] *каждый раз когда $y_i \to y$ в Y.*

2.2.2. Внутренние отображения и замкнутость.

Лемма 2.26. *Если X — компакт, а f является изолированным в x, то f^{-1} имеет в x конечное число прообразов.*

Доказательство. Предположим от противного, что f^{-1} имеет в x бесконечное число прообразов. Поскольку X — компакт, $f^{-1}(x)$ содержит сходящуюся к некоторой точке p подпоследовательность p_i. Поскольку $f(p_i) = x$, то по непрерывности $f(p) = x$. Но произвольная окрестность точки p содержит точки подпоследовательности p_i. Получили противоречие. $\square$

Следствие 2.27. *Если X — локально компактное пространство, а f — изолированное отображение, то f локально конечнократно.*

Теорема 2.28 ([**7**], Глава VI, 124). *Каждое локально гомеоморфное ровно k-кратное отображение хаусдорфова пространства замкнуто.*

Теорема 2.29 ([**7**], Глава VI, 125). *Всякое открытое ровно k-кратное отображение хаусдорфова пространства локально гомеоморфно (и замкнуто).*

---

[2] Имеется в виду сходимость множеств в метрике Хаусдорфа.

Лемма 2.30. *Всякое открытое конечнократное отображение хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, P замкнуто в X, $Q = f(P)$ и $y \notin Q$. Тогда $f^{-1}(y) \cap P = \varnothing$. Поскольку X хаусдорфово, найдутся окрестности $U_i(x_i)$ точек $x_i \in f^{-1}(y)$ такие, что $U_i(x_i) \cap P = \varnothing$ и $U_i(x_i) \cap U_j(x_j) = \varnothing$, $j \neq i$. Поскольку f открыто, $V = \cap_i f(U_i(x_i))$ — окрестность точки y, не пересекающаяся с Q. Из произвольности выбора y следует, что Q замкнуто. $\square$

В отличие от конечнократных, бесконечнократные внутренние отображения, как правило, не являются замкнутыми. В качестве примера можно, например, рассмотреть накрытие окружности $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \mod 1 \in S^1$. Для этого отображения проекцией счетного набора замкнутых отрезков $[n + \frac{1}{n+4}, n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+4}]$, $n \geq 0$, будет открытый отрезок $(0, \frac{1}{2})$.

Тем не менее, как следствие из леммы 2.30, бесконечнократные внутренние отображения обладают свойством локальной замкнутости: сужение отображения на любую окрестность, в которой оно конечнократно, является замкнутым. В частности, если X — локально компактное пространство, то такая окрестность существует для каждой точки.

2.2.3. Внутреннее отображение и сходящиеся последовательности.

Лемма 2.31. *Пусть $f\colon X \to X$ — дискретный эпиморфизм, $x \in X$, (p_i) — последовательность точек, сходящихся к x. Тогда $(f(p_i))$ — последовательность, сходящаяся к $f(x)$.*

Доказательство. Если множество $(f(p_i))$ бесконечно, то утверждение леммы следует из непрерывности f.

Пусть множество $(f(p_i))$ конечно. Тогда найдется подпоследовательность (q_i) последовательности (p_i), которая вся отображается в одну некоторую точку. Но, по непрерывности, $f(q_i) = f(x)$. Но подпоследовательность (q_i) не является отделимой от точки x. Это противоречит условию, что отображение f — дискретно.

Таким образом, дискретное отображение не может отобразить сходящуюся последовательность точек в конечное множество. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Следствие 2.32. *Пусть $f\colon X \to X$ — дискретный эпиморфизм. Тогда для любой точки $x \in X$ ее прообраз $f^{-1}(x)$ не имеет предельных точек в X.*

Лемма 2.33. *Пусть $f\colon X \to X$ — дискретное отображение, $x \in X$ — произвольная точка, (p_i) — последовательность точек, сходящихся к x. Тогда предельные точки множества $f^{-1}(p_i)$ могут принадлежать только множеству $f^{-1}(x)$.*

Доказательство. Поскольку f дискретно, то прообраз конечного числа точек из последовательности (p_i) — дискретное множество, согласно утверждению 2.32 не имеющее предельных точек. Следовательно, для любой предельной точки q множества $f^{-1}(p_i)$ сходящаяся к ней последовательность точек множества $f^{-1}(p_i)$ является последовательностью вида (y_i), $y_i \in f^{-1}(p_i)$. Но образ такой последовательности сходится к x, следовательно, по непрерывности $f(q) = x$ и $q \in f^{-1}(x)$. $\square$

Лемма 2.34. *Пусть X — локально компактное метрическое пространство, $f\colon X \to X$ — внутренний эпиморфизм, $x \in X$ — произвольная точка, (p_i) — последовательность точек, сходящихся к x. Тогда $\forall y \in f^{-1}(x)$ из множества $f^{-1}(p_i)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к y.*

Доказательство. Зафиксируем $y \in f^{-1}(x)$. Поскольку f — дискретно, у точки y найдется окрестность U_1, отделяющая ее от других точек из $f^{-1}(x)$. Поскольку X — локально компактное метрическое пространство, найдется открытая окрестность U точки y, такая, что $\overline{U} \subset U_1$ и $\overline{U}$ — компакт. Поскольку f — открыто, то $f(U)$ — открытая окрестность x.

Так как X — метрическое пространство, а последовательность (p_i) сходится к x, то последовательность (p_i) пересекается с каждым метрическим шаром из базы топологии в точке x по некоторой бесконечной подпоследовательности. В частности, поскольку $f(U)$ — открытая окрестность x, то последовательность (p_i) пересекается с $f(U)$ по непустой бесконечной подпоследовательности (q_i).

По построению, сужение f на U — эпиморфизм с U на $f(U)$. Поэтому прообраз (q_i) под действием сужения f на U — счетное множество. $\overline{U}$ — компакт, поэтому $f^{-1}(q_i)$ имеет предельные точки, по непрерывности отображающиеся в x. Но U не имеет других прообразов точки x, кроме y. Поэтому $f^{-1}(q_i)$ сходится к y, что и доказывает лемму. □

Следствие 2.35. *Пусть X — локально компактное метрическое пространство, $f\colon X \to X$ — внутренний эпиморфизм, произвольная точка $x \in X$, (p_i) — последовательность точек, сходящихся к x. Тогда $\forall y \in f^{-k} \circ f^l(x)$, $k, l \geq 0$ из множества $f^{-k} \circ f^l(p_i)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к y.*

Таким образом, в локально компактном метрическом пространстве не только внутреннее отображение переводят сходящуюся последовательность точек в сходящуюся последовательность, но и обратное к нему переводят сходящуюся последовательность точек в набор сходящихся последовательностей.

2.2.4. Множества особых точек и точек с различным числом прообразов. Пусть $f\colon X \to X$ — эпиморфизм.

Определение 2.36. *Назовем точку x* ***неособой (регулярной)****, если f является гомеоморфизмом на свой образ в некоторой окрестности этой точки. Иначе назовем точку x* ***особой****.*

Множество особых точек обозначим через B_f. По определению, множество регулярных точек открыто, следовательно, множество B_f замкнуто. Образы особых точек назовем **особыми значениями**.

Используя терминологию разветвленных накрытий, особые точки еще называют **точками ветвления** (ramification points), а образы особых точек называют **точками разветвления** (branch points).

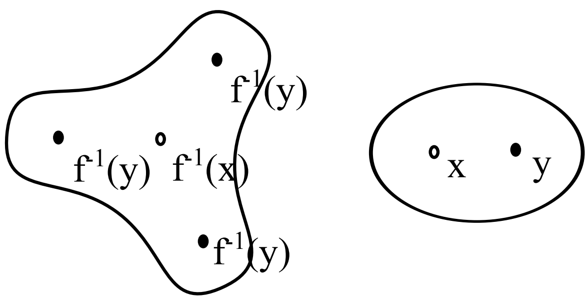

Рис. 2.1. Точка ветвления и точка разветвления.

Определение 2.37. *Назовем особую точку x* ***конечнократной****, если f конечнократное отображение в некоторой окрестности x.*

Замечание 2.38. *Пусть X — локально компактное метрическое пространство, f — внутренний эпиморфизм. Тогда все особые точки f конечнократные.*

Определение 2.39. *Назовем точку x* ***точкой изменения числа прообразов****, если для любой окрестности $U(x)$ точки x найдется точка $y \in U(x)$ с другим, чем у x числом прообразов.*

Множество точек изменения числа прообразов обозначим через Ξ_f.

В специальном случае можно дать следующее определение.

Определение 2.40. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — собственное отображение связных ориентированных многообразий размерности n, у которых $\deg f \neq 0$. Назовем точку x* ***неполноценной точкой (deficient point)*** *отображения f, если мощность множества $f^{-1}(x)$ меньше числа $|\deg f|$.*

Множество неполноценных точек f обозначим через Δ_f. Тогда $\dim \Delta_f \leq n-1$ и $\dim C \leq n-2$ для каждого компактного подмножества $C \subset \Delta_f$; если f — легкое отображение, то $\dim \overline{\Delta}_f \leq n-1$; и если f — дискретное, то $\dim \overline{\Delta}_f \leq n-2$ (**[59]**).

Пропустим для краткости определения степени и локальной степени в точке непрерывного отображения многообразий или областей в $\mathbb{R}^n$. При необходимости строгое определение можно найти в учебнике по дифференциальной топологии, либо, например, в **[21, 35]**.

Приведем здесь некоторые результаты, касающиеся степени отображения (А. В. Чернавский, Ю. Ю. Трохимчук **[39, 33, 34, 35]**) для внутренних отображений многообразий или областей в $\mathbb{R}^n$.

(1) Поскольку все прообразы точек дискретны, то во всех точках локальная степень определена и не равна 0.

(2) Всякое изолированное открытое отображение связного многообразия без края имеет во всех точках

либо положительную, либо только отрицательную локальную степень.

(3) Число прообразов регулярной точки не превышает степень отображения.

(4) Число прообразов регулярной точки равно степени отображения. Соответственно, в особых точках число прообразов строго меньше, чем в регулярных.

Следующая теорема показывает, что свойство (3) является характеристическим для открытых отображений.

Теорема 2.41 (Ю. Б. Зелинский, **[20]**,**[125]**). *Пусть M, N — n-мерные многообразия, $D \subset M$ и $D_1 \subset N$ — области, и $f\colon \overline{D} \to \overline{D}_1$ — непрерывное отображение степени k такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда либо f — открытое отображение, либо найдется точка, у которой как минимум $|k| + 2$ прообраза. При чем, если f — нульмерно, то во втором случае множество точек с $|k| + 2$ прообразами имеет размерность n.*

Отсюда следует, что для ряда хороших классов внутренних отображений, таких, как разветвленные накрытия, $\Xi_f = \Delta_f = f(B_f)$, т. е. совпадает с множеством точек разветвления.

Для более широких классов пространств это не так, как показывает простой пример 2.42 с несвязным пространством.

Пример 2.42. *Конечнократное открытое отображение, у которого $B_f = \varnothing$, но $\Xi_f \neq \varnothing$.*

Построение. Рассмотрим множество $G \in \mathbb{R}^2$,

$$G = \{(x, y) | x \in (0, 1), y \in \mathbb{N}\} \cup (0, \infty) \times \{0\}.$$

Определим отображение f на G:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, y-1), & y > 0; \\ (\frac{x}{2}), & y = 0 \end{cases}$$

Тогда точки с $y = 0$ в интервале $(0, 1)$ имеют по два прообраза, тогда как точки интервала $[1, \infty)$ имеют один прообраз. □

Упражнение 2.43. *Отображение из примера 2.42 открыто, но не замкнуто. Построить пример конечнократного открытого и замкнутого отображения, у которого $B_f = \varnothing$, но $\Xi_f \neq \varnothing$, используя вместо диска канторово множество.*

В разделе 4 введен достаточно широкий класс обратно локальных внутренних эпиморфизмов, для которых $\Xi_f = f(B_f)$ (утверждение 4.15).

2.2.5. Структура множества точек ветвления. Внутренние отображения окружности не имеют точек ветвления и является локальными гомеоморфизмами.

Согласно Стоилову и Вайбурну, внутренние отображения компактных поверхностей без края представляют собой конечнолистные разветвленные накрытия. Большинство точек имеет число прообразов, равное степени отображения, а множество точек, которые имеют меньшее число прообразов, конечно и совпадает с множеством образов особых точек. В особых точках разветвленные накрытия локально топологически устроены как z^k, $k > 1$.

В общем же случае множества особых точек и точек с различным числом прообразов могут быть устроены очень сложно.

Теорема 2.44 (А. В. Чернавский ([**38**])). *Конечнократное открыто-замкнутое отображение связного* *многообразия имеет ограниченную кратность. Множество точек максимальной кратности открыто и всюду плотно.*

Теорема 2.45 (А. В. Чернавский ([**38**])). . *Пусть $p : X \to Y$ открыто-замкнутое конечнократное отображение многообразий без края размерности n. Тогда множество точек $B_f \subset X$, не являющихся точками локального гомеоморфизма, имеет размерность не более $n-2$.*

Лемма 2.46 ([**55**], лемма 2.1, тж. [**39**]). *Пусть p - открытое отображение локально-компактного пространства X на локально-компактное Y, такое, что прообраз любой точки Y дискретен. Тогда для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ выполнено равенство* $\dim(A) = \dim(p(A))$.

Таким образом, у дискретных отображений многообразий множество особых значений имеет коразмерность не меньше 2. Напомним известную лемму о множествах коразмерности не меньше 2.

Лемма 2.47 ([**14**], стр.74, теор.4). *Пусть M^n — многообразие размерности k, $U \subset M^k$ - открытый шар, $Z \subset U$ замкнутое подмножество размерности не больше $k-2$. Тогда $U \setminus Z$ линейно связно.*

Размерность множества особенностей $\leq n-2$ является характеристикой открытых дискретных отображений. В повышении коразмерности множества B_f до 2 играет роль и дискретность, и открытость: без открытости отображения имеют место лишь следующие теоремы.

Теорема 2.48 ([**54**]). *Если f — счетнократное отображение многообразий, то $int\, B_f = \varnothing$, i.e.* $\dim B_f \leq n-1$.

Теорема 2.49 ([**54**]). *Если f — дискретное отображение многообразий, то* $\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n-1$*; при* *этом дискретное отображение f открыто тогда и только тогда, когда* $\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n-2$.

Утверждения 2.45, 2.46 о том, что $\dim B_f \leq n-2$, верны только для многообразий без края. Внутренние отображения многообразий с краем могут иметь особенности размерности $n-1$ на краю, Например, у отображения квадрата $[0,1]\times[0,1] \ni (x,y) \mapsto (sin^2(\pi x), y)$ множество особых точек $\{1\}\times[0,1]$ одномерно.

Для внутренних отображений 3-многообразий, множество особых точек либо пусто, либо имеет топологическую коразмерность 2. Гипотеза Чернавского предполагала, что то же справедливо и для других n, но в размерности $n=4$ есть пример внутреннего отображения коразмерности 3, [**117**], а в размерностях $n \geq 5$ существуют внутренние отображения n-многообразий, у которых множество особых точек имеет коразмерность 4 [**58**].

Внутренние отображения, для которых множество B_f устроено как можно более хорошо, т. е. является подмногообразием или набором подмногообразий, удовлетворяет условиям вида $f^{-1}(f(B_f)) = B_f$ и т. д. играют важную роль в топологии.

По теореме Александера [**44**], каждое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие является разветвленным накрытием трехмерной сферы S^3. Обобщения этой теоремы верны и в случае n-мерных многообразий, при чем в обобщениях доказывают, что можно взять разветвленное накрытие с хорошо устроенным множеством B_f. Например, в трехмерном случае, по теореме Хилдена-Монтесимеса, для любого компактного ориентируемого многообразия M^3 без края существует 3-листное разветвленное накрытие $p\colon M^3 \to S^3$ с ветвлением над узлом. О свойствах таких хорошо устроенных множеств особых точек, в частности, см. [**75, 62, 65**].

В общем случае множества особых точек и точек с различным числом прообразов могут быть устроены очень сложно, например, содержать многие дикие Канторовы множества классической геометрической топологии [**55, 56, 57, 73, 74**]. Общей теории, описывающей допустимые множества особых точек, еще не создано.

Обзоры текущих результатов можно найти, например, в [**30, 72, 93**].

2.3. Подклассы внутренних отображений с дополнительными структурами.

Внутренние отображения естественно индуцируют отображения различных групп соответствующих пространств. С алгебраической точки зрения интересны внутренние отображения, порождающие “хорошие” морфизмы.

С аналитической точки зрения важную роль играют внутренние отображения с дополнительными геометрическими свойствами, такие, как голоморфные и квазирегулярные отображения.

2.3.1. Накрытия.

Определение 2.50. *Непрерывное сюръективное отображение* $p\colon \widetilde{X} \to X$ *называется* ***накрывающим*** *(covering map) или* ***накрытием****, если* $\forall y \in X$ *найдется окрестность* V *такая, что* p *отображает каждую компоненту связности* $p^{-1}(V)$ *гомеоморфно на* V.

Если существует накрывающее отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$, то говорят, что $\widetilde{X}$ накрывает X. Пространство X называется базой накрытия, $\widetilde{X}$ называют накрывающим пространством или накрытием. Прообраз $p^{-1}(y)$ точки $y \in \widetilde{X}$ называют слоем над точкой y. Число областей V_k в полном прообразе $p^{-1}(V)$ называется числом листов. Если это число конечно и равно n, то накрытие называется n-листным.

Накрытие называется универсальным, если накрывающее пространство $\widetilde{X}$ односвязно $(\pi_1(X, x_0) = 0)$.

С помощью накрывающих отображений можно строить поднятие кривых и гомотопий: Если $\alpha : [0,1] \to X$ — непрерывная кривая, то найдется непрерывная кривая $\widetilde{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$, такая, что $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$. Аналогично, если γ — гомотопия между α и α', то существует гомотопия $\widetilde{\gamma}$ между $\widetilde{\alpha}$ и некоторым поднятием $\widetilde{\alpha}'$ для $\widetilde{\alpha}$.

Теорема 2.51. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Тогда*

(1) *существует универсальное накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$;*
(2) *если $f : \widetilde{Y} \to Y$ накрытие и Y односвязно, то f — гомеоморфизм.*

2.3.2. Разветвленные накрытия. Понятие разветвленных накрытий возникло в позапрошлом веке из рассмотрения римановых поверхностей мероморфных функций. Под разветвленным накрытием в разных разделах математики понимают отображение, которое почти везде на открытом множестве является накрытием, за исключением множества особых точек с предписанным строением. Как правило, отображение является открытым дискретным.

В топологии многообразий (см. [**25**]) обычно изучают отображения многообразий в виде разветвленного накрытия над хорошо устроенным (например, гладко вложенное подмногообразие) множеством особых точек в "простое"многообразие (например, S^n).

В алгебраической топологии за счет контроля множества особенностей строятся морфизмы между фундаментальными группами, группами гомологий и когомологий, гомотопическими группами пространств базы и накрытия.

Общие конструкции разветвленных накрытий для произвольных топологических пространств построены Смитом и Долдом [**109, 67**].

Приведем здесь одну конструкцию полиномиального накрытия из [**18**].

Определение 2.52. *Полиномиальным $\mathbb{K}$-расширением типа H степени n над топологическим пространством Y называется подмножество $Y(P)$ прямого произведения $Y \times \mathbb{K}$ пространства Y на поле $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, которое выделяется алгебраическим уравнением $P(y, \lambda) = \lambda^n + a_1(y)\lambda^{n-1} + a_2(y)\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(y)\lambda + a_n(y) = 0$, где $(y, \lambda) \in Y \times \mathbb{K}$, а функции $a_i(y)$, $y \in Y$, принадлежат подмножеству $H \subseteq C_{\mathbb{K}}(Y)$ кольца непрерывных функций на пространстве Y, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Если $H = C_{\mathbb{K}}(Y)$, то мы будем говорить просто о полиномиальном $\mathbb{K}$-расширении (степени n) или даже о полиномиальном расширении пространства Y (степени n), если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Операция проектирования $p : Y \times \mathbb{K} \to Y$ является конечнократным отображением на $Y(P)$, так как каждый многочлен имеет конечное число корней. Произведение N полиномиальных $\mathbb{K}$-расширений типа H над топологическим пространством Y будем называть просто произведением N полиномиальных $\mathbb{K}$-расширений типа H пространства Y и обозначать $Y\langle P1, P2, \ldots, PN\rangle$, $Y\langle P1, P2, \ldots, PN\rangle = Y\langle P1\rangle \times_Y Y\langle P2\rangle \times_Y \cdots \times_Y Y\langle PN\rangle$. Произведение полиномиальных расширений пространства Y есть некоторое пространство над Y с проекцией $p((y, \lambda_1), (y, \lambda_2), \ldots, (y, \lambda_N)) = y$. Эта проекция является конечнократным отображением.

Определение 2.53. *Дискриминантным множеством полиномиального расширения $Y\langle P\rangle$ называется подмножество* $\Delta(P) = \{(y,\lambda) \in Y\langle P\rangle | P'(y,\lambda) = n\lambda^{n-1} + (n-1)a_1(y)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}(y) = 0\}$.

Дискриминантное множество является замкнутым.

Проекция $p : Y\langle P\rangle \to Y$ является накрытием на дополнении к дискриминантному множеству. Если дискриминантное множество пусто, то полиномиальное расширение представляет собой накрытие, которое естественно назвать полиномиальным накрытием.

2.3.3. Гладкие отображения.

Пусть M^n и N^n —- гладкие n-многообразия без края, а $f\colon M^n \to N^p$ их достаточно гладкое отображение. Обозначим через J_f якобиан отображения f, а через R_q — подмножество M^n, на котором якобиан имеет ранг не более q.

Теорема 2.54 (Church, [**52**]). *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^n гладкое и открытое отображение с рангом $\geq n-1$ в каждой точке, тогда f — локальный гомеоморфизм.*

Теорема 2.55 (Church, [**52**]). *Пусть $f : M \to N$ — C^n гладкое отображение n-многообразий.*

(i) *Если $M = N = \mathbb{R}^n$ и f — легкое отображение, следующие условия эквивалентны:*
   (a) *f открыто;*
   (b) *J_f не меняет знак;*
   (c) $B \subset \mathbb{R}^{n-2}$.

(ii) *Если M компактно и f открыто, то f — легкое отображение.*

Приведем еще ряд других полезных утверждений из [**52**].

- Если $f\colon M^n \to N^n$, и f и многообразия являются C^n гладкими, то $\dim(f(R_q)) \leq q$.

- Если $f\colon E^n \to E^n$ открыто и C^1 гладко, то $B_f \subset R_{n-2}$.
- Если, для $f\colon M^n \to N^n$, f легкое и C^n гладкое, то f открыто тогда и только тогда, когда $B_f \subset R_{n-2}$.
- Если $f\colon E^n \to E^n$ — C^n легкое и открытое, то оно дискретно.
- Если $f\colon M^n \to N^n$ открыто и либо M^n компактно либо f легкое, то существует замкнутое множество K, $\dim K \leq n-3$, такое, что для любого x в $M^n - K$ найдется окрестность, в которой f топологически эквивалентен стандартному растягивающему отображению (winding map)[3]. Более того, для $B_f \neq \varnothing$, K нигде не плотно в B_f. Отсюда следует, что если $f\colon E^n \to E^n$ легкое и C^n, то $B_f = \varnothing$, или $\dim B_f = n-2$, или $\dim B_f = n-1$, при чем последнее возможно тогда и только тогда, когда f не открыто.

Теорема 2.56 (M. Hirsch, [**76**]). *якобиан C^∞ гладкого открытого отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не меняет знак.*

Эта теорема была ранее получена для частного случая полиномиальных отображений,

Теорема 2.57 (Gamboa и Ronga, [**71**]). *Полиномиальное отображение в $\mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда прообразы точек конечны и якобиан не меняет знак.*

2.3.4. Квазирегулярные отображения. Квазирегулярные отображения являются обобщением голоморфных отображений и важным примером внутренних отображений.

Определение 2.58 (Классическое определение). *Дифференцируемое отображение f области $D \in \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ называется K-квазирегулярным, если для всех точек из D*

[3] В цилиндрических координатах $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \varphi, x_3, \dots, x_n$ отображение можно записать в виде $(\rho, k\varphi, x_3, \dots, x_n)$.

выполняется следующие неравенство:

$$\|Df(x)\|^n \leq K|J_f(x)|\,.$$

Здесь $K \geq 1$ — константа, Df — производная (линейное отображение).

Теорема 2.59 (Ю. Г. Решетняк, [**106**]). *Квазирегулярное отображение открыто и дискретно.*

Со временем стало ясно, что “естественный” класс квазирегулярных отображений не ограничивается дифференцируемыми отображениями. Современное определение квазирегулярных отображений имеет следующий вид.

Определение 2.60. *K-квазирегулярным в области D отображением называется слабо дифференцируемое непрерывное отображение f, принадлежащее Соболевскому пространству $W^{1,n}_{loc}$, такое, что якобиан J_f не меняет знак в D и почти везде в D*

$$\|Df(x)\|^n \leq K|J_f(x)|\,.$$

Определение 2.61. *отображение называется квазирегулярным, если оно K-квазирегулярно для некоторого $K \geq 1$.*

Отображения в константу не включают в класс квазирегулярных отображений.

Квазирегулярные отображения являются внутренними, но не все даже дифференцируемые внутренние отображения являются квазирегулярными. Примеры внутренних отображений, не являющихся квазирегулярными, см. [**73, 72**].

Теорема 2.62 (теорема Зорича,[**126**]). *Каждый локально гомеоморфный квазирегулярный эндоморфизм $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является гомеоморфизмом $\mathbb{R}^n$.*

В размерности $n = 2$ в качестве контрпримера к теореме Зорича можно указать функцию $e^z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

ГЛАВА 3

Предельные свойства инвариантных наборов точек.

3.1. Инвариантные множества.

Определение 3.1. *Множество U называется **инвариантным**, если $f(U) = U$.*

Для внутренних отображений, в отличие от гомеоморфизмов, важен также случай, возвращается ли в себя прообраз множества.

Определение 3.2. *Множество U назовем **тотально инвариантным**, если $f^{-1}(U) = U$.*

Для гомеоморфизмов эти понятия совпадают. Для внутренних отображений из тотальной инвариантности следует инвариантность, но не наоборот. Далее в тексте мы будем наравне с термином “инвариантное множество” употреблять как синоним термин *вперед инвариантное* множество, когда требуется подчеркнуть, что прообраз инвариантного множества, хотя и включает его в себя, может и не совпадать с этим множеством.

Заметим также, что при топологической сопряженности инвариантные и тотально инвариантные множества переходят в соответственно инвариантные и тотально инвариантные множества.

Определение 3.3. *Множество U назовем **впоследствии инвариантным**, если найдется $n \geq 0$ такое, что $f^n(U)$ является инвариантным множеством.*

Заметим, что впоследствии инвариантное множество U не обязанно быть инвариантным.

Пример 3.4. *Для отображения* $z^2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *множество положительных вещественных чисел — инвариантное множество, чисто мнимые числа — впоследствии инвариантное множество, а комплексная плоскость — тотально инвариантное множество.*

3.2. Множества траекторий.

Обозначим через $O_f^+(x)$ *положительную полутраекторию* точки x, т. е. множество $\{f^n(x)|\ n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ *отрицательную полутраекторию* точки x, т. е. множество $\{f^n(x)|\ n < 0\}$. Определение $O_f^-(x)$ корректно, так как мы предполагаем, что f — эпиморфизм.

Отметим, что по определению $O_f^+(x)$ состоит из точек, в то время как в общем случае уже $\{f^{-1}(x)\}$ представляет собой ничто большее чем замкнутое множество. Однако, если f — нульмерное отображение, то в таком случае естественно воспринимать отрицательную полутраекторию[1] точки x как набор различных точек.

Определение 3.5. ***Частной траекторией*** $o_f(x)$ *точки* x *назовем произвольное множество вида*

$$\{x_i|f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}, x_0 = x\}.$$

[1]Заметим, что в современной терминологии динамических систем часто используется термин “орбита” как синоним слова “траектория”. В данной работе для консистентности выбран термин “траектория”, но для краткости речи в тексте может встречаться и термин “орбита”. Далее, используемый здесь термин “полутраектория” подчеркивает направленность положительных и отрицательных полутраекторий приставкой “полу-”. В современной терминологии используются как и термины положительная полутраектория, отрицательная полутраектория, так и их синонимы положительная траектория, отрицательная траектория.

Если $i \le 0$, то будем говорить о частной отрицательной полутраектории. Заметим, что у внутреннего отображения частная положительная полутраектория совпадает с обычной положительной полутраекторией.

При переходе к необратимым отображениям возникает вопрос, что считать обобщением понятия траектории $O_f(x) = \{f^n(x) | \ n \in \mathbb{Z}\}$ точки гомеоморфизма. Зачастую интуитивно предлагаемое множество $O_f^-(x) \cup O_f^+(x)$ является неудачным обобщением с точки зрения топологической теории динамических систем, так как множество $O_f^-(x) \cup O_f^+(x)$ не инвариантно.

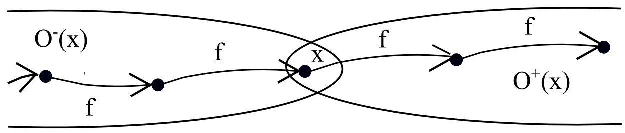

Рис. 3.1. $O_f(x)$ для гомеоморфизма.

С точки зрения топологической теории гомеоморфизмов более естественно такое определение: траектория точки - наименьшее инвариантное множество, содержащее эту точку.

Если принять инвариантность траектории точки за основу определения, то можно дать определение траектории точки как множества всех частных траекторий, имеющих непустое пересечение с некоторой частной траекторией точки. Такое определение не зависит от выбора частной траектории, но для произвольных непрерывных необратимых отображений полученное множество может обладать крайне сложной структурой и плохими топологическими свойствами. К счастью, для дискретных, а следовательно, и для внутренних отображений структура траектории резко упрощается.

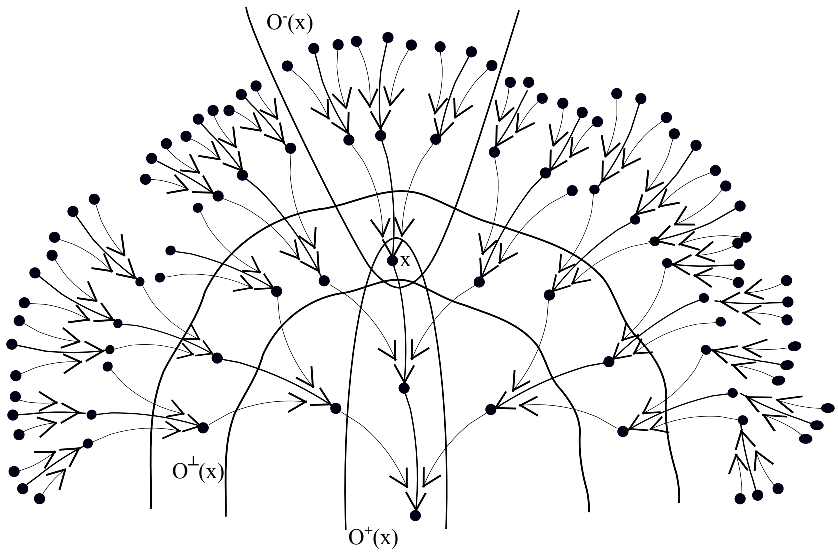

Рис. 3.2. $O_f(x)$, $O^+_f(x)$, $O^-_f(x)$, $O^\perp_f(x)$ необратимого внутреннего отображения.

Определение 3.6. ***Широкой траекторией*** $O_f(x)$ *точки* x *назовем множество* $\cup_{y\in O^+_f(x)} O^-_f(x)$.

В силу дискретности f широкая траектория [2] состоит из не более чем счетного числа точек. Это наименьшее тотально инвариантное множество, содержащее данную точку. Между точками широкой траектории можно перейти, используя одну из ветвей соответствующего отображения $f^{-l} \circ f^k$.

[2] В работах [**10, 11, 12, 119**] $O_f(x)$ из определения 3.6 называлось полной траекторией. Однако, поскольку в некоторых работах по необратимым динамическим системам полной **(full)** траекторией называется множество $O^-_f(y) \cup O^+_f(x)$, то во избежание путаницы в данной работе термин "полная траектория" не употребляется, для множества $O_f(x)$ введено название "широкая траектория", а для множества $O^-_f(x) \cup O^+_f(x)$ никакого специального названия не используется.

Легко видеть из определения, что любые две частные траектории точек одной широкой траектории, начиная с какого-то момента, совпадают.

3.2.1. Нейтральные сечения траектории. В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое не нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Определение 3.7. *Нейтральным сечением траектории точки x или просто нейтральным сечением точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим его через $O_f^{\perp}(x)$.*

Нейтральное сечение $O_f^{\perp}(x)$ точки x совпадает с нейтральными сечениями всех своих точек:

$$\forall y \in O_f^{\perp}(x) \Rightarrow O_f^{\perp}(y) = O_f^{\perp}(x).$$

Как легко видеть из определения, если $O_f^{+}(x)$ не содержит периодических точек, а f имеет во всех точках траектории больше одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, при чем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 3.8. *n-й нейтральной итерацией точки x назовем множество*

$$f^{-n}(f^n(x)) \setminus f^{-(n-1)}\left(f^{n-1}(x)\right).$$

Если $O_f^{+}(x)$ не содержит периодических точек, то на $O_f^{\perp}(x)$ имеется естественное отношение частичного порядка между точками различных итераций. К сожалению, между точками одной итерации такого естественного порядка нет, однако в маломерном случае иногда удается найти инвариантное слоение коразмерности 1, такое, что разные точки нейтрального сечения находятся на разных слоях, что позволяет задать на нейтральном сечении циклический порядок.

Пример 3.9. *Рассмотрим отображение* $z^2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *и точку* $\frac{1}{2}$. *Ее широкая траектория состоит из точек* $\frac{1}{2^k}\varepsilon_{2^l}$, *где* $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, ε_{2^l} *— произвольный корень из единицы степени* 2^l.

Легко видеть, что точки этой широкой траектории плотны на окружностях радиуса $\frac{1}{2^k}$ *с центром в* 0. *Сужение широкой траектории на такую окружность является ее нейтральным сечением.*

Таким образом, у внутренних отображений, в отличие от гомеоморфизмов, у траектории, кроме “времени” есть дополнительное “нейтральное” измерение. Вперед и назад во “времени” своей траектории движутся нейтральные сечения, а по нейтральным сечениям можно “двигаться” с помощью нейтральных итераций.

Поэтому нейтральное сечение можно рассматривать как своего рода “нейтральную полутраекторию”. Как и отрицательная полутраектория точки x под действием f^{-1}, “нейтральная” полутраектория точки x под действием последовательности отображений $f^{-n} \circ f^n$ определена неоднозначно. Поэтому по аналогии с частной траекторией для f^{-1}, можно определить частную нейтральную траекторию. Пусть $\Delta_n^{\perp}(x) = f^{-n} \circ f^n(x) \setminus f^{-(n-1)} \circ f^{n-1}(x)$, $n > 0$, $\Delta_0^{\perp}(x) = \{x\}$.

Определение 3.10. *Регулярной частной нейтральной траекторией* $o_f^0(x)$ *точки* x *назовем произвольную последовательность точек* $\{x_n | x_n \in \Delta_n^{\perp}(x), n \geq 0\}$.

Пример 3.11. *У отображения* $z^2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *последовательность точек* $\cos\frac{\pi}{2^n} + i\sin\frac{\pi}{2^n}$ *и последовательность точек* $\cos\frac{(2^n-1)\pi}{2^n} - i\sin\frac{(2^n-1)\pi}{2^n}$ *являются примерами регулярных частных нейтральных траекторий точки* $1 \in \mathbb{C}$.

Заметим, что при $n > 0$ множество $\Delta_n^{\perp}(x)$ может быть и пусто, поэтому регулярная частная нейтральная траектория точки может и не существовать. Поскольку нейтральное сечение точки всегда существует, определим в общем случае частную нейтральную траекторию точки так, чтобы она существовала всегда, следующим образом.

Определение 3.12. *Частной нейтральной траекторией* $o_f^0(x)$ *точки* x *назовем последовательность точек*

$$\{x_n | x_n = \begin{cases} y \in \Delta_n^{\perp}(x), & \Delta_n^{\perp}(x) \neq \varnothing; \\ x_{n-1}, & \Delta_n^{\perp}(x) = \varnothing; \end{cases} n \geq 0\}.$$

3.2.2. Периодические точки.

Определение 3.13. *Точка* x *называется* ***фиксированной*** *точкой отображения* f, *если* $f(x) = x$. *Множество фиксированных точек* f *обозначим через* $\mathrm{Fix}(f)$.

Фиксированную точку еще иногда называют *неподвижной* точкой.

Определение 3.14. *Точка* x *называется* ***периодической*** *периода* n *для отображения* f, *если* $f^n(x) = x$ *и* $f^k(x) \neq x$ *для* $k = 1, \ldots, n-1$. *Множество всех периодических точек отображения* f *обозначим* $\mathrm{Per}(f)$.

Определение 3.15. *Точку* x *назовем* ***впоследствии периодической***, *если в* $O_f^+(x)$ *содержится периодическая точка. Множество всех впоследствии периодических точек отображения* f *обозначим* $\mathrm{Per}^+(f)$.

Замечание 3.16. *Пусть $f : M \to M$ — произвольный непрерывный эпиморфизм. Тогда если x — впоследствии периодическая точка, то ее широкая траектория $O_f(x)$ состоит из впоследствии периодических точек.*

Такую траекторию назовем *впоследствии периодической.*

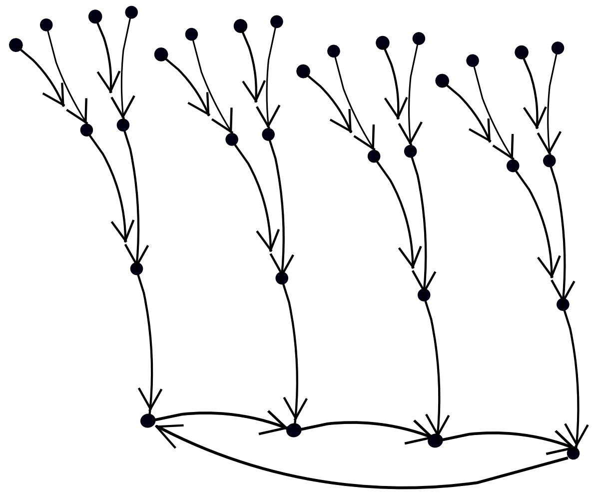

Рис. 3.3. Впоследствии периодическая траектория.

По аналогии с впоследствии периодической точкой можно определить и *впоследствии фиксированную (неподвижную)* точку и траекторию. Множество всех впоследствии неподвижных точек отображения f обозначим $\mathrm{Fix}^+(f)$.

Поскольку f — однозначное отображение, то в широкой траектории точки может содержаться не больше чем один цикл периодических точек. В частности, каждое нейтральное сечение впоследствии периодической широкой траектории содержит ровно одну периодическую точку.

Пример 3.17. *У отображения* $z^2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *точка* $1 \in \mathbb{C}$ *является неподвижной точкой, а корни из единицы степени* 2^n *являются впоследствии неподвижными точками.*

Определение 3.18. *Точку* x *назовем* ***нейтрально неподвижной*** *для отображения* f*, если* $O^{\perp}(x) = x$*. Множество всех нейтрально неподвижных точек отображения* f *обозначим через* $\mathrm{Fix}^{\perp}(f)$*.*

Определение 3.19. *Точку* x *назовем* ***нейтрально периодической*** *периода* n *для отображения* f*, если* $f^{-n} \circ f^n(x) = O^{\perp}(x)$ *и* $f^{-k} \circ f^k(x) \neq O^{\perp}(x)$ *для* $k = 1, \dots, n-1$*. Множество всех нейтрально периодических точек отображения* f *обозначим через* $\mathrm{Per}^{\perp}(f)$*.*

Определение 3.20. *Точку* x *назовем* ***впоследствии нейтрально неподвижной*** *для отображения* f*, если в* $O^+_f(x)$ *содержится нейтрально неподвижная точка.*

Определение 3.21. *Точку* x *назовем* ***впоследствии нейтрально периодической****, если в* $O^+_f(x)$ *содержится нейтрально периодическая точка.*

Следующее утверждение следует прямо из определений.

Лемма 3.22. *Следующие утверждения равносильны:*

(1) *x впоследствии нейтрально периодическая точка;*
(2) *x впоследствии нейтрально неподвижная точка;*
(3) *x — нейтрально периодическая точка.*

По определению, у гомеоморфизма все точки нейтрально неподвижные. Если же модуль степени отображения больше единицы, а все точки с меньшим, чем модуль степени, числом прообразов — особые ($\Xi_f = f(B_f)$), то для того, чтобы точка была нейтрально неподвижной, необходимо, чтобы и она, и все ее образы были особыми точками f.

В частности, у накрытий число прообразов равно степени отображения, следовательно, необратимые накрытия не имеют нейтрально неподвижных и нейтрально периодических точек.

Пример 3.23. *У отображения* $z^2 \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *особые точки* 0 *и* ∞ *являюся нейтрально неподвижными точками.*

3.3. Нумерация точек широкой траектории.

Иногда в доказательствах и рассуждениях может возникать необходимость обойти по индукции все точки широкой траектории, для чего не обойтись без присваивания различных индексов точкам широкой траектории.

В отличие от гомеоморфизмов, у которых все точки траектории естественно проиндексированы степенью отображения, переводящего в эту точку выбранную точку траектории, для широкой траектории необратимого внутреннего отображения такой естественной индексации нет.

Приведем здесь несколько примеров, как принудительно проиндексировать точки широкой траектории.

- Универсальная схема с тремя индексами.

Выберем некоторую частную траекторию точки x и припишем каждой точке y этой частной траектории тройку $(n, 0, 0)$, где n такое, что $y = f^n(x)$. Оставшиеся точки широкой траектории принадлежат нейтральным сечениям точек этой частной траектории. Пусть z — одна из таких оставшихся точек. Припишем ей индекс (p, q, r), где p возьмем от точки частной траектории, q — номер нейтральной итерации от точки $(p, 0, 0)$ до точки z. r — индекс точки z среди множества других точек нейтральной итерации, нумерацию которого нужно принудительно задать.

- Неотрицательная нумерация с одним индексом для конечнократных отображений.

Точке x поставим в соответствие число 0. На первой итерации точке $f(x)$ поставим в соответствие следующие число 1. Далее произвольно занумеруем точки множества $f^{-1} \circ f(x)$, за исключением уже занумерованных точек и затем произвольно занумеруем точки множества $f^{-2} \circ f(x)$. На k-ой итерации точке $f^k(x)$ поставим в соответствие следующие свободное число, Далее произвольно по порядку занумеруем точки множеств $f^{-1} \circ f^k(x)$, $\dots$, $f^{-k} \circ f^k(x)$ за исключением уже занумерованных точек и затем произвольно занумеруем точки множества $f^{-k-1} \circ f^k(x)$. Продолжим нумерацию по индукции.

3.4. Сопряженность и полусопряженность.

Топологическая теория динамических систем считает динамические системы эквивалентными, если найдется гомеоморфизм пространств, переводящий траектории одной системы в траектории другой. Для двух дискретных динамических систем, заданных отображениями $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$, эквивалентность, определенную с помощью гомеоморфизма h, можно записать в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f} & \dots \\
 & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h & & \\
\dots & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{g} & \dots
\end{array}$$

сводящуюся к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

которую можно еще записать как сопряженность с помощью гомеоморфизма: $g = h^{-1} \circ f \circ h$.

Определение 3.24. *Два отображения* $f\colon M \to M$ *и* $g\colon N \to N$ ***топологически сопряжены****, если найдется гомеоморфизм* $h\colon N \to M$*, такой, что* $f \circ h = h \circ g$.

Определение 3.25. *Отображение* $g\colon N \to N$ ***полусопряжено*** *отображению* $f\colon M \to M$*, если найдется непрерывное сюръективное отображение* h*, такое, что* $f \circ h = h \circ g$*. Отображение* g *также называют* ***топологическим фактором*** *отображения* f*.*

Разницу между этими определениями можно выразить так: если f и g сопряжены, то динамика f и g *эквивалентна*; если f и g полусопряжены, то динамика g *содержит* динамику f. Например, из полусопряженности следует, что если p — периодическая точка для g, то $h(p)$ — периодическая точка для f, но не наоборот, а из сопряженности утверждение следует в обе стороны.

Если M и N — одномерные топологические пространства, на которых задан порядок точек, то в этом случае можно определить специальный вариант полусопряженности, сохраняющий порядок.

Определение 3.26. *Отображение* $g\colon N \to N$ ***комбинаторно сопряжено*** *отображению* $f\colon M \to M$*, если найдется непрерывное многозначное сохраняющее порядок сюръективное отображение* h*, такое, что* $f \circ h = h \circ g$*, и такое, что образ либо прообраз любой точки есть либо одна точка, либо связный отрезок.*

3.5. Классические множества предельных и рекуррентных точек.

Определим для каждой точки x ω-предельное множество $\omega(x)$ и α-предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \alpha(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n}(x)}$$

По определению, эти множества замкнуты.

Альтернативное определение этих множеств через подпоследовательности выглядит так:

$$\omega(x) = \{y|\exists(n_i) : i\to\infty, n_i\to\infty, f^{n_i}(x)\to y\},$$

$$\alpha(x) = \{y|\exists y_i\to y, \exists(n_i) : i\to\infty, n_i\to\infty, f^{n_i}(y_i)\to x\}.$$

Определение 3.27. *Назовем точку x **ω-(α-) рекуррентной**, если $x\in\omega(x)$ (соответственно, $x\in\alpha(x)$).*

Определение 3.28. *Назовем точку x **рекуррентной**[3], если x ω-рекуррентна либо α-рекуррентна.*

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ множество ω-рекуррентных точек, через $\mathrm{Rec}_-(f)$ множество α-рекуррентных точек, и через $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f)\cup\mathrm{Rec}_-(f)$ — множество всех рекуррентных точек.

Обозначим через $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f)\cup\mathrm{Lim}_-(f)$ *предельное множество* f, объединение ω-предельных множеств и α-предельных множеств всех точек. Легко видеть, что $\mathrm{Rec}(f)\subset\mathrm{Lim}(f)$.

Это классические определения, повсеместно используемые как в обратимой, так и в необратимой динамике.

Замечание 3.29. *Если x — не являющаяся периодической α-рекуррентная точка внутреннего отображения*

[3]Такое определение рекуррентности называется еще рекуррентностью по Готтшалку и Хедлунду.

f, то сходящаяся к ней последовательность точек, принадлежащих ее прообразам, обязательно принадлежит бесконечному числу прообразов x.

Это замечание следует из более общей леммы 3.48.

Пример 3.30. *У отображения $z^2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ для любой точки p, $|p| < 1$ точка 0 является ее ω-предельным множеством, а единичная окружность — α-предельным множеством.*

3.5.1. Инвариантность классических множеств рекуррентных точек. У гомеоморфизмов многие динамические свойства, такие, как свойство быть рекуррентной или неблуждающей точкой, принадлежать предельному множеству и т. д., справедливы для всех точек траектории, если справедливы хотя бы для одной ее точки.

Однако, как мы далее увидим на примерах, у необратимых отображений различные точки широкой траектории могут обладать различными свойствами с точки зрения теории динамических систем. Например, частная траектория может содержать как рекуррентные, так и, блуждающие точки.

Пример 3.31. *Пример конечнократного внутреннего эпиморфизма, у которого траектории содержат как рекуррентные точки, так и точки, не являющиеся рекуррентными (блуждающие).*

Построение. Рассмотрим счетный набор единичных окружностей с координатами (n, α), где $n \in \mathbb{Z}^+$ – номер окружности, $\alpha \in [0, 2\pi)$ – угловая координата.

Пусть $\psi(\alpha) = \alpha + \xi \bmod 2\pi$ – поворот на иррациональный угол. Легко видеть, что у отображения $(n, \alpha) \mapsto (max(n-1, 0), \psi(\alpha))$ точки с $n = 0$ – рекуррентные, а с $n > 0$ – блуждающие. $\square$

Хотелось бы выявить такой набор условий на внутренние эпиморфизмы, чтобы для удовлетворяющих им отображений из существования некоторых свойств для какой-то одной точки следовала бы справедливость этих свойств для некоторого подмножества точек широкой траектории.

Лемма 3.32. *Если x — ω-(α-)рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из ω-(α-)рекуррентных точек.*

Доказательство. [4] Доказательство леммы опирается на два простых замечания:

1) Если $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ — последовательность вложенных множеств, то $\forall k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cap_{m\geq k} A_m$.

2) Если имеется две последовательности вложенных множеств, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ и $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, при чем $B_k \supseteq A_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Обозначим $y = f^k(x)$. Рассмотрим $\omega(y)$. $\cap_{n=N}^{\infty} f^n(y) = \cap_{m=N+k}^{\infty} f^m(y)$, поэтому, используя замечание 1,

$$\omega(y) = \bigcap_N \overline{\bigcap_{n=N}^{\infty} f^n(y)} = \bigcap_N \overline{\bigcap_{m=N+k}^{\infty} f^m(x)} = (\text{см. } 1) = \\ = \bigcap_N \overline{\bigcap_{s=N}^{\infty} f^s(x)} = \omega(x).$$

Рассмотрим $\alpha(y)$. Обозначим

$$\hat{B}_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)}; B_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n-k}(y)} = \hat{B}_{N+k};$$

$$A_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(x)};$$

[4] Автор выражает благодарность Е. Полуляху за строгое доказательство.

Очевидно, что $f^{-n}(x) \subseteq f^{-n-k}(y)$ $\forall n < N$. Поэтому $A_N \subseteq B_N$ $\forall N \in \mathbb{N}$. Заметим, что

$$f^{-k}\left(\hat{B}_N\right) = f^{-k}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)\right) \supseteq \overline{f^{-k}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)\right)} = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n-k}(y)} = (\text{см. замечание 2}) = B_N.$$

Поэтому

$$f^{-k}(\alpha(y)) = f^{-k}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{B}_N\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-k}\left(\hat{B}_N\right) \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_N \supseteq$$

$$\supseteq (\text{см. замечание 2}) \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_N = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(x)} = \alpha(x).$$

С другой стороны, $x \in f^{-k}(y)$. Следовательно, если x — α-рекуррентная точка, то $f^{-k}(\alpha(y)) \cap f^{-k}(y) \neq \varnothing$, так как $\alpha(x) \ni x$. Отсюда следует, что $f^k\left(f^{-k}(\alpha(y))\right) \cap f^k\left(f^{-k}(y)\right) \supseteq f^k\left(f^{-k}(\alpha(y)) \cap f^{-k}(y)\right) \neq \varnothing$, и y — тоже α-рекуррентная точка. $\square$

Следствие 3.33. *Пусть $f : M \to M$ — внутренний эпиморфизм. Тогда, если x — ω-(α-)рекуррентных или рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит соответственно из ω-(α-)рекуррентных или рекуррентных точек.*

Лемма 3.34. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм. Тогда если x — ω-рекуррентная точка, не являющаяся периодической, то найдется ее частная отрицательная полутраектория, состоящая из ω-рекуррентных точек.*

Доказательство. Поскольку x — ω-рекуррентная точка, то найдется (m_i) — последовательность степеней f, такая, что $m_i \in \mathbb{N}$, $m_i \to \infty$, а $f^{m_i}(x) \to x$, когда $i \to \infty$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в $f^{-n}(x)$ найдется ω-рекуррентная точка. Отбросив конечное число элементов последовательности (m_i), можно считать, что все $m_i > n$. Тогда $\forall m_i$ $f^{m_i-n}(x) \in O^+(f^{-n}(x))$, при чем $f^{m_i-n}(x) \in f^{-n}(f^{m_i}(x))$.

f^{-n} переводит сходящуюся к x последовательность в набор последовательностей, сходящихся к точкам из $f^{-n}(x)$ согласно лемме 2.34.

Множество $(f^{m_i-n}(x))$ является подмножеством набора последовательностей $f^{-n}\left(f^{m_i}(x)\right)$, и содержит счетное число точек, так как x не является периодической. В то же время $f^{-n}(x)$ содержит конечное число точек по условию леммы. Следовательно, из множества $(f^{m_i-n}(x))$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к одной из точек из $f^{-n}(x)$. Тогда, по определению, эта точка ω-рекуррентна.

Таким образом, если точка x — ω-рекуррентна, то в $f^{-1}(x)$ тоже найдется ω-рекуррентная точка. Продолжая это утверждение по индукции, получим искомую частную отрицательную полутраекторию точки x, состоящую из ω-рекуррентных точек. □

Лемма 3.35. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм. Тогда если x — α-рекуррентная точка, не являющаяся периодической, то найдется ее частная отрицательная полутраектория, состоящая из α-рекуррентных точек.*

Доказательство. Поскольку x это α-рекуррентная точка, то найдется (y_i) — последовательность точек из $O^-(x)$ и (m_i) — последовательность степеней f, такие, что $m_i \in \mathbb{N}$, $f^{m_i}(y_i) = x$, а $y_i \to x$ и $m_i \to +\infty$ когда $i \to \infty$.

Покажем, что в $f^{-1}(x)$ найдется α-рекуррентная точка. Отбросив лишние степени, можно считать, что все $m_i > 1$. Тогда $f^{m_i-1}(y_i) \in f^{-1}\left(f^{m_i}(y_i)\right)$. согласно лемме 2.34, множество $f^{-1}(f^{m_i}(y_i))$ представляет собой набор последовательностей, сходящихся каждая к своей точке из множества $f^{-1}(x)$. Множество $f^{m_i-1}(y_i)$ счетно, а множество $f^{-1}(x)$ конечно. Поэтому найдется точка $p_1 \in f^{-1}(x)$ такая, что к ней сходится счетная подпоследовательность из $(f^{m_i-1}(y_i))$.

Тогда p_1 — искомая α-рекуррентная точка из $f^{-1}(x)$.

Таким образом, если точка x — α-рекуррентна, то в $f^{-1}(x)$ тоже найдется α-рекуррентная точка. Продолжая это утверждение по индукции, построим искомую частную отрицательную полутраекторию точки x, состоящую из α-рекуррентных точек. $\square$

Следствие 3.36. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм. Тогда множества ω-(α-) рекуррентных и рекуррентных точек f вперед инварианты.*

Если точка рекуррентна (т.е. α-рекуррентна или ω-рекуррентна), то из лемм 3.34 и 3.35 следует, что найдутся ее частная отрицательная полутраектория, состоящая из рекуррентных точек.

Однако для специального случая рекуррентности, если точка одновременно и α-рекуррентна, и ω-рекуррентна, то из лемм 3.34 и 3.35 следует, что найдутся ее частная отрицательная полутраектория, состоящая из ω-рекуррентных точек и ее частная отрицательная полутраектория, состоящая из α-рекуррентных точек. Но отсюда не следует, что эти две частные полутраектории совпадут.

Упражнение 3.37. *Построить внутреннее отображение, у которого есть точка x, одновременно и α-рекуррентная, и ω-рекуррентная, такая, что $O^-(x)$ не содержит рекуррентных точек.*

3.5.2. Шаблонные утверждения для инвариантных подмножеств широкой траектории.

Общие свойства подмножеств широкой траектории из утверждений 3.32–3.35 будут встречаться достаточно часто для разных классов траекторий.

Чтобы не доказывать каждый раз соответствующие выводы из этих свойств, назовем эти свойства аксиомами (TP_A) и (TP_B) и сформулируем с их помощью следующие шаблонные утверждения, которые следуют прямо из определений аксиом (TP_A) и (TP_B).

Пусть какие-то точки широкой траектории точки x обладают некоторым свойством X.

Определение 3.38. *Если свойство X точки x такое, что если оно имеет место для точки x, то оно имеет место и для $f(x)$, будем говорить, что свойство X удовлетворяет аксиоме (TP_A).*

Определение 3.39. *Если свойство X точки x такое, что если оно имеет место для точки x, то оно имеет место и для хотя бы одной из точек из $f^{-1}(x)$, будем говорить, что свойство X удовлетворяет аксиоме (TP_B).*

Утверждение 3.40. *Пусть некоторое свойство X точек широкой траектории точки x удовлетворяет аксиоме (TP_A). Тогда*

(1) *оно имеет место и для всех точек из $O^+(x)$;*
(2) *если точка $y \in O(x)$ не обладает свойством X, то вся ее отрицательная полутраектория $O^-(y)$ не обладает свойством X.*

Утверждение 3.41. *Пусть некоторое свойство X точек широкой траектории точки x удовлетворяет аксиоме (TP_B). Тогда оно имеет место и как минимум для одной некоторой частной траектории из $O^-(x)$.*

Утверждение 3.42. *Пусть некоторое свойство X точек широкой траектории точки x удовлетворяет аксиомам (TP_A) и (TP_B). Тогда точки со свойством X образуют вперед инвариантное подмножество широкой траектории $O(x)$.*

Как было показано выше в разделе 3.5.1, подмножества ω-, α-, и просто рекуррентных точек широкой траектории удовлетворяют аксиомам (TP_A) и (TP_B). Поэтому для этих множеств справедливы утверждения 3.40, 3.41, 3.42.

Пример применения утверждений 3.40 и 3.42 к подмножеству ω-рекуррентных точек:

Утверждение 3.43. *ω-рекуррентные точки образуют вперед инвариантное подмножество широкой траектории $O(x)$; Если точка $y \in O(x)$ не является ω-рекуррентной, то вся ее отрицательная полутраектория $O^-(y)$ не содержит ω-рекуррентных точек.*

3.6. Предельные множества широкой траектории.

ω-предельное множество, определенное в разделе 3.5, удовлетворяет аксиоме (TP_A) и в конечнократном случае является вперед инвариантным множеством:

$$\forall x \in M \;\; f(\omega(x)) = \omega(x).$$

Также, поскольку любые две частные траектории точек одной широкой траектории, начиная с какого-то момента, совпадают, ω-предельное множество является топологическом инвариантом широкой траектории, т. е. $\forall y \in O(x)$ $\omega(y) = \omega(x)$. Однако, из-за необратимости отображения, ω-предельное множество не является тотально инвариантным, к примеру, притягивающая неподвижная точка из примера 3.45 имеет прообразы, не принадлежащие ω-предельному множеству.

Из-за необратимости отображения, для α-предельного множества ситуация еще более сложная. Из определения следует, что $\forall x \in M\ f(\alpha(x)) \subset \alpha(f(x))$. Однако равенство этих множеств может и не достигаться, как показывает пример 3.44. Таким образом, даже у x и $f(x)$ могут быть разные α-предельные множества.

При этом α-предельное множество каждой точки является тотально инвариантным множеством:

$$\forall x \in M\ f(\alpha(x)) = \alpha(x), f^{-1}(\alpha(x)) = \alpha(x).$$

Пример 3.44. *Пример внутреннего отображения, у точек частной траектории которого все α-предельные множества различны.*

Построение. Рассмотрим подмножество плоскости

$$X = \left\{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y \in \{0\} \cup \{1\} \cup \left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$$

с индуцированной с $\mathbb{R}^2$ топологией, и отображение f на нем,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, 1), & y = 1; \\ (x, 1 - \frac{1}{n-1}), & y = 1 - \frac{1}{n}, n > 1; \\ (x + 1, 0), & y = 0; \end{cases}$$

По построению $\alpha\left((p, 0)\right) = \{(q, 1) | q \leq p\}$. Следовательно, у всех точек частной траектории $((n, 0))_{n \in \mathbb{Z}}$ α-предельные множества различны. $\square$

Как видим, α-предельное множество является тонкой детализацией динамики системы на уровне отдельной точки и может быть не слишком удобно для более грубого описания динамики системы на уровне траекторий.

Кроме того, α-, и ω-предельные множества описывают только динамику широкой траектории во времени. Однако время представляет собой только одно из измерений широкой траектории, хотя и наиболее важное для физических применений. С точки зрения задач описания структуры отображений важны все направления, в которых происходит конденсация точек.

Пример 3.45 показывает, что для описания множеств накопления широкой траектории α-, и ω-предельных множеств недостаточно.

Пример 3.45. *Пример отображения с накоплением точек широкой траектории на впоследствии неподвижных точках.*

Построение. Рассмотрим счетное семейство отрезков в плоскости $\mathbb{R}^2$, $X = [0,1] \times \mathbb{Z}^+$ с индуцированной с $\mathbb{R}^2$ топологией, и отображение f на нем, заданное с помощью вспомогательного гомеоморфизма отрезка $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$, где $\psi(x) = 2x - x^2$, такое, что

$$f(x,y) = \begin{cases} (\psi(x), y-1), & y \in \mathbb{N}; \\ (\psi(x), 0), & y = 0; \end{cases}$$

По построению, у отображения $\psi(t)$ точка 0 — неподвижная отталкивающая, точка 1 — неподвижная притягивающая. У отображения $f(x,y)$ — точка $(0,0)$ — неподвижная отталкивающая, точка $(1,0)$ — неподвижная притягивающая.

$\forall x \in (0,1) \times \mathbb{Z}^+$ $\omega(x) = (1,0)$, $\alpha(x) = \{0\} \times \mathbb{Z}^+$.

Но для каждой широкой траектории $O(x)$, где $x \in (0,1) \times \mathbb{Z}^+$, множество граничных точек является множеством $\{0\} \times \mathbb{Z}^+ \cup \{1\} \times \mathbb{Z}^+$.

В данном примере для этих точек $\omega(x)$ состоит из одной точки $(1,0)$, но в множество точек накопления их широких траекторий входит вся впоследствии неподвижная широкая траектория точки $(1,0)$. $\square$

Определение 3.46. *Назовем точку x* ***точкой накопления широкой траектории точки*** *y, если найдется подпоследовательность точек из $O_f(y)$, не содержащих точку x, сходящаяся к x.*

Множество точек накопления широкой траектории точки x обозначим через $qlim(x)$.

Из утверждений 2.31, 2.34 и 2.35 следует

Утверждение 3.47. *Множество точек накопления широкой траектории точки x обладает следующими свойствами:*

(1) $y \in qlim(x) \Rightarrow O(y) \subset qlim(x)$
($qlim(x)$ тотально инвариантно).

(2) $y \in O(x) \Rightarrow qlim(y) = qlim(x)$
($qlim(x)$ совпадает для всех точек широкой траектории).

Лемма 3.48. *Пусть f — внутреннее отображение. Сходящаяся последовательность точек широкой траектории $O(x)$, не включающая в себя свою предельную точку, обязательно принадлежит бесконечному числу множеств $f^{-l} \circ f^k(x)$.*

Доказательство. Предположим от противного, что найдется точка p и бесконечная последовательность точек (a_i), $a_i \neq p$, принадлежащих конечному числу множеств $f^{-l} \circ f^k(x)$, сходящаяся к p.

Поскольку число множеств $f^{-l} \circ f^k(x)$ конечно, $\exists k_0, l_0 \geq 0$, такие, что из подпоследовательности (a_i) можно выделить сходящуюся к p подпоследовательность (b_i), $b_i \neq p$, $b_i \in f^{-l_0} \circ f^{k_0}(x)$.

Точка $f^k(x)$, $k \geq 0$ — замкнутое множество, а f — непрерывно. Поэтому объединение конечного числа множеств $f^{-l} \circ f^k(x)$ тоже является замкнутым множеством. В частности, множество $f^{-l_0} \circ f^{k_0}(x)$ замкнуто.

Предположим, что $p \notin f^{-l_0} \circ f^{k_0}(x)$. Но два замкнутых множества в нормальном топологическом пространстве либо пересекаются, либо отделимы. Это противоречат сходимости (b_i) к p. Следовательно, $p \in f^{-l_0} \circ f^{k_0}(x)$. Но отображение f — дискретно, следовательно, и в этом случае (b_i) не может сходиться к p.

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Lim}(x)$ множество $\alpha(x) \cup \omega(x)$. По определению, $\mathrm{Lim}(x) \subset qlim(x)$. Изучим связь между этими предельными множествами.

В примере 3.45 точки накопления широких траекторий, не принадлежащие $\mathrm{Lim}(f)$, со временем отображались в $\mathrm{Lim}(f)$. Однако, как далее будет показано, могут быть и такие точки накопления, которые никак не связаны с $\mathrm{Lim}(f)$.

3.6.1. Предельное множество нейтрального сечения траектории. Возьмем произвольную точку $x \in X$, и рассмотрим ее нейтральное сечение $O^{\perp}(x)$ (см. определение 3.7).

Если внутреннее отображение $f\colon X \to X$ является гомеоморфизмом, то множество $O^{\perp}(x)$ — вырожденное и состоит из самой точки x. Для необратимых отображений также могут быть специальные случаи, когда широкая траектория точки x содержит точки с единственным прообразом, для которых множество $O^{\perp}(x)$ — конечно.

Рассмотрим нормальный случай, когда $O^{\perp}(x)$ состоит из бесконечного числа точек. Тогда у $O^{\perp}(x)$ могут быть предельные точки. Изучим некоторые свойства множества предельных точек нейтрального сечения.

3.6.2. Нейтральное предельное множество.

Определим для каждой точки x нейтральное предельное множество $\perp^0(x)$ как предельное множество ее нейтральных частных траекторий. Если точка x является нейтрально периодической, то ее нейтральное предельное множество совпадает с ее нейтральным сечением, в противном случае это множество можно записать в следующем виде:

$$\perp^0(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{O^{\perp}(x) \setminus f^{-n} \circ f^n(x)}$$

По определению, $\perp^0(x)$ — замкнутое множество. Прямо из определения следует, что нейтральное предельное множество $\perp^0(x)$ одно и то же у всех точек нейтрального сечения $O^{\perp}(x)$. Также, поскольку все отображения $f^{-n} \circ f^n$ переводят сходящуюся последовательность точек в одну или несколько сходящихся последовательностей, то $\forall y \in \perp^0(x) : O^{\perp}(y) \subset \perp^0(x)$. Другими словами, $\perp^0(x)$ с каждой своей точкой содержит и соответствующее нейтральное сечение ее траектории.

Множества с таким свойством будем называть нейтрально инвариантными. Дадим им строгое определение.

Определение 3.49. *Множество U назовем нейтрально инвариантным, если $\forall x \in U$ $O^{\perp}_f(x) \subset U$.*

Заметим, что из произвольного множества V можно построить нейтрально инвариантное множество

$$V' = \bigcup_{i\geq 0} f^{-n} \circ f^n(V).$$

Определение 3.50. *Пусть на пространстве X задано разбиение Ψ на непересекающиеся множества. Множество $A \subset X$ называется* ***насыщенным*** *относительно разбиения Ψ, если A с каждой своей точкой содержит и элемент разбиения Ψ, содержащий эту точку.*

Следствие 3.51. *Нейтрально инвариантное множество является насыщенным множеством относительно разбиения на нейтральные сечения.*

Назовем $\perp^0$-*предельным множеством* f и обозначим через $\mathrm{Lim}^{\perp}(f)$ объединение $\perp^0$-предельных множеств всех точек.

Пример 3.52. *Пример отображения с непустым нейтральным предельным множеством.*

Построение. Рассмотрим полином $z^2\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ в расширенной комплексной плоскости. $O^{\perp}(z_0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n} \circ f^n(z_0)$. Если $z_0 = (r, \varphi)$ в полярных координатах, то

$$O^{\perp}(z_0) = \cup_{n \geq 0} f^{-n} \circ f^n(z_0) = \cup_{n \geq 0} \left\{ (r, \epsilon) | \epsilon \in \left\{ \sqrt[2^n]{\varphi} \right\} \right\}.$$

Множество комплексных корней степени 2^n плотно на единичной окружности, следовательно, $O^{\perp}(z_0)$ плотно на окружности с центром в начале координат радиуса r, а $\perp^0(z_0)$ совпадает с этой окружностью. □

Лемма 3.53. *Если $x \in \perp^0(y)$, то $\perp^0(x) \subset \perp^0(y)$.*

Доказательство. Пусть $z \in \perp^0(x)$. Тогда, по определению, найдется частная нейтральная траектория $x_i \in O^{\perp}(x)$, сходящаяся к z. Далее, $x \in \perp^0(y)$. По определению, найдется частная нейтральная траектория $y_i \in O^{\perp}(y)$, сходящаяся к x.

Согласно утверждению 2.35, из множества $f^{-1} \circ f(y_i)$ можно выделить подпоследовательности, сходящиеся к точкам из $f^{-1} \circ f(x)$, в том числе, подпоследовательность $p_i^1 \in O^{\perp}(y)$, сходящуюся к точке x_1. Это же справедливо и для каждой точки x_n: из множества $f^{-n} \circ f^n(y_i)$ можно выделить подпоследовательность $p_i^n \in O^{\perp}(y)$, сходящуюся к x_n.

Взяв диагональную последовательность $p_n^n \in O^{\perp}(y)$, получим искомую частную нейтральную траекторию, сходящуюся к z. □

Следствие 3.54. *Если $x \in \perp^0(y)$ и $y \in \perp^0(x)$, то $\perp^0(x) = \perp^0(y)$.*

Замечание 3.55. *Если X — компакт, то множество* $\mathrm{Lim}^{\perp}(f)$ *не пусто.*

3.6.3. Широкие предельные множества.

Предельные множества $\alpha(x)$, $\omega(x)$, $\perp^0(x)$, введенные ранее, являются подмножествами множества $qlim(x)$ точек накопления широкой траектории точки x, но кроме них $qlim(x)$ содержит и другие точки.

Определения $qlim(x)$ не достаточно, чтобы описывать динамику широкой траектории относительно таких точек. Поэтому в этом разделе мы проведем классификацию точек $qlim(x)$, разделив это множество на подмножества с разным динамическим поведением.

Множество $qlim(x)$ тотально инвариантно и одно и то же для всех точек широкой траектории $O(x)$. Для предельных множеств $\alpha(x)$, $\omega(x)$, $\perp^0(x)$ это не так. Однако можно построить по этим множествам их расширения, взяв замыкание объединения всех прообразов объединения этих предельных множеств по всем точкам широкой траектории. Взяв все точки широкой траектории, получим независимость результата от выбора точки широкой траектории, а дополнив его прообразами, получим тотальную инвариантность.

Инвариантное относительно широкой траектории расширение α-предельного множества назовем **пополненным α-предельным множеством** и обозначим его через $\widehat{\alpha}(x)$:

$$\widehat{\alpha}(x) = \overline{\bigcup_{l\geq 0} f^{-l}\left(\bigcup_{y\in O(x)} \alpha\left(y\right)\right)} = \overline{\bigcup_{y\in O(x)} \alpha\left(y\right)} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \alpha\left(f^n(x)\right)}$$

Аналогично определим **пополненное ω-предельное множество** $\widehat{\omega}(x)$

$$\widehat{\omega}(x) = \overline{\bigcup_{l\geq 0} f^{-l}\left(\bigcup_{y\in O(x)} \omega\left(y\right)\right)} = \overline{\bigcup_{l\geq 0} f^{-l}\left(\omega\left(x\right)\right)}$$

и **пополненное нейтральное предельное множество** $\widehat{\perp}(x)$

$$\widehat{\perp}(x) = \overline{\bigcup_{l\geq 0} f^{-l}\left(\bigcup_{y\in O(x)} \perp^{0}\left(y\right)\right)} = \overline{\left(\bigcup_{y\in O^{+}(x)\cup O^{-}(x)} \perp^{0}\left(y\right)\right)}.$$

По построению эти множества замкнуты, тотально инвариантны и не зависят от выбора точки широкой траектории, а метод их построения подчеркивает их динамические свойства. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.56, можно показать, что в случае, когда пространство компактно, справедливо представление

$$qlim(x) = \widehat{\alpha}(x) \cup \widehat{\perp}(x) \cup \widehat{\omega}(x).$$

Однако, если пространство не компактно, это уже не так. Для примера, если явно выколоть из компактного пространства M, на котором действует наше внутреннее отображение f, множество точек $D = \bigcup_{y\in O(x)} \alpha\left(y\right)$, то $\widehat{\alpha}(x)$ будет по определению пустым множеством, в то время как в $qlim(x)$ останутся бывшие предельные точки D.

Поэтому для компонент множества $qlim(x)$ воспользуемся менее интуитивными определениями, которые, однако, переносятся и на некомпактный случай.

Широким α-предельным множеством назовем множество $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$, определенное как

$$\widehat{\alpha}^{\perp}(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n}\left(O^{\perp}(x)\right)}$$

Аналогично определим **широкое ω-предельное множество** $\widehat{\omega}^{\perp}(x)$

$$\widehat{\omega}^{\perp}(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^n \left(O^{\perp}(x)\right)}$$

Заметим, что по определению эти множества замкнуты, тотально инвариантны и не зависят от выбора точки широкой траектории.

Теорема 3.56.

$$qlim(x) = \widehat{\alpha}^{\perp}(x) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \perp^0 \left(f^n\left(x\right)\right) \cup \widehat{\omega}^{\perp}(x).$$

Доказательство. Из леммы 3.48 следует, что сходящаяся последовательность точек широкой траектории $O(x)$, не включающая в себя свою предельную точку, обязательно принадлежит бесконечному числу множеств $f^{-l}\circ f^k(x)$.

Поэтому утверждение теоремы сводится к классификации последовательностей пар чисел (k, l), $k, l \in \mathbb{Z}^+$, являющихся степенями f и f^{-1} у потенциально сходящихся последовательностей точек, для которых k и l не могут быть ограниченными одновременно.

Заметим, что такая классификация не зависит от выбора x, так как переход на любую другую точку из $O(x)$ приводит к конечному изменению k и l.

Пусть в потенциально сходящейся последовательности точек из $O(x)$ k ограничено. Тогда, по определению $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$, если предел такой последовательности существует, то он принадлежит $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$. Более того, из такой последовательности можно выделить последовательность с фиксированным значением $k = m$, поэтому предел такой подпоследовательности принадлежит $\alpha(f^m x)$.

Аналогично, если l ограничено, то, если предел такой последовательности существует, то он принадлежит $\widehat{\omega}^{\perp}(x)$, и, более того, $f^{-m}(\omega(x))$ для некоторого m.

Пусть в потенциально сходящейся последовательности точек из $O(x)$ k и l не ограничены.

Если в такой последовательности модуль $|l-k|$ остается ограниченным, то по определению $\widehat{\perp}(x)$, если предел такой последовательности существует, то он принадлежит $\widehat{\perp}(x)$. Более того, из такой последовательности можно выделить последовательность с фиксированным значением $l-k=m$, поэтому предел такой подпоследовательности принадлежит $\perp^0(f^m x)$.

Если в такой последовательности $l-k$ стремится к $+\infty$, то такая последовательность удовлетворяет определению $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$. Поэтому, если предел такой последовательности существует, то он принадлежит $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$.

Если в такой последовательности $l-k$ стремится к $-\infty$, то такая последовательность удовлетворяет определению и $\widehat{\omega}^{\perp}(x)$. Поэтому, если предел такой последовательности существует, то он принадлежит $\widehat{\omega}^{\perp}(x)$.

Указанными возможностями исчерпываются все варианты потенциально сходящихся последовательностей точек из $O(x)$, и все эти варианты принадлежат множеству $\widehat{\alpha}^{\perp}(x)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\perp^0\left(f^n\left(x\right)\right)\cup\widehat{\omega}^{\perp}(x)$, что и доказывает теорему.

$\square$

Заметим, что в доказательстве теоремы в случае, если пространство компактно, то все сходящиеся последовательности имеют предел, следовательно, последовательность, где $l-k$ стремится к $+\infty$, является диагональной последовательностью в определениях $\widehat{\alpha}(x)$ и $\widehat{\perp}(x)$, и ее предел принадлежит $\widehat{\alpha}(x)\cap\widehat{\perp}(x)$. Аналогично, последовательность, где $l-k$ стремится к $-\infty$, является диагональной последовательностью в определениях $\widehat{\omega}(x)$ и $\widehat{\perp}(x)$, и ее предел принадлежит $\widehat{\alpha}(x)\cap\widehat{\perp}(x)$.

Отсюда следует, что $\widehat{\omega}(x)\subseteq\widehat{\omega}^{\perp}(x)$ и $\widehat{\alpha}(x)\subseteq\widehat{\alpha}^{\perp}(x)$.

Разложение $qlim(x) = \widehat{\alpha}^{\perp}(x) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \perp^0 (f^n(x)) \cup \widehat{\omega}^{\perp}(x)$ из теоремы 3.56 является дизъюнктивным разложением потенциально сходящихся подпоследовательностей точек широкой траектории. Однако это не означает, что соответствующие предельные множества будут различны. Как показывают примеры этой главы, в общем случае это различные множества. Однако ничего не запрещает этим множествам пересекаться, совпадать, или вырождаться в пустое множество.

Упражнение 3.57. *Построить пример отображения, у которого $\widehat{\alpha}^{\perp}(x) = \alpha(x) = \omega(x) = \widehat{\omega}^{\perp}(x)$ для некоторого x.*

3.7. Рекуррентные точки широкой траектории.

В случае гомеоморфизмов рекуррентные точки делятся только на α-, и ω-рекуррентные точки, так как для траектории гомеоморфизма есть только два направления, с которых она может накапливаться на себе.

У внутреннего отображения с его широкой траекторией, состоящей из точек $f^{-k} \circ f^l(x)$, таких направлений бесконечно много. Например, определение $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентности покрывает сразу бесконечно много топологически различных вариантов рекуррентности, для которых в последовательности точек $f^{-k} \circ f^l(x)$ параметр k стремится к ∞, и которые отличаются поведением параметра l.

Определенные ранее понятия ω-, и α- рекуррентности были только специальными случаями, когда точки траектории должны были накапливаться на ней в “прошлом” или “будущем”, хотя они могут это делать и в “дополнительном измерении”.

Дадим общее определение для всевозможных вариантов рекуррентности точек широкой траектории.

3.7.1. Квазирекуррентные точки.

Определение 3.58. *Назовем точку x **регулярно квазирекуррентной точкой**, если она является точкой накопления своей широкой траектории $O_f(x)$.*

Лемма 3.59. *Если впоследствии фиксированная точка внутреннего отображения f является регулярно квазирекуррентной, то она α-рекуррентна.*

Доказательство. Пусть точка x внутреннего эпиморфизма является квазирекуррентной. Тогда найдется последовательность точек $y_i \in O(x)$, $y_i \neq x$, сходящаяся к x. Поскольку x — впоследствии фиксированная точка, то найдется $n > 0$ такое, что $f^n(x)$ — фиксированная точка. Поскольку $y_i \in O(x)$ сходится к x, то последовательность $f^n(y_i) \in O(f^n(x))$ сходится к $f^n(x)$. Но, поскольку $f^{n+k}(x) = f^n(x)$, то на самом деле $f^n(y_i) \in O^-(f^n(x))$. Далее, поскольку точка x является одним из прообразов точки $f^n(x)$, то, согласно утверждению 2.31, в окрестности точки x найдется последовательность точек из $O^-(x)$, сходящаяся к x. Но тогда x — α-рекуррентная точка. □

Из определения и утверждения 3.47 следует

Утверждение 3.60. *Если x — регулярно квазирекуррентная точка, то $O(x)$ состоит из регулярно квазирекуррентных точек.*

Траекторию регулярно квазирекуррентной точки будем называть регулярно квазирекуррентной траекторией.

Следствие 3.61. *Множество регулярно квазирекуррентных точек, а также множество точек, не являющихся квазирекуррентными, тотально инвариантно.*

Хотелось бы определить множество квазирекуррентных точек так, чтобы оно включало в себя периодические точки, по аналогии с гомеоморфизмами.

В случае гомеоморфизмов множество рекуррентных точек определяется через множество точек накопления бесконечных полутраекторий $O^+(x)$ и $O^-(x)$, которые могут быть и вырожденными, т.е. содержать одни и те же точки.

Подобное определение можно было бы дать и для внутренних отображений. Но у внутренних отображений бесконечно много "бесконечных" направлений. Хоть в таком виде дать определение было бы идейно не сложно, но технически громоздко.

Поэтому просто определим множество рекуррентных точек как объединение регулярного и вырожденного случаев.

Определение 3.62. *Назовем точку x **квазирекуррентной точкой**, если она регулярно квазирекуррентная, впоследствии периодическая или нейтрально периодическая.*

Обозначим через $\mathrm{QRec}(f)$ множество квазирекуррентных точек, а через $\mathrm{QLim}(f)$ — множество точек накопления. По определению, $\mathrm{QRec}(f) \subset \mathrm{QLim}(f)$.

Для гомеоморфизмов $\mathrm{QRec}(f)$ и $\mathrm{QLim}(f)$ совпадают с соответственно $\mathrm{Rec}(f)$ и $\mathrm{Lim}(f)$, для эпиморфизмов же, вообще говоря, эти множества различны. Однако по определению $\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{QRec}(f)$ и $\mathrm{Lim}(f) \subset \mathrm{QLim}(f)$.

Рассмотрим один важный частный случай квазирекуррентности, который понадобится нам в дальнейшем.

3.7.2. $\perp^0$-рекуррентные точки.

Рассмотрим нейтральное сечение точки — множество $O_f^{\perp}(x)$. Естественно, что у бесконечного множества, каким в общем случае является нейтральное сечение, будут точки накопления. На этом множестве можно даже ввести свой аналог динамики, по типу монотонного увеличения множеств, используя, например, частные нейтральные траектории, и даже построить “нейтральные” аналоги инвариантных множеств.

Например, следующее понятие является “нейтральным” аналогом рекуррентности.

Определение 3.63. *Назовем точку x* $\perp^0$***-рекуррентной***[5] ***точкой****, если для некоторой своей частной нейтральной траектории она является точкой накопления.*

Если f — внутреннее отображение, являющееся разложимым на локальные прообразы (см. определение 4.17), то справедлива следующие лемма:

Лемма 3.64. *Если x — $\perp^0$-рекуррентная точка, то $O(x)$ состоит из $\perp^0$-рекуррентных точек.*

Доказательство. Пусть $y \in O(x)$. Тогда найдутся $p, q \geq 0$, такие, что $y \in f^{-p} \circ f^q(x)$. Пусть (p_i) — частная нейтральная траектория x, сходящаяся к x. Тогда согласно утверждению 2.35, в множестве $f^{-p} \circ f^q((p_i))$ найдется подпоследовательность, сходящаяся к y. Но, по построению, эта подпоследовательность является искомой частной нейтральной траекторией y. $\square$

Следствие 3.65. *Множество $\perp^0$-рекуррентных точек тотально инвариантно.*

Обозначим множество $\perp^0$-рекуррентных точек через $\mathrm{Rec}^{\perp}(f)$. Легко видеть, что $\mathrm{Rec}^{\perp}(f) \subset \mathrm{Lim}^{\perp}(f)$.

Более подробно нейтральные сечения и их предельные множества рассматривается в разделе 5.

3.7.3. Широко рекуррентные точки. Как и в случае с широкими предельными множествами, разделим множество квазирекуррентных точек на подклассы.

[5]Будем читать “нейтрально рекуррентной”.

Определение 3.66. *Назовем точку x* $\widehat{\alpha}^{\perp}$***-рекуррентной***,[6] *если $x \in \widehat{\alpha}^{\perp}(x)$.*

Определение 3.67. *Назовем точку x* $\widehat{\omega}^{\perp}$***-рекуррентной***,[7] *если $x \in \widehat{\omega}^{\perp}(x)$.*

По определению, если x — $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентная точка или $\widehat{\omega}^{\perp}$-рекуррентная точка, то таковы и все точки $O(x)$. Поэтому можно говорить о $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентной траектории и $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентной траектории.

Обозначим через $\widehat{\mathrm{Rec}}^{-}(f)$ множество $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентных точек, и через $\widehat{\mathrm{Rec}}^{+}(f)$ множество $\widehat{\omega}^{\perp}$-рекуррентных точек. По определению, эти множества тотально инвариантны.

Поскольку $\widehat{\omega}(x) \subseteq \widehat{\omega}^{\perp}(x)$ и $\widehat{\alpha}(x) \subseteq \widehat{\alpha}^{\perp}(x)$, то отсюда следует, что $\mathrm{Rec}^{-}(f) \subset \widehat{\mathrm{Rec}}^{-}(f)$ и $\mathrm{Rec}^{+}(f) \subset \widehat{\mathrm{Rec}}^{+}(f)$.

Как следствие из теоремы 3.56,

$$\mathrm{QRec}(f) = \widehat{\mathrm{Rec}}^{-}(f) \cup \mathrm{Rec}^{\perp}(f) \cup \widehat{\mathrm{Rec}}^{+}(f).$$

Определение 3.68. *Назовем точку x* ***широко рекуррентной***, *если x — $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентная или $\widehat{\omega}^{\perp}$-рекуррентная точка.*

Изучим множество широко рекуррентных точек подробнее.

3.7.4. Впоследствии рекуррентные точки.

Как показано в разделе 3.5.1, такие свойства, как, например, свойство быть рекуррентной точкой, не распространяются по всем точкам широкой траектории.

Дадим еще одно шаблонное определение. Пусть некоторое свойство X точки удовлетворяет аксиоме (TP_A), т. е. такое, что если оно имеет место для точки x, то оно имеет место и для $f(x)$ (а значит, и всех точек из $O^{+}(x)$).

[6] Будем произносить “широко альфа рекуррентной”.

[7] Будем произносить “широко омега рекуррентной”.

Определение 3.69. *Назовем точку x* ***впоследствии X****, если $O^+(x)$ содержит точку со свойством X.*

Поскольку все частные траектории из $O(x)$ имеют непустое пересечение, в $O(x)$ достаточно иметь одну точку со свойством X, удовлетворяющим аксиоме (TP_A), чтобы все ее точки были впоследствии X точками.

Определение 3.70. *Если $O(x)$ содержит точку со свойством X, то $O(x)$ назовем* ***впоследствии X*** *траекторией.*

Такой шаблон позволяет определить **впоследствии α-рекуррентные, впоследствии рекуррентные** точки, траектории и т. д. Пример:

Определение 3.71. *Назовем точку x* ***впоследствии ω-рекуррентной****, если $O^+(x)$ содержит ω-рекуррентную точку. Широкую траекторию $O(x)$ в таком случае назовем* ***впоследствии ω-рекуррентной траекторией****.*

Впоследствии рекуррентные точки являются точками накопления своей широкой траектории:

Утверждение 3.72. *Пусть x — впоследствии рекуррентная точка. Тогда найдется последовательность точек из $O(x)$, сходящаяся к x.*

Доказательство. Так как x — впоследствии рекуррентная точка, $\exists k \geq 0$: $f^k(x)$ — рекуррентная точка. Тогда по определению найдется последовательность точек широкой орбиты, сходящаяся к $f^k(x)$. Из леммы 2.34 следует, что в окрестности точки x найдется подпоследовательность прообраза этой последовательности, сходящаяся к x. □

Следствие 3.73. *Впоследствии рекуррентные точки являются широко рекуррентными.*

Множество широко рекуррентных точек не исчерпывается впоследствии рекуррентными точками. Используя доказательство теоремы 3.56, впоследствии рекуррентные точки можно охарактеризовать как точки, для которых у сходящихся к ним последовательностей точек широкой траектории соответствующая последовательность (k, l) пар степеней f и f^{-1}, $k, l \in \mathbb{Z}^+$, ограничена по одному из параметров.

Широко рекуррентные точки, не являющиеся впоследствии рекуррентными точками, возникают, например, при накоплении нейтральных сечений.

Лемма 3.74. *Если* $\overline{O^\perp(x)}$ *для некоторого* $n > 0$ *содержит точки из* $f^{-n}(O^\perp(x))$, *то* x *— это* $\widehat{\omega}^\perp$*-рекуррентная траектория.*

Доказательство. Пусть в $\overline{O^\perp(x)}$ содержатся точки из $f^{-n}(O^\perp(x))$, $n > 0$. Следовательно, в произвольной окрестности некоторой точки из $f^{-n}(O^\perp(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^\perp(x)$. Согласно утверждению 2.35, отображения $f^{-k} \circ f^k$ переводят сходящуюся последовательность точек в одну или более сходящихся последовательностей. Поэтому в окрестности каждой точки из $O^\perp(f^{-n}(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^\perp(x)$.

Применяя f^n к окрестности $O^\perp(f^{-n}(x))$, получим, что в окрестности каждой точки из $O^\perp(x)$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^n(O^\perp(x))$, в окрестности каждой точки из $f^n(O^\perp(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^{2n}(O^\perp(x))$, и так далее. Отсюда и следует искомая $\widehat{\omega}^\perp$-рекуррентность. □

Полностью аналогично доказывается и следующее утверждение:

Лемма 3.75. *Если $\overline{O^{\perp}(x)}$ для некоторого $n > 0$ содержит точки из $f^n(O^{\perp}(x))$, $n > 0$, то x — $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентная траектория.*

Доказательство. Пусть в $\overline{O^{\perp}(x)}$ содержатся точки из $f^n(O^{\perp}(x))$, $n > 0$. Следовательно, в произвольной окрестности некоторой точки из $f^n(O^{\perp}(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^{\perp}(x)$. Согласно утверждению 2.35, отображения $f^{-k} \circ f^k$ переводят сходящуюся последовательность точек в одну или более сходящихся последовательностей. Поэтому в окрестности каждой точки из $O^{\perp}(f^n(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^{\perp}(x)$.

Применяя f^{-n} к окрестности $O^{\perp}(f^n(x))$, получим, что в окрестности каждой точки из $O^{\perp}(x)$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^{-n}(O^{\perp}(x))$, в окрестности каждой точки из $f^{-n}(O^{\perp}(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^{-2n}(O^{\perp}(x))$, и так далее. Отсюда и следует искомая $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентность. □

3.8. Примеры впоследствии рекуррентных и впоследствии периодических точек.

Пример 3.76. $\widehat{h}_k$ — *простая необратимая надстройка над гомеоморфизмом окружности h.*

Построение. Пусть $S^1 = \{z| \, \|z\| = 1\}$ — стандартная окружность, $h\colon S^1 \to S^1$ — ее гомеоморфизм, $\Theta_k = \{\varepsilon_{k^n}, n \geq 0\}$ — множество корней из единицы степени k^n, $n \geq 0$ с дискретной топологией.

Зададим на $S^1 \times \Theta_k$ отображение

$$\widehat{h}_k\colon (\varphi, \varepsilon_{k^n}) \mapsto (h(\varphi), \varepsilon_{k^n}^k).$$

По определению, $\varepsilon_{k^n}^{k^n} = 1$, поэтому любая окружность из $S^1 \times \Theta_k$ отображается на $S^1 \times \{1\}$ за конечное число итераций отображения $\widehat{h}_k$. Еще говорят, что динамика отображения $\widehat{h}_k$ со временем сосредотачивается на $S^1 \times \{1\}$.

Отсюда следует, что все классические инвариантные множества отображения $\widehat{h}_k$, такие, как множество периодических или рекуррентных точек, расположены на единственной окружности $S^1 \times \{1\}$.

Что же касается инвариантных множеств, введенных в данном разделе, то эти множества расположены на каждой окружности из $S^1 \times \Theta_k$.

Например, если гомеоморфизм h обладает периодическими точками, то их прообразы в $S^1 \times \Theta_k$ образуют множество впоследствии периодических точек, если гомеоморфизм h обладает α-рекуррентными точками, то их прообразы в $S^1 \times \Theta_k$ образуют множество впоследствии α-рекуррентных точек и т. д. $\square$

Пример 3.77. *Топологическая классификация внутренних отображений $\widehat{h}$ восьмерки специального вида, полученных как надстройка над гомеоморфизмом h окружности с неподвижной точкой.*

Построение. Пусть $X = S^1 \vee S^1$ — букет двух окружностей. На каждой окружности задана угловая координата $\varphi \in [0, 2\pi)$. На первой окружности задан некоторый гомеоморфизм $h\colon S^1 \to S^1$, у которого общая точка букета неподвижна. Вторая окружность накрывает букет с помощью следующего отображения. Отрезок $[0, \pi)$ второй окружности накрывает вторую окружность с помощью отображения 2φ в локальных координатах. Отрезок $[\pi, 2\pi)$ второй окружности накрывает первую окружность с помощью отображения $2\varphi - \pi$ в соответствующих локальных координатах.

По построению, любая точка второй окружности отображается на первую окружность за конечное число итераций, поэтому, как и в примере 3.76, динамика отображения $\widehat{h}$ со временем сосредотачивается на первой окружности.

Сужение отображения $\widehat{h}$ на первую окружность есть гомеоморфизм h. Согласно топологической классификации гомеоморфизмов окружности (см. раздел 7.2) гомеоморфизм окружности с неподвижной точкой с точностью до топологической сопряженности однозначно определяется своим множеством неподвижных точек и направлениями движения точек на дополнении к множеству неподвижных точек. Сопоставим каждой компоненте связности дополнения к множеству неподвижных точек знак '+' или '−' в зависимости от направления движения точек.

На второй окружности прообразы множества неподвижных точек образуют множество впоследствии неподвижных точек, дополнение к которому со временем отображается на дополнение к множеству неподвижных точек первой окружности. Это отображение индуцирует на каждой компоненте связности дополнения к множеству впоследствии неподвижных точек знак '+' или '−'.

Легко видеть, что для внутренних отображений указанного вида набор из множества неподвижных точек, множества впоследствии неподвижных точек и знаков дополнений к этим множествам является полным топологическим инвариантом. Любое другое отображение букета, у которого множество неподвижных и впоследствии неподвижных точек гомеоморфно исходному с сохранением знаков '+' и '−' на дополнениях будет топологически сопряжено исходному. □

3.9. Итоги главы.

В этом разделе были даны определения ряда новых специфических для внутренних отображений инвариантных множеств и доказаны некоторые их свойства. Возникает вопрос: зачем нужны эти определения? Какую цель преследует введение новых инвариантных множеств для внутренних отображений?

На этот вопрос легко ответить, если рассмотреть примеры. Уже для отображений букета из примера 3.77 полный топологический инвариант этого класса отображений включает в себя определенное в данном разделе множество впоследствии неподвижных точек. Основным результатом данной работы является построенная в главе 7 топологическая классификация накрытий окружности. Как будет показано, для описания топологических инвариантов этого достаточного простого класса внутренних отображений пришлось задействовать весь введенный в данной работе аппарат новых понятий, включая нейтрально рекуррентные точки, введенные в этом разделе, нейтрально блуждающие точки, которые будут введены в главе 4 и т.д. Таким образом, введенные в данной работе новые инвариантные множества для внутренних отображений возникают естественно, вследствие специфики изучаемой предметной области.

В данной работе ставятся и решаются задачи поиска топологических инвариантов и топологической классификации различных классов внутренних отображений. Однако методы построения многих топологически инвариантных множеств являются обобщением соответствующих методов, имеющих своим источником теорию динамических систем. Поэтому можно надеяться, что если динамические системы, образованные внутренними отображениями, будут возникать в каких-то приложениях, то построенная теория будет полезна и для них.

ГЛАВА 4

Предельные свойства инвариантных наборов окрестностей.

4.1. Введение.

В этом разделе строятся различные инвариантные множества, связанные с поведением окрестностей точек под действием итераций внутренних отображений и изучаются их свойства.

Как было показано в предыдущем разделе, по отношению к сходящимся последовательностям точек внутренние отображения выступают “единым фронтом”, где только бесконечнократные отображения имеют свою специфику. По отношению же к итерациям окрестностей, для разных классов внутренних отображений их свойства начинают значительно отличаться между собой.

В качестве эталона для свойств внутренних отображений выбраны динамические системы, образованные разветвленными накрытиями компактных замкнутых многообразий. Для свойств, которые имеют место для разветвленных накрытий компактных замкнутых многообразий, но не имеют места для произвольных внутренних отображений, будут найдены ограничения на произвольное внутреннее отображение, при которых это свойство для него выполняется.

Совокупность таких ограничений позволяет выделить подкласс “хороших” внутренних отображений, которые по своим динамическим свойствам будут подобны разветвленным накрытиям компактных замкнутых многообразий.

Возникает вопрос, почему бы сразу не изучать только внутренние отображения компактных замкнутых многообразий? Дело в том, что такое ограничение неоправданно сузит класс рассматриваемых отображений. В него тогда не попадут такие простые отображения, как e^z или $\sin z$, которые заданы на некомпактной поверхности, или инвариантные множества, которые во многих случаях не являются подмногообразиями или даже локально связными множествами, как инвариантные канторовы множества накрытий окружности из раздела 7, которые при этом являются представителями подкласса "хороших" внутренних отображений.

4.1.1. Самоподобие вдоль траектории у гомеоморфизмов. Важным свойством динамических систем, образованных гомеоморфизмами, является локальная однородность динамики вдоль траектории (см. рис. 4.1).

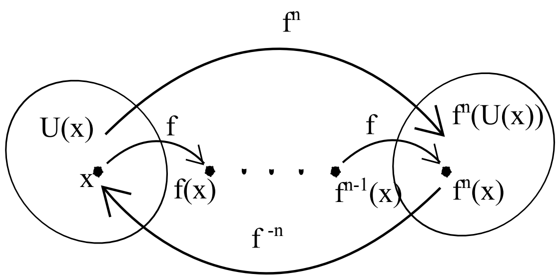

Рис. 4.1. Окрестности точек траектории гомеоморфизма эквивалентны.

Если изучить динамику отображения в окрестности одной точки x, т. е. установить принадлежность точек и задать разбиение этой окрестности на множества с различными динамическими свойствами, то это же разбиение гомеоморфно и инвариантно относительно разбиения на траектории переносится в окрестность любой другой точки траектории точки x с помощью степеней f и f^{-1}. Поэтому для изучения динамики в окрестности траектории достаточно изучить ее в окрестности одного ее представителя. Отсюда следует естественная инвариантность многих множеств точек с подобными динамическими свойствами, таких, как множества неблуждающих или предельных точек, и использование таких конструкций, как фундаментальные окрестности.

Для произвольных необратимых отображений ситуация в корне иная. Между двумя точками частной траектории отображение не обязано быть гомеоморфизмом. Более того, если взять окрестность точки, то полученное в образе множество не обязано быть окрестностью, и, как показывает пример отображения $x^2 + y^2$, сворачивающего окрестность точки $(0, 0)$ в блинчик, не обязано содержать никакую окрестность образа точки. В прообразе окресности будет открытое множество, но при этом связность может не сохраняться, а в прообразе любой точки может быть произвольно дикое замкнутое множество. Поэтому у произвольных необратимых отображений отображение в каждой окрестности, вообще говоря, является уникальным.

Тем не менее, даже для произвольных необратимых отображений множество точек локального гомеоморфизма достаточно большое. А если предположить, что необратимое отображение f всюду является локальным гомеоморфизмом, то у таких отображений исчезают трудности, описанные выше для случая произвольных необратимых отображений.

4.1.2. Самоподобие вдоль широкой траектории для локальных гомеоморфизмов. Пусть f — локальный гомеоморфизм. Тогда имеет место следующее утверждение.

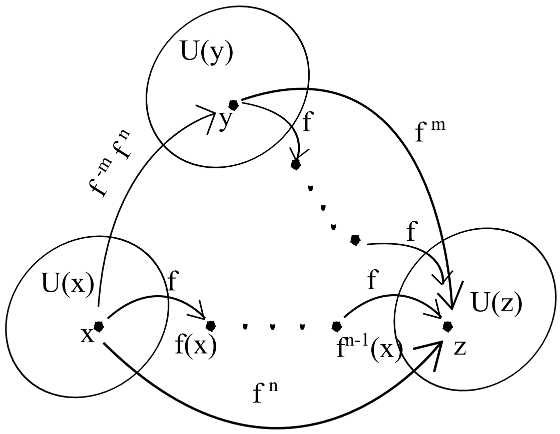

Рис. 4.2. Малые окрестности точек широкой траектории локального гомеоморфизма гомеоморфны.

Лемма 4.1. *Пусть широкая траектория $O_f(p)$ точки p не содержит особых точек f. Тогда для любых двух точек $x, y \in O_f(p)$ найдутся окрестности $U(x)$ и $U(y)$ и гомеоморфизм f' одной окрестности на другую, который выражается через композицию степеней отображения f и отдельных ветвей отображения f^{-1}.*

Доказательство. Рассмотрим точки x и y, принадлежащие одной широкой траектории $O_f(p)$ (см. рис. 4.2).

Так как точки x и y, принадлежат одной широкой траектории, то найдутся числа $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ и точка z такие, что $f^n(x) = f^m(y) = z$. Так как f является локальным гомеоморфизмом в окрестности $O_f(p)$, то у точек x и y найдутся окрестности $U_1(x)$ и $U_1(y)$, такие, что f^n и f^m являются гомеоморфизмами в сужении на $U_1(x)$ и в сужении на $U_1(y)$. Пусть $U(z) = f^n(U_1(x)) \cap f^m(U_1(y))$, $U(x) = U_1(x) \cap f^{-n}(U(z))$, $U(y) = U_1(y) \cap f^{-m}(U(z))$. Тогда $f^{-m} \circ f^n$ — гомеоморфизм между $U(x)$ и $U(y)$. при чем сохраняющий разбиение на широкие траектории, поскольку выражается через композицию степеней отображения f и отдельных ветвей отображения f^{-1}. $\square$

Поэтому у локальных гомеоморфизмов локальная динамика вдоль траектории также является самоподобной. При этом, в отличие от гомеоморфизмов, самоподобие динамики отображения возникает в окрестности широкой траектории, которую можно рассматривать как двупараметрическое множество. Не удивительно, что при описании динамики внутренних отображений естественно возникают различные фрактальные структуры.

Отличие от гомеоморфизмов состоит и в том, что для гомеоморфизмов понятия частной траектории и траектории совпадают, в то время как для необратимых локальных гомеоморфизмов эти понятия различны. В результате отображения из леммы 4.1 сохраняют инвариантные множества, определенные в терминах широкой траектории, такие, как множества впоследствии периодических или нейтрально рекуррентных точек, но могут не сохранять инвариантные множества, определенные в терминах частной траектории. Например, отображения из леммы 4.1 могут отобразить периодическую точку в впоследствии периодическую.

Заметим, что в лемме 4.1 размер окрестностей $U_1(y_1)$ и $U_2(y_2)$, между которыми устанавливается гомеоморфизм, вообще говоря, зависит от выбора точек y_1, y_2. Например, рассмотрим комплексный полином $z^2 : S^2 \to S^2$ и итерации окрестности отрезка $[-\alpha, \alpha] \times R$, заданного в полярных координатах. Итерации z^2 растягивают отрезок как $[-2^n\alpha, 2^n\alpha] \times R^{2n}$, поэтому, каким бы малым не было бы число α, со временем $2^n\alpha$ станет больше π и сужение z^2 на окрестность растянутого отрезка уже не будет гомеоморфизмом. Поэтому, чем больше итераций отображения между точками широкой траектории, тем меньшую нужно брать окрестность, чтобы отобразить ее гомеоморфизмом.

В то же время существуют, и далее соответствующие примеры будут построены, системы, для которых у точки существует окрестность, такая, что ее можно сколь угодно далеко гомеоморфно отобразить вдоль широкой траектории.[1] Это означает, что у внутренних отображений динамика окрестностей порождает свои специфические инварианты.

Внутренние отображения являются более общим, чем локальные гомеоморфизмы, классом отображений, у которых множество критических точек не пусто. Поэтому локальные гомеоморфизмы в окрестностях точек широкой траектории существуют не везде, а только для регулярных точек.

Однако для внутренних отображений и свойства широких траекторий те же, что и у локальных гомеоморфизмов, и, что важно, сохраняются окрестности: образом открытой связной окрестности снова будет открытая связная окрестность, а прообраз достаточно малой открытой связной окрестности, как будет показано далее, естественным образом распадается на открытые связные окрестности, каждая из которых соответствует своему прообразу.

[1] К примеру, супербluждающие точки, см. определение 4.74.

Это позволит далее единообразно формулировать определения различных блуждающих и неблуждающих множеств, не делая различий между широкими траекториями, целиком состоящими из точек, в которых отображение является локальным гомеоморфизмом, и широкими траекториями, содержащими особые точки.

4.2. Разложение прообраза окрестности по ветвям внутреннего отображения.

Рассмотрим в качестве канонического представителя внутренних отображений разветвленное накрытие двумерной компактной поверхности. Если у регулярной точки этого разветвленного накрытия взять достаточно малую ε-окрестность (связное множество), то прообраз этой окрестности относительно разветвленного накрытия распадается на компоненты связности, число которых равно кратности разветвленного накрытия. При этом сужение этого разветвленного накрытия на каждую из компонент связности прообраза представляет собой гомеоморфизм соответствующей компоненты связности прообраза на саму окрестность.

Такое локальное разложение отображения на гомеоморфизмы по ветвям разветвленного накрытия полезно тем, что позволяет локально сводить динамику сложного необратимого отображения к хорошо изученной динамике гомеоморфизмов.

Хотелось бы распространить понятие локального разложения отображения на гомеоморфизмы на произвольные внутренние отображения.

4.2.1. Разложение прообраза окрестности на гомеоморфизмы.

Определение 4.2. *Пусть $f : M \to M$ — внутренний эпиморфизм, $U(x)$ – открытое множество, содержащее*

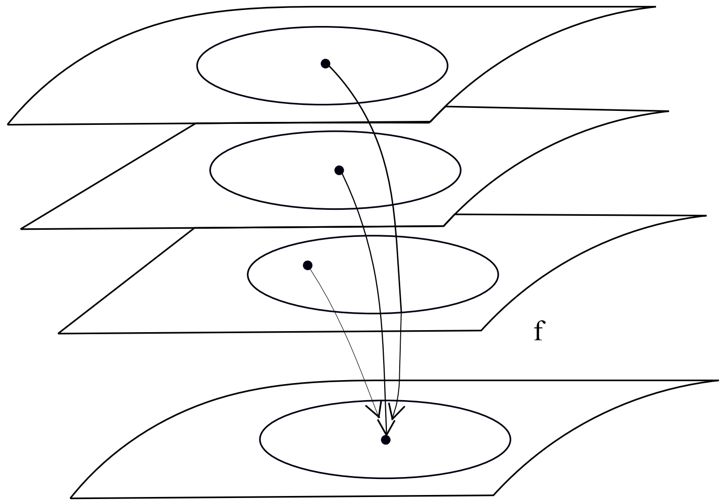

Рис. 4.3. Ветви внутреннего отображения.

точку x. Набор открытых множеств V_i назовем разложением прообраза $U(x)$ на гомеоморфизмы, если

(1) $\cup_i V_i = f^{-1}(U(x))$;
(2) *каждое множество V_i содержит в точности один прообраз точки x;*
(3) *сужение f на каждое множество V_i является гомеоморфизмом V_i на ее образ $f(V_i) \subset U(x)$.*

Гомеоморфизмы, являющиеся сужениями внутреннего отображения f на соответствующие окрестности $W_i(y)$, будем называть ветвями отображения f^{-1} в окрестности $U(x)$.

Если $f : M \to M$ — внутренний эпиморфизм, а x не является образом особой точки f, то f всегда допускает разложение прообраза на гомеоморфизмы в окрестности

$U(x)$, в качестве которой можно взять объединение образов окрестностей локальной гомеоморфности точек прообраза. Если M — локально связное топологическое пространство, то V_i, а следовательно, и $U(x)$, можно выбрать связными.

Замечание 4.3. *Поскольку внутренний эпиморфизм является изолированным, то в разложении прообраза на гомеоморфизмы окрестность $U(x)$ и множества V_i можно выбрать так, что они не пересекаются между собой.*

Лемма 4.4. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм, а точка x не является точкой изменения числа прообразов[2]. Тогда для точки x найдется окрестность $U(x)$ и разложение V_i прообраза $U(x)$ на гомеоморфизмы, такие, что $\forall V_i$: $f(V_i) = U(x)$.*

Доказательство. Поскольку x не является образом особой точки f, $f^{-1}(x)$ состоит из конечного числа точек, в каждой из которых f является локальным гомеоморфизмом. У каждой точки $y_i \in f^{-1}(x)$ обозначим через $W_i(y)$ окрестность, в сужении на которую f является гомеоморфизмом. Положим $U'(x) = \cap_i f\left(W_i\left(y\right)\right)$. Положим $W_i'(y) = W_i(y) \cap f^{-1}(U'(x))$.

Рассмотрим множество $\Delta = f^{-1}(U'(x)) \setminus \cup_{y \in f^{-1}(x)} W_i'(y)$. По построению, $f(\Delta)$ не содержит точку x. Более того, $\overline{f(\Delta)}$ тоже не содержит точку x, поскольку иначе x — точка изменения числа прообразов.

Положим $U''(x) = U''(x) \setminus \overline{f(\Delta)}$. Положим $W_i''(y) = W_i'(y) \cap f^{-1}(U''(x))$. По построению,

$$f^{-1}(U''(x)) \setminus \cup_{y \in f^{-1}(x)} W_i''(y) = \varnothing.$$

Легко видеть, что так определенная $U''(x)$ является искомой окрестностью. $\square$

[2]Определение 2.39. (в частности, x не является образом особой точки f)

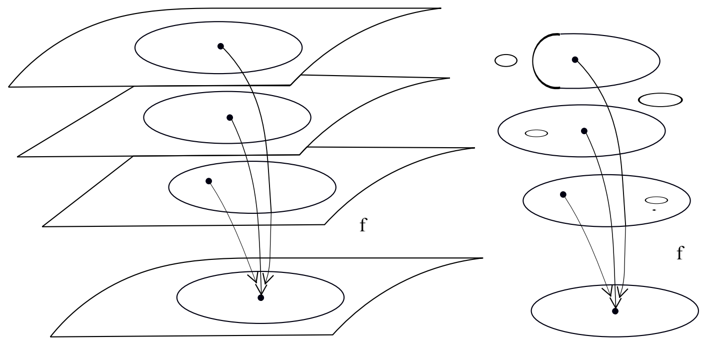

Рис. 4.4. Прообраз накрытия и прообраз в общем случае.

Таким образом, для конечнократных локальных гомеоморфизмов единственным препятствием для существования разложения прообраза на гомеоморфизмы являются регулярные точки изменения числа прообразов.

Для накрытий многообразий для каждой точки x многообразия прообраз ее окрестности состоит из окрестностей ее прообразов (см. рис. 4.4). В более общем случае прообраз может цеплять какие-то другие окрестности, не содержащие прообразов точки x, однако, если точка x не является точкой изменения числа прообразов, от этих лишних компонент прообраза можно избавиться, просто сузив окрестность.

Для бесконечнократных внутренних отображений лемма 4.4, вообще говоря, уже не верна, даже если точка x не является точкой изменения числа прообразов. Рассмотрим на примерах, из-за чего утверждение леммы 4.4 может нарушаться.

Определим это утверждение как условие, налагаемое на отображение. Пусть прообраз точки x состоит из точек локального гомеоморфизма отображения f.

Определение 4.5. *Скажем, что окрестность $U(x)$ точки x допускает локальное гомеоморфное поднятие в каждый прообраз точки x, если найдется разложение V_i прообраза $U(x)$ на гомеоморфизмы, такие, что $\forall V_i$: $f(V_i) = U(x)$.*

Назовем отображение f **обратно локальным гомеоморфизмом в точке** x, если найдется окрестность $U(x)$ точки x, которая допускает локальное гомеоморфное поднятие в каждый прообраз точки x.

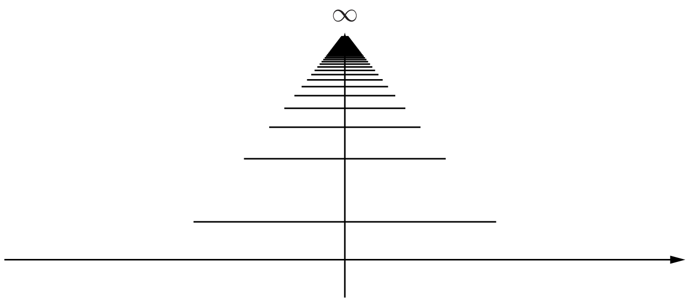

Рис. 4.5. К примеру 4.6

Пример 4.6. *Пример локального гомеоморфизма, не являющегося обратно локальным гомеоморфизмом.*

Построение. Пусть множество A задано на плоскости как объединение оси $y = 0$ и набора отрезков $\{(x, y)|x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), y = n\}$, $n > 0$ (Рис. 4.5). Возьмем счетное число множеств A, например, разместив их в $\mathbb{R}^3$, используя целые положительные значения координаты z ($z \in \mathbb{Z}^+$). Зададим отображение f как проекцию A на ось $y = 0$ при $z = 0$ и как сдвиг $z \mapsto z - 1$ при $z > 0$. Легко видеть, что f в точке $(0, 0, 0)$ не является обратно локальным гомеоморфизмом. $\square$

Пример 4.6 является достаточно наглядным, однако в этом примере множество А несвязно, что наталкивает на неправильное предположение, будто для связного пространства условие должно выполняться. Однако это не так, как показывает следующий пример.

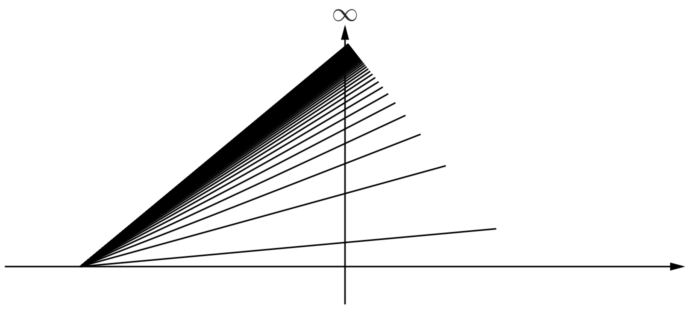

Рис. 4.6. К примеру 4.7

Пример 4.7. *Пример локального гомеоморфизма, не являющегося обратно локальным гомеоморфизмом. заданного на линейно связном множестве.*

Построение. Пусть множество C задано на плоскости как объединение оси $y = 0$ и набора отрезков AB_k, где точка A имеет координаты $(-1, 0)$, а точки B_k — $(\frac{1}{k}, k)$, $k > 0$ (Рис. 4.5). Возьмем счетное число экземпляров множества C с индуцированной с $\mathbb{R}^2$ топологией, пронумеровав их целыми $n \geq 0$. назовем их $C_0 \ldots C_n \ldots$. Зададим отображение f как проекцию C_0 на ось $y = 0$ при $n = 0$ и как тождественный относительно C сдвиг $C_n \mapsto C_{n-1}$ при $n > 0$.

Легко видеть, что f в точке $(0, 0)$ множества C_0 не является обратно локальным гомеоморфизмом. Однако множество $\cup_i C_i$ несвязно. Отождествим в каждом C_i точку A.

Полученное фактор-множество $\widetilde{C}$ линейно связно, и f индуцирует на $\widetilde{C}$ отображение $\widetilde{f}$, которое и дает искомый пример. □

4.2.2. Разложение прообраза окрестности образа особых точек.

Утверждение 4.1 позволяет сводить локальную динамику внутреннего отображения к гомеоморфизмам. Однако оно описывает только широкие траектории, не содержащие особых точек. В то же время никуда не деться от того факта, что внутренние отображения могут иметь особые точки. Поэтому на практике удобно иметь локальное представление динамики отображения в окрестности широкой траектории и в случае широкой траектории, содержащей особые точки.

При этом, на самом деле, без локальной гомеоморфности можно обойтись. Суть локального представления динамики отображения в окрестности широкой траектории заключается в том, что для каждой точки y широкой траектории точки x можно найти окрестность $U(x)$ точки x и по ней построить окрестность $U'(y)$ точки y, такую, что окрестность $U'(y)$ не содержит других точек широкой траектории точки x, а сужение f на $U'(y)$ обладает дополнительными свойствами.

К примеру, рассмотрим классическое определение блуждающей точки (см. определения 4.38, 4.41 и 4.42): Точка $x \in M$ называется блуждающей точкой f, если у нее найдется окрестность $U(x)$ такая, что $U(x)$ не пересекается с ее образом и прообразом любой степени. Это определение корректно определено для любого необратимого отображения. При этом от отображений f^n и f^{-n} не требуется, чтобы они были гомеоморфизмами в сужении на $U(x)$, а образы и прообразы $U(x)$ могут быть “плохими” множествами.

Классическое определение блуждающей точки дано в терминах частной траектории, а не широкой траектории, и не позволяет связывать с разными точками широкой траектории разные окрестности. Для внутренних отображений, если выбрать окрестность $U(x)$ точки x, то ее перенос к точкам передней полутраектории $O^+(x)$ с помощью отображений f^n не вызывает проблем. Проблемы возникают для остальных точек широкой траектории, поскольку отображения f^{-n} многозначные.

Чтобы избегать прямой работы с ветвями многозначных отображений f^{-n}, нужны простые механизмы связывания части прообраза окрестности $U(x)$ с каждым прообразом точки x.

В случае леммы 4.4 для решения этой проблемы использовалось то, что если окрестность $U(x)$ достаточно мала, то ее прообраз можно покрыть окрестностями, на которых отображение является локальным гомеоморфизмом, так, что полученное покрытие является искомым разложением.

Однако это не единственный механизм, позволяющий избегать прямой работы с ветвями многозначных отображений. Среди альтернативных механизмов — разбиение прообраза на компоненты связности. Если X — локально связное топологическое пространство, а f — конечнократное отображение, то для достаточно малой окрестности $U(x)$ ее прообраз относительно f^n распадется на компоненты связности, такие, что каждая компонента связности содержит ровно одну точку из $f^{-n}(x)$, и если эта точка неособая, то сужение f^n на эту компоненту связности является гомеоморфизмом.

В случае, когда f — бесконечнократное отображение, то, как и в случае, когда f — локальный гомеоморфизм (лемма 4.4), мы не можем гарантировать существование такого разложения в целом, но можем отделить любые две точки из прообраза.

Первый механизм годится для любых пространств, но требует специальных внутренних отображений — локальных гомеоморфизмов. Второй механизм подходит для любых внутренних отображений, но работает только на локально связных топологических пространствах. Можно задействовать и другие альтернативные механизмы, например, разложение на метрически близкие компоненты.

Как правило, далее в конкретных примерах будет использоваться разложение прообраза окрестности на компоненты связности. Но, поскольку использование конкретных механизмов разложения прообраза на окрестности точек широкой траектории может накладывать ограничения на пространство и отображение, будем избегать явного их указания.

Вместо этого дадим абстрактное определение разложения прообраза на окрестности точек широкой траектории, описывающее результат, который мы хотим получить тем или иным способом.

Определение 4.8. *Открытое множество $U'(y)$ точки y, $y \in f^{-n}(x)$ назовем локальным прообразом окрестности $U(x)$ точки x, если*

(1) $f^n(U'(y)) = U(x)$;
(2) *$U'(y)$ не содержит других точек из широкой траектории $O(x)$, кроме y;*
(3) *$U'(y)$ связно, если $U(x)$ связно;*
(4) *$f^n|_{U'(y)}$ является гомеоморфизмом на $U(x)$, если y — неособая точка.*

Лемма 4.9. *Пусть f — произвольное внутреннее отображение. Тогда для любой пары точек x, y, таких, что $f^n(y) = x$, найдутся множества $U'(y)$ и $U(x)$ такие,* *что $U'(y)$ является локальным прообразом окрестности $U(x)$.*

Доказательство. Поскольку f — дискретно, найдется окрестность точки y $U_1(y)$, не содержащая других точек из $O(x)$. Если y — неособая точка, то сузим $U_1(y)$, взяв пересечение $U_1(y)$ с окрестностью, в которой f является гомеоморфизмом на $U(x)$. Если максимальная связная компонента y $C(y)$ имеет непустую внутренность, о дополнительно возьмем пересечение с этой внутренностью $U_2(y) = \operatorname{Int} C(y) \cap U_1(y)$, затем возьмем связную компоненту множества $f^{-n} \circ f^n(U_2(y)$, содержащую точку y. Полученную окрестность обозначим через $U'(y)$.

Пусть $U(x) = f^n(U'(y))$. По построению, $U'(y)$ и $U(x)$ являются искомыми окрестностями. $\square$

Лемма 4.10. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм, Тогда для точки x найдется окрестность $U(x)$ и разложение V_i множества $f^{-1}(U(x))$ на локальные прообразы $U(x)$ в смысле определения 4.8.*

Доказательство. $f^{-1}(x)$ состоит из конечного числа точек y_i, в каждой из которых согласно лемме 4.9 найдутся множества $U'(y_i)$ и $U_i(x)$ такие, что $U'(y_i)$ является локальным прообразом окрестности $U_i(x)$. Положим $U(x) = \cap_i f\left(U_i\left(y_i\right)\right)$. Легко видеть, что так определенная $U(x)$ является искомой окрестностью. $\square$

Заметим, что лемма 4.9 гарантирует существование локальных прообразов окрестности, но не конструктивна в плане их построения. В реальных примерах нам и далее понадобятся конструктивные способы построения локальных прообразов окрестности, такие, как разложение на компоненты связности или пересечение с конечным или локально конечным покрытием окрестностями локальной гомеоморфности отображения.

Определение 4.8 покрывает лишь случай, когда одна из точек является прообразом другой. Применив его и лемму 4.9 к произвольным точкам широкой траектории, получим обобщение леммы 4.1 на особые точки.

Следствие 4.11. *для каждых двух точек y_1, y_2 широкой траектории точки x можно найти точку $z \in O(x)$ и ее окрестность $U(z)$ и по ней построить окрестности $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ точек y_1 и y_2, такие, что окрестности $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ не содержит других точек широкой траектории точки x, и сужения соответствующих степеней отображения f на окрестности $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ являются сюръективными внутренними отображениями $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ соответственно на $U(z)$.*

Определение 4.12. *Окрестность $U'(y_2)$ в утверждении 4.11 будем называть* ***локальным образом*** *окрестности $U'(y_1)$ в точке y_2.*

Заметим, что хотя соответствие между окрестностями $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ имеет вид пары внутренних отображений на третью окрестность, из соображений размерности в типичном случае широкая траектория внутреннего отображения пересекается с множеством особых точек не более чем в одной точке, т.е. почти все такие соответствия — гомеоморфизмы. Если же y_1, y_2 — особые точки, то, если локальное строение множества особых точек B_f в окрестностях $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ известно, можно, воспользовавшись многомерным аналогом леммы о простой дуге, построить в окрестностях $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ перегородки, отображающиеся на общий образ в $U(z)$, такие, что вне этих перегородок отображения являются локальными гомеоморфизмами. Получение при этом соответствий между точками окрестностей $U'(y_1)$ и $U'(y_2)$ будет, хоть и более сложной, чем в случае гомеоморфизма, но вполне обозримой задачей.

4.2.3. Особенности разложения прообраза на локальные образы для бесконечнократных отображений.

Для бесконечнократных внутренних отображений лемма 4.10, как и лемма 4.4 в случае локальных гомеоморфизмов, вообще говоря, уже не верна. Тем не менее, возможность раскладывать прообраз заданной окрестности на локальные прообразы исключительно удобна при анализе динамики отображения.

Определим утверждение леммы 4.10 как свойство отображения.

Определение 4.13. *Скажем, что окрестность $U(x)$ точки x допускает* ***локальное поднятие*** *в каждый прообраз точки x, если найдется набор локальных прообразов $V(y)$, $y \in f^{-1}(x)$, окрестности $U(x)$ в смысле определения 4.8, такое, что $f^{-1}(U(x)) = \cup_{y \in f^{-1}(x)} V(y)$,*

Определение 4.14. *Назовем отображение f* ***обратно локальным эпиморфизмом****, если у него в каждой точке найдется окрестность, допускающая локальное поднятие в каждый свой прообраз.*

Из определения обратно локального эпиморфизма следует, что у любой точки число ее прообразов не превышает числа прообразов для точек из ее окрестности, допускающей локальное поднятие в каждый свой прообраз.

Следствие 4.15. *Если f — обратно локальный внутренний эпиморфизм, то $\Xi_f = f(B_f)$.*

Так как в локально связном случае локальный прообраз — компонента связности, а компоненты связности не пересекаются между собой, дополнительно потребуем, чтобы локальные прообразы не пересекались между собой и в общем случае.

Определение 4.16. *Скажем, что для окрестности $U(x)$ точки x ее прообраз допускает* ***разложение на локальные прообразы****, если найдется набор локальных прообразов $V(y)$, $y \in f^{-1}(x)$, окрестности $U(x)$ в смысле определения 4.8, дающих разложение прообраза $U(x)$ такое, что $f^{-1}(U(x)) = \cup_{y\in f^{-1}(x)}V(y)$, и таких, что $V(y_1) \cap V(y_2) = \varnothing$, $y_1 \neq y_2$.*

$U(x)$ будем называть **окрестностью, разложимой на локальные прообразы относительно f в точке x.**

Заметим, что если для окрестности $U(x)$ точки x ее прообраз допускает разложение на локальные прообразы, то отсюда следует, что окрестность $U(x)$ допускает **локальное поднятие** в каждый прообраз точки x, но не наоборот.

Для примера рассмотрим накрытие вложенной в комплексную плоскость единичной окружности полиномом

$$z^8 \colon S^1 \to S^1.$$

Прообраз окрестности $(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$ точки $\varphi = 0$ в угловых координатах представляет собой всю окружность, поэтому разложения на непересекающиеся локальные прообразы не существует, но, как показано в примере 4.72 (см. рис. 4.8), локальное поднятие в каждый прообраз точки $\varphi = 0$ существует.

Определение 4.17. *Назовем*[3] *отображение f* ***разложимым на локальные прообразы в точке*** *x, если*

[3] В работе автора [**10**] эти понятия были первоначально определены в случае, когда пространство локально связно, и названы соответственно полным локальным эпиморфизмом и вполне дискретным отображением в $U(x)$. Предложенные здесь новые названия “локальное поднятие” и “разложения на непересекающиеся локальные прообразы” (также “обратно дискретное отображение”) выглядят более соответствующими их свойствам.

найдется окрестность $U(x)$ точки x, которая допускает разложение на локальные прообразы.

Отметим несколько тривиальных следствий этого определения.

Следствие 4.18. *Если f является разложимым на локальные прообразы в точке x, то f является разложимым на локальные прообразы и во всей окрестности разложимости на локальные прообразы относительно f в точке x.*

Следствие 4.19. *Если отображение f является разложимым на локальные прообразы в точке x с окрестностью $U(x)$, то каждая подокрестность $U'(x) \subset U(x)$ точки x тоже допускает разложение на локальные прообразы.*

Определение 4.20. *Назовем отображение f **разложимым на локальные прообразы**, если оно является разложимым на локальные прообразы в каждой точке.*

Отметим, что "разложимость на локальные прообразы" — достаточно громоздкое и описательное определение. Поскольку терминология для данной тематики еще не разработана, дадим для этого термина еще пару синонимов, возможно, какой-то из них окажется более удобным.

Определение 4.21. *Разложимое на локальные прообразы отображение f назовем **обратно дискретным**.*

Определение 4.22. *Утверждение определения 4.20 назовем*[4] *аксиомой P1 отделимости прообразами.*

Проблема 4.23. *Построить пример обратно локального эпиморфизма, не являющегося обратно дискретным.*

[4] Название было ранее введено в работе автора [**10**] в случае, когда пространство локально связно.

Лемма 4.24. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный обратно локальный внутренний эпиморфизм. Тогда f — разложимо на локальные прообразы (обратно дискретно).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x. Согласно лемме 4.10, для конечнократного внутреннего эпиморфизма найдется окрестность $U(x)$ точки x, которая допускает локальное поднятие в каждый прообраз точки x. Поэтому найдется набор локальных прообразов $V(y)$, $y \in f^{-1}(x)$, таких, что $f^{-1}(U(x)) = \cup_{y \in f^{-1}(x)} V(y)$.

Пусть $U'(x) \subset U(x)$ — окрестность точки x такая, что $\overline{U'(x)} \subset U(x)$. Положим $V'(y) = V(y) \cap f^{-1}(U'(x))$. Тогда набор $V'(y)$, $y \in f^{-1}(x)$ — набор локальных прообразов $U'(x)$. Положим $V''(y) = V'(y) \setminus \left(\cup_{y_i \neq y} \overline{V'(y_i)}\right)$.

Поскольку f — конечнократно, $\cup_{y_i \neq y} \overline{V'(y_i)}$ — замкнутое множество. Это замкнутое множество не содержит точку y, так как большее множество $\cup_{y_i \neq y} V(y_i)$ не содержит точку y по определению локального прообраза. Поэтому $V''(y)$ — открытая окрестность точки y. Все множества $V''(y)$ по построению не пересекаются друг с другом. Положим $U'''(x) = \cap_{y \in f^{-1}(x)} f(V''(y))$, $V'''(y) = V''(y) \cap f^{-1}(U'''(x))$. По построению, для окрестности $U'''(x)$ точки x ее прообраз допускает разложение на локальные прообразы $V'''(y)$.

Утверждение леммы следует из произвольности выбора точки x. $\square$

Как следует из лемм 4.4 и 4.24, конечнократные внутренние эпиморфизмы являются разложимыми на локальные прообразы (обратно дискретными) в образах регулярных точек, не являющихся точками изменения числа прообразов.

В особых точках прообраза для разложимости достаточно, чтобы соответствующая часть прообраза выделялась в отдельную компоненту.

Поскольку понятие разложения на локальные прообразы зависит от используемого определения компоненты прообраза, существование разложения на локальные прообразы необходимо исследовать отдельно для каждого варианта определения компоненты прообраза. Это автоматически так для отображений локально связных пространств. Как следствие, внутренние отображения связных компактных многообразий являются обратно дискретными.

Как и в случае полных локальных гомеоморфизмов, примеры 4.6 и 4.7 дают примеры отображений, которые не являются разложимыми на локальные прообразы.

Однако для общих внутренних отображений даже на локально связных пространствах существуют и другие механизмы, из-за которых отображение может не быть разложимым на локальные прообразы. Рассмотрим дальнейшие примеры.

4.2.4. Отделимость в прообразе. Еще одной неприятностью, которая возникает в случае бесконечнократных отображений, даже внутренних по Трохимчуку, является обеднение топологии, индуцированной на прообразе при помощи f^{-1}, по сравнению с уже имеющейся.

Это приводит к тому, что в некоторых случаях отделимые замкнутые множества невозможно отделить, используя только прообразы открытых окрестностей.

Определение 4.25. *Скажем, что прообраз точки x отделим от множества V, если $\forall y_i \in f^{-1}(x)$ $\exists$ открытая окрестность $Y(y_i)$: $Y(y_i) \cap V = \varnothing$.*

Определение 4.26. *Скажем, что прообраз точки x отделим прообразами от множества V, если $\exists U(x)$ — открытая окрестность точки x, такая, что $f^{-1}(U(x)) \cap V = \varnothing$.*

Для конечнократного отображения, если прообраз точки отделим от множества V, то он отделим и прообразами — в качестве отделяющей окрестности $U(x)$ можно взять множество $\cap_i f(Y(y_i))$. Для бесконечнократных внутренних отображений это уже не так.

Для примера достаточно рассмотреть проекцию прямой на окружность $x \mapsto x \bmod 1$. Прообраз точки 0 не отделим от семейства окрестностей $\{[n+\frac{1}{|n|}, n+\frac{1}{2}]\|n \in \mathbb{Z}\}$.

4.2.5. Прообразы, асимптотические множеству особых точек B_f.

Для бесконечнократных отображений может случиться так, что прообраз некоторой точки x состоит из регулярных точек, но не отделим прообразами от множества особых точек B_f. Согласно определению 4.13, если окрестность $U(x)$ точки x допускает **локальное поднятие** в каждый регулярный прообраз точки x, то соответствующее отображение должно быть локальным гомеоморфизмом. Но, поскольку прообраз точки не отделим прообразами от множества особых точек, то какую бы малую окрестность точки x не выбрать, в ее прообразе будет особая точка и локального гомеоморфизма не существует.

Следствие 4.27. *В точках, не отделимых прообразами от множества особых точек B_f, внутреннее отображение не является обратно локальным эпиморфизмом, тем более не является обратно дискретным.*

Замечание 4.28. *Из соображений трансверсальности у типичного внутреннего отображения нет точек, не отделимых прообразами от множества особых точек B_f.*

Более общий случай, когда множество точек широкой траектории не обязательно принадлежит одному прообразу может иметь место и для конечнократных внутренних отображений. Этот случай понадобится впоследствии, поэтому дадим ему формальное определение.

Определение 4.29. *Скажем, что бесконечное подмножество a_i регулярных точек широкой траектории не отделимо локальными поднятиями от множества особых точек B_f, если для любой точки $p \in (a_i)$ и любой окрестности $U(p)$ найдется точка $q \in (a_i)$ такая, что локальное поднятие окрестности $U(p)$ в точку q имеет непустое пересечение с B_f.*

Заметим, что из этого определения следует, что B_f должно быть бесконечным. Поэтому у внутренних отображений одно- и двумерных компактных многообразий все точки отделимы локальными поднятиями от множества особых точек B_f,

Упражнение 4.30. *Построить пример внутреннего отображения трехмерной сферы, у которого найдется широкая траектория, не отделимая локальными поднятиями от множества особых точек B_f.*

4.2.6. Отделимость прообразами от точки.

Следующее определение выглядит, как аналог аксиомы отделимости Хаусдорфа.

Определение 4.31. *Скажем, что точка x отделима от точки $z \notin f^{-1}(x)$ окрестностями через прообраз, если $\exists U(x)$, $\exists V(z)$ — открытые окрестности точек x и z, такие, что $f^{-1}(U(x)) \cap V(z) = \varnothing$.*

Это также достаточно громоздкое и описательное определение, и поскольку терминология для данной тематики еще не разработана, определим более короткий синоним.

Определение 4.32. *Утверждение определения 4.31 назовем*[5] *аксиомой P2 отделимости прообразами.*

Эту аксиому можно рассматривать как дополняющую к аксиоме P1 в точке x, которая охватывает оставшиеся точки $z \in f^{-1}(x)$.

Внутренние отображения могут и не удовлетворять аксиоме P2.

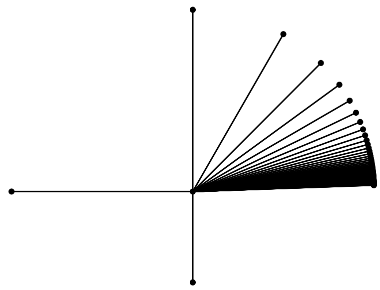

Рис. 4.7. Простое звено. К примеру 4.33.

Пример 4.33. *Разложимый на локальные прообразы внутренний эпиморфизм с супернеблуждающими*[6] *(в том числе нарушающими аксиому P2) точками.*

Построение. Построим пространство X в виде дерева из отрезков $[0,1]$, склеивая их в граничных точках. В качестве строительного элемента возьмем звено, изображенное на рис. 4.7. Это звено состоит из “ствола” внизу и счетного множества “ветвей” вверху. Локальные координаты на каждом отрезке направлены снизу вверх. Ветви занумерованы числами $n \in \mathbb{N}$, у каждой ветви точка 0 отождествлена с точкой 1 “ствола”. На каждой ветви с номером n

[5]Название было ранее введено в работе автора [**10**] в случае, когда пространство локально связно.

[6]Определение 4.34.

зададим отображение f на ствол:

$$f = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(n\operatorname{tg}(\frac{\pi * x}{2})), & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Склеим счетное число таких звеньев в пространство X. Для этого, во-первых, нарастим ветви. С этой целью каждую ветвь рассмотрим как “ствол” и опять приклеим к ней счетное количество “ветвей”, получив на каждой ветви звено второго уровня. Во-вторых, нарастим ствол, взяв еще одно звено и отождествив ствол с первой ветвью второго звена. Повторяем этот процесс бесконечно.

После построения мы получим дерево X и отображение $f : X \to X$, которое будет определено уже всюду на X.

В полученном отображении все точки склейки супернеблуждающие. □

Как видно на примере 4.33, супернеблуждающие точки могут существовать даже и у разложимых на локальные прообразы внутренних эпиморфизмов. При этом f должен быть бесконечнократным, и по лемме 2.26 X не может быть компактом.

4.3. Неблуждающие точки.

Как и в случае рекуррентных точек, эквивалентные в случае гомеоморфизмов определения неблуждающих точек порождают неэквивалентные определения для эпиморфизмов. В случае необратимых отображений движение с помощью $f^{-l} \circ f^k$ может происходить не только в “прошлое” и “будущее”, но и в “дополнительном измерении”.

Множества рекуррентных точек с различными свойствами, о которых шла речь в главе 3, описывают различные множества широких траекторий, у которых точки накапливаются к самой траектории. Неблуждающие множества, о которых будет идти речь далее, представляют собой второй важный класс топологических инвариантов отображений — множества широких и частных траекторий и полутраекторий, точки которых не отделимы друг от друга с помощью инвариантных наборов окрестностей.

Определим классы таких точек и опишем их базовые свойства.

4.3.1. Супернеблуждающие точки. Как и для рекуррентных точек, для неблуждающих точек при переходе от гомеоморфизмов к эпиморфизмам появляются свои патологические варианты поведения.

Определение 4.34. *Назовем точку x* ***супернеблуждающей степени*** *n, если найдется такая точка $z \in O(x)$, что*

(1) *либо $x \notin f^{-n}(z)$ и f^n в точке z нарушает аксиому P2 отделимости прообразами от точки x,*
(2) *либо $x \in f^{-n}(z)$, $z \neq x$ и f^n в точке z нарушает аксиому P1,*
(3) *либо $x = z$, $x \in f^{-n}(x)$ и f^n в точке x нарушает либо аксиому P1, либо аксиому P2.*

Определение 4.35. *Назовем точку x* ***конечно отделимой****, если она не являются супернеблуждающей никакой степени.*

Определение 4.36. *Назовем внутреннее отображение f* ***конечно отделимым****, если оно конечно отделимо во всех точках.*

Следствие 4.37. *Из определения супернеблуждающей точки следует, что если внутреннее отображение конечно отделимо, то для любой пары точек x, y одной широкой траектории найдется окрестность точки x $U(x)$, такая, что локальный образ $U(x)$ в точке y существует и не пересекается с $U(x)$.*

Конечная отделимость — третье важное свойство внутренних отображений, после открытости и дискретности, сближающее их с гомеоморфизмами.

Оно означает, что во всяком варианте определения неблуждающих точек необходимо брать бесконечное число (локальных) образов окрестности, чтобы нельзя было отделить от них точку, потому что, как и в случае гомеоморфизмов, в случае конечного числа (локальных) образов точка всегда отделима.

Поэтому наложим на f дополнительное условие конечной отделимости, и в дальнейшем всегда будем предполагать внутренние эпиморфизмы удовлетворяющими аксиомам P1 и P2, и, как следствие, конечно отделимыми, если не оговорено противное.

4.3.2. Классические определения множеств неблуждающих точек.

Рассмотрим для внутренних отображений классические определения множеств неблуждающих точек, повсеместно используемые в обратимой динамике, которые могут быть дословно перенесены в необратимую динамику.

Заметим, что во многих работах по необратимой динамике неблуждающие точки часто определяют как ω-неблуждающие точки в смысле определения 4.39, чтобы не рассматривать прообразы. Однако и дословный перенос определений с гомеоморфизмов вполне корректен, также встречается и будет использован далее.

Окрестностью точки будем называть открытое множество, содержащее эту точку.

Определение 4.38. *Точка $x \in M$ называется ω-**блуждающей** точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m > 0$.*

Определение 4.39. *Точка* $x \in M$ *называется* ω***-неблуждающей*** *точкой* f, *если для любой ее окрестности* U *найдется такое* $m > 0$, *что* $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$.

Определение 4.40. *Точка* $x \in M$ *называется* α***-неблуждающей*** *точкой* f, *если для любой ее окрестности* U *найдется число* $l > 0$, *такое, что* $f^{-l}(U) \cap U \neq \varnothing$

Определение 4.41. *Точка* $x \in M$ *называется* α***-блуждающей*** *точкой* f, *если найдется такая ее окрестность* U, *что* $f^{-l}(U) \cap U = \varnothing$ *для всех* $l > 0$.

Заметим, что эти определения являются взаимно дополнительными. Другими словами, если точка не является ω- (α-)блуждающей, то она является ω-(α-)неблуждающей и наоборот.

Определение 4.42. *Точка* $x \in M$ *называется* ***блуждающей*** *точкой* f, *если она одновременно* ω- *и* α- *блуждающая.*

Определение 4.43. *В противном случае точка* $x \in M$ *называется* ***неблуждающей*** *точкой* f.

Множества α-, и ω-неблуждающих точек f обозначим через $\Omega_-(f)$ и $\Omega_+(f)$. Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. $W(f)$ открыто в M, поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью. Точки, не являющиеся блуждающими в смысле определения 4.42, являются неблуждающими. Множество неблуждающих точек f обозначим $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

Имеет место следующее включение:

$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f)$.

4.3.3. Инвариантность классического множества неблуждающих точек.

Рассмотрим, как свойство быть блуждающей или неблуждающей точкой распространяется по ее траектории. В частности, узнаем, когда неблуждающее множество является инвариантным.

Лемма 4.44. *Пусть $f : M \to M$ — произвольный непрерывный эпиморфизм. Тогда если x является α-неблуждающей точкой, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из α-неблуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что $\exists n > 0$ такое, что $x_n = f^n(x)$ является α-блуждающей точкой. Тогда, по определению, найдется $U(x_n)$ — открытая окрестность точки x_n, такая, что $\forall k < 0$ $f^k(U) \cap U = \varnothing$.

Множество $f^{-n}(U(x_n))$ открыто, так как f непрерывно. Поскольку x — это α-неблуждающая точка, а $U'(x) = f^{-n}(U(x_n))$ — ее открытая окрестность, то по определению $\exists m > 0$, такое, что $f^{-m}(U'(x)) \cap U'(x) \neq \varnothing$. Множество $U'' = f^{-m}(U'(x))$ открыто, так как f непрерывно.

Но тогда $f^n(U'') \cap f^n(U') \neq \varnothing$. Заметим, что $f^n(U'')$ может и не быть открытым множеством. Однако, по построению $f^n(U') = U$. Имеем, $f^n(U'') \cap U \neq \varnothing$.

Далее,

$$f^n(U'') = f^n(f^{-m}((U'))) = f^{n-m}((U')) \subset$$
$$\subset f^{-m}(f^n(U')) = f^{-m}(U).$$

Здесь вложение, так как при взятии прообраза исходное множество может увеличиться. Имеем $f^n(U'') \subset f^{-m}(U)$. Следовательно, и $f^{-m}(U) \cap U \neq \varnothing$, Получили противоречие. □

Лемма 4.45. *Пусть $f : M \to M$ — произвольный непрерывный эпиморфизм. Тогда, если x является α-*

блуждающей точкой, то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ состоит из α-блуждающих точек.

Доказательство. Предположим от противного, что $x_{-n} \in f^{-n}(x)$ является α-неблуждающей точкой. Но тогда, согласно лемме 4.44, x — тоже α-неблуждающая точка. Получили противоречие. $\square$

Упражнение 4.46. *Построить пример внутреннего отображения, имеющего α-блуждающую впоследствии периодическую точку.*

Лемма 4.47. *Пусть $f : M \to M$ — открытый непрерывный эпиморфизм. Тогда если x — (ω-)неблуждающая точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из (ω-)неблуждающих точек.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда x — ω-неблуждающая точка. Для случая, когда x является неблуждающей точкой, доказательство аналогично.

Предположим от противного, что $\exists n > 0$ такое, что $x_n = f^n(x)$ является ω-блуждающей точкой. Тогда, по определению, найдется $U(x_n)$ — открытая окрестность точки x_n, такая, что $\forall k > 0$ ($\forall k \neq 0$ в случае блуждающей точки) $f^k(U) \cap U = \varnothing$.

Множество $f^{-n}(U(x_n))$ открыто, так как f непрерывно. Поскольку x — это ω-неблуждающая точка, а $U'(x) = f^{-n}(U(x_n))$ — ее открытая окрестность, то по определению $\exists m > 0$ ($\exists m \neq 0$ в случае неблуждающей точки), такое, что $f^m(U'(x)) \cap U'(x) \neq \varnothing$. Множество $U'' = f^m(U'(x))$ открыто, так как f — открытое отображение.

Но тогда $f^n(U'') \cap f^n(U') \neq \varnothing$. Однако, по построению, $f^n(U') = U$. Далее,

$$f^n(U'') = f^n(f^m((U'))) \subset f^m(f^n(U')) = f^{-m}(U).$$

Здесь вложение, так как при взятии прообраза исходное множество может увеличиться.

Имеем $f^n(U'') \subset f^m(U)$. Следовательно, и $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$, Получили противоречие. $\square$

Лемма 4.48. *Пусть $f : M \to M$ — открытый непрерывный эпиморфизм. Тогда, если x является ω-блуждающей точкой, то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ состоит из ω-блуждающих точек.*

Лемма 4.49. *Пусть $f : M \to M$ — открытый непрерывный эпиморфизм. Тогда, если x является блуждающей точкой, то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ состоит из блуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что $x_{-n} \in f^{-n}(x)$ является (ω-)неблуждающей точкой. Но тогда, согласно лемме 4.47, x — тоже (ω-)неблуждающая точка. Получили противоречие. $\square$

Эти утверждения показывают, что у внутренних эпиморфизмов, и даже для намного более широкого класса открытых непрерывных эпиморфизмов неблуждающее множество инвариантно. Положительная полутраектория неблуждающей точки состоит из неблуждающих точек. При этом множество блуждающих точек, не является вполне инвариантным, поскольку f^{-1}, вообще говоря, многозначно: в прообразе неблуждающей точки могут быть как неблуждающие, так и блуждающие точки.

Воспользовавшись шаблонным определением 3.69, точку x назовем **впоследствии неблуждающей**, если $O^+(x)$ содержит неблуждающую точку.

Возникает вопрос — может ли неблуждающая точка родиться “из ниоткуда”, т. е. может ли быть так, что в прообразе неблуждающей точки все точки блуждающие? Следующая теорема дает ответ на этот вопрос для случая конечнократных внутренних эпиморфизмов.

Теорема 4.50. *У конечнократных внутренних эпиморфизмов, если точка x неблуждающая, то не только ее положительная траектория $O^+(x)$ состоит из неблуждающих точек, но и в отрицательной траектории $O^-(x)$ найдется как минимум одна частая полутраектория, состоящая из неблуждающих точек.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 4.51. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм. Тогда если x — α-неблуждающая точка, то ее отрицательная полутраектория $O^-_f(x)$ содержит частную траекторию, состоящую целиком из α-неблуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что найдется такое n, что все $x_{-n,i} \in f^{-n}(x)$ являются α-блуждающими точками. Тогда по определению

$\forall i\ \exists U(x_{-n,i}) : \forall k < 0\ f^k(U(x_{-n,i})) \cap U(x_{-n,i}) = \varnothing$.

Возьмем $U'(x) = \cap_i f^n(U(x_{-n,i}))$. Так как f открыто и конечнократно, то $U'(x)$ — открытая окрестность точки x. Сузив при необходимости $U(x_{-n,i})$ и $U'(x)$, можно предполагать, что $U(x_{-n,i})$ f не пересекаются между собой, при этом f является эпиморфизмом с $U(x_{-n,i})$ на $U'(x)$.

По условию, x — это α-неблуждающая точка. Поэтому $\exists m > 0$, такое, что $f^{-m}(U'(x)) \cap U' \neq \varnothing$. Обозначим $U'' = f^{-m}(U'(x))$.

Поскольку f конечнократно и отделимо, можно предполагать, что $m > n$. Поскольку f — эпиморфизм с $U(x_{-n,i})$ на $U'(x)$, то каждая из окрестностей $U(x_{-n,i})$ имеет непустое пересечение с множеством $f^{-n}(U'')$.

Заметим, что $U'(x)$ можно представить как $U'(x) = \cup_i f^n(U(x_{-n,k}))$. Поскольку $m > n$, $U'' = f^{-m}(U'(x))$ можно представить в виде

$$U'' = f^{-m}\left(\cup_i f^n\left(U(x_{-n,k})\right)\right) = \cup_i f^{-m+n}\left(U(x_{-n,k})\right).$$

Обозначим $U_i'' = f^{-m+n}(U(x_{-n,k}))$. Тогда $U'' = \cup_i U_i''$. Поскольку $U'(x) \cap U'' \neq \varnothing$, найдется k такое, что $U'(x) \cap U_k'' \neq \varnothing$.

Как следствие, повторяя выше изложенные рассуждения, получим, что каждая из окрестностей $U(x_{-n,i})$ имеет непустое пересечение с множеством $f^{-n}(U_k'')$.

В частности, $U(x_{-n,k}) \cap f^{-n}(U_k'') \neq \varnothing$. Получили противоречие, так как, по предположению, $U(x_{-n,k})$ — блуждающая окрестность. $\square$

По аналогии с леммой 4.51 доказываются и следующие утверждения.

Лемма 4.52. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократный внутренний эпиморфизм. Тогда если x — ω-неблуждающая точка (неблуждающая точка), то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ содержит частную траекторию, состоящую из ω-неблуждающих точек (неблуждающих точек).*

Из лемм 4.51 и 4.52 следует, что в прообразе неблуждающей точки конечнократного внутреннего эпиморфизма всегда найдется неблуждающая точка. Это и доказывает теорему 4.50.

4.3.4. Широкие аналоги неблуждающих точек. Для необратимых внутренних отображений классических неблуждающих множеств не достаточно для описания всех возможных вариантов не отделимости точек траектории с помощью инвариантных наборов окрестностей и необходимо определять дополнительные инварианты.

Общая схема таких определений следующая: Точку x будем называть блуждающей относительно некоторой бесконечной последовательности (p_i) точек широкой траектории $O(x)$, если найдется окрестность точки x $U(x)$ такая, что для всех точек (p_i) она порождает каким-то образом окрестность $U'(p_i)$, такую, что $U(x)$ не пересекается с

$U'(p_i)$. В противном случае (либо $U(x)$ нельзя распространить на все точки (p_i), либо, какой бы ни был выбор $U(x)$, полученные окрестности пересекаются) x будем называть неблуждающей относительно последовательности (p_i).

Так как таких последовательностей много, как и в главе 3, ограничимся определением общих классов множеств $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающих, $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающих, $\perp^0$-неблуждающих и квазинеблуждающих точек.

Будем давать эти определения так, чтобы они были согласованы с соответствующими определениями для рекуррентных точек, т. е., чтобы $\widehat{\alpha}^{\perp}$-рекуррентные точки были $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающими, $\widehat{\omega}^{\perp}$-рекуррентные были $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающими, $\perp^0$-рекуррентные — $\perp^0$-неблуждающими, а квазирекуррентные — квазинеблуждающими точками.

Начнем с определений $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающих и $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающих точек.

В предложенной выше схеме в этих определениях множество точек (p_i) должно быть таким же, как и в соответствующих определениях широко рекуррентных точек. Возникает вопрос, какие окрестности связывать с этими точками. Если связать с точкой локальный образ окрестности U в смысле определения 4.12, то полученное определение будет слишком узким, так как будет захватывать $\perp^0$-рекуррентные точки.

Отметим, что в классических определениях 4.38, 4.41 блуждающих точек локальные прообразы не использовались. Действительно, так как если окрестность точки не пересекается со своим полным прообразом, то тем более и с любым его подмножеством, то в этих определениях механизм разбиения прообраза на локальные прообразы не нужен.

С помощью этого же приема можно дать и чисто теоретико-множественное определение $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающих и $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающих точек.

Определение 4.53. *Назовем точку x $\widehat{\alpha}^{\perp}$-**блуждающей**,*[7] *если $\exists$ окрестность $U(x)$ точки x такая, что $U(x) \cap \big(\cup_{l>k} \cup_{k\geq 0} f^{-l} \circ f^{k}(U(x))\big) = \varnothing$.*

Определение 4.54. *Назовем точку x $\widehat{\alpha}^{\perp}$-**неблуждающей**,*[8] *если x не является $\widehat{\alpha}^{\perp}$-блуждающей, т.е. $\forall\, U(x)$: $U(x) \cap \big(\cup_{l>k} \cup_{k\geq 0} f^{-l} \circ f^{k}(U(x))\big) \neq \varnothing$.*

Определение 4.55. *Назовем точку x $\widehat{\omega}^{\perp}$-**блуждающей**,*[9] *если $\exists$ окрестность $U(x)$ точки x такая, что $U(x) \cap \big(\cup_{0\leq l<k} \cup_{k\geq 0} f^{-l} \circ f^{k}(U(x))\big) = \varnothing$.*

Определение 4.56. *Назовем точку x $\widehat{\omega}^{\perp}$-**неблуждающей**,*[10] *если x не является $\widehat{\omega}^{\perp}$-блуждающей, т.е. $\forall$ $U(x)$: $U(x) \cap \big(\cup_{0\leq l<k} \cup_{k\geq 0} f^{-l} \circ f^{k}(U(x))\big) \neq \varnothing$.*

Определение 4.57. *Назовем точку x **широко блуждающей**, если x — $\widehat{\alpha}^{\perp}$-блуждающая и $\widehat{\omega}^{\perp}$-блуждающая точка.*

Определение 4.58. *Назовем точку x **широко неблуждающей**, если x — $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающая или $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающая точка.*

Из определений следует, что широко блуждающая точка является и просто блуждающей точкой согласно классического определения, а неблуждающая точка является и широко неблуждающей точкой, но не наоборот.

По определению, множества широко блуждающих точек открыты, так как содержат каждую точку вместе с окрестностью, а их дополнения, соответствующие множества широко неблуждающих точек, замкнуты.

---

[7] Будем произносить “широко альфа блуждающей”.

[8] Будем произносить “широко альфа неблуждающей”.

[9] Будем произносить “широко омега блуждающей”.

[10] Будем произносить “широко омега неблуждающей”.

Множества $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающих $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающих, широко неблуждающих, $\widehat{\alpha}^{\perp}$-блуждающих $\widehat{\omega}^{\perp}$-блуждающих, широко блуждающих точек обозначим соответственно через $\widehat{\Omega}^{\widehat{\alpha}^{\perp}}(f)$, $\widehat{\Omega}^{\widehat{\omega}^{\perp}}(f)$, $\widehat{\Omega}(f)$, $\widehat{\mathrm{W}}^{\widehat{\alpha}^{\perp}}(f)$, $\widehat{\mathrm{W}}^{\widehat{\omega}^{\perp}}(f)$, $\widehat{\mathrm{W}}(f)$.

Лемма 4.59. *Определения 4.53 и 4.55 останутся эквивалентными, если в них заменить окрестность $U(x)$ на ее нейтрально инвариантное множество*

$$U^{\perp}(x) = \bigcup_{i\geq 0} f^{-n}\circ f^{n}(U(x)),$$

Доказательство. Дадим доказательство для определения 4.55, для определения 4.53 рассуждения полностью аналогичны.

В расширенном определении окрестность точки x больше, поэтому из расширенного определения следует определение 4.55. Предположим, что определения не эквивалентны. Пусть точка x широко блуждающая согласно определения 4.55, и для нее найдется окрестность $U(x)$, такая, что $U(x)\cap U^{+}(x) = \varnothing$, но $U^{\perp}(x)\cap U^{+}(x) \neq \varnothing$, где $U^{+}(x) = \cup_{0\leq l<k}\cup_{k\geq 0} f^{-l}\circ f^{k}(U(x))$.

Пусть $y\in U^{\perp}(x)\cap U^{+}(x)$. Тогда найдется n такое, что $y\in f^{-n}\circ f^{n}(U(x))$. Но тогда по построению найдется $y'\in U(x)$, такое, что $y'\in f^{-n}\circ f^{n}(y)$.

Множество $U^{+}(x)$ по построению нейтрально инвариантно, поэтому $y'\in U^{+}(x)$. Но $y'\in U(x)$, поэтому $U(x)\cap U^{+}(x)\neq\varnothing$. Полученное противоречие и доказывает лемму. □

Другими словами, если заменить в определениях выше окрестность $U(x)$ на ее нейтрально инвариантное множество

$$U^{\perp}(x) = \bigcup_{i\geq 0} f^{-n}\circ f^{n}(U(x)),$$

то в этих определениях пересекающиеся множества останутся пересекающимися, а не пересекающиеся множества останутся не пересекающимися.

Следствие 4.60. *Если x — $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающая, $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающая, $\widehat{\omega}^{\perp}$-блуждающая, $\widehat{\alpha}^{\perp}$-блуждающая, широко неблуждающая или широко блуждающая точка, то и вся широкой траектория $O(x)$ состоит из таких же точек.*

Определим $\widehat{\omega}^{\perp}$-неблуждающую, $\widehat{\alpha}^{\perp}$-неблуждающую, $\widehat{\omega}^{\perp}$-блуждающую, $\widehat{\alpha}^{\perp}$-блуждающую, широко неблуждающую и широко блуждающую траектории как широкую траекторию, содержащую (а следовательно, состоящую из) соответствующую точку.

Для гомеоморфизмов эти определения сводятся к классическим определениям, для необратимых отображений эти множества различны.

4.3.5. Нейтрально неблуждающие точки.

Следующее определение дает еще один пример отсутствующего у гомеоморфизмов варианта неблуждающего поведения окрестностей.

Определение 4.61. *Точка $x \in M$, не являющаяся нейтрально периодической точкой, называется* $\perp^0$-***блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что для любой точки $y \in O^{\perp}(x)$, $y \neq x$, локальный образ окрестности U в смысле определения 4.12 существует и не пересекается с окрестностью U.*

Определение 4.62. *Точка $x \in M$ называется* $\perp^0$-***неблуждающей*** *точкой f, если она не является $\perp^0$-блуждающей точкой f. В частности, нейтрально периодические точки условимся считать $\perp^0$-неблуждающими.*

В случае локально связных топологических пространств определение $\perp^0$-блуждающих точек можно представить в следующем виде.

Определение 4.63. *Точка $x \in M$ называется* ***$\perp^0$-блуждающей*** *точкой f, если найдется ее связная окрестность U, не содержащая других точек из $O^{\perp}(x)$, такая, что U является компонентой связности множества $\cup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(f^k(U))$.*

Заметим, что у гомеоморфизмов по определению все точки $\perp^0$-неблуждающие.

Множество $\perp^0$-неблуждающих точек f обозначим через $\Omega^{\perp}(f)$, а множество $\perp^0$-блуждающих точек f обозначим через $W^{\perp}(f)$.

По определению, множество $\perp^0$-блуждающих точек открыто, а его дополнение, множество $\perp^0$-неблуждающих точек, замкнуто.

Лемма 4.64. *Пусть отображение f разложимо на локальные прообразы*[11] *во всех точках $O(x)$. Тогда если точка $x \in M$ — $\perp^0$-блуждающая, то $\forall k \in \mathbb{Z}$ любая точка из $f^k(x)$ тоже $\perp^0$-блуждающая.*

Доказательство. По условию леммы точка x — $\perp^0$-блуждающая с окрестностью $U(x)$. Если $k > 0$, то утверждение леммы очевидно. В качестве окрестности точки $f^k(x)$ можно взять окрестность $f^k(U(x))$. Она не будет пересекаться с другими своими локальными поднятиями, поскольку их прообразы по условию не пересекаются.

Пусть теперь $k < 0$. Пусть $y \in f^{-k}(x)$. Поскольку отображение f (а, следовательно, и f^k) разложимо на локальные прообразы, найдется окрестность $U_1(x)$ точки x, такая, что ее локальные поднятия не пересекаются между собой.

[11] Определение 4.17.

Рассмотрим окрестность $U_2(y)$ — локальное поднятие окрестности $U_1(x) \cap U(x)$ в точку y. Эта окрестность не пересекается со своими локальными поднятиями к точкам из $f^{-k}(x)$ как подокрестность локального поднятия окрестности $U_1(x)$, и не пересекается со своими локальными поднятиями к точкам из $O^{\perp}(y) \setminus f^{-k}(x)$, поскольку образы этих поднятий не пересекаются с окрестностью $U(x)$.

Следовательно, $y \in f^{-k}(x)$ — $\perp^0$-блуждающая с окрестностью $U_2(y)$. Лемма доказана. □

Лемма 4.65. *Пусть отображение f разложимо на локальные прообразы*[12] *во всех точках $O(x)$. Тогда если регулярная точка $x \in M$ — $\perp^0$-блуждающая, то и все точки из $O^{\perp}(x)$ $\perp^0$-блуждающие.*

Доказательство. Пусть $y \in O^{\perp}(x)$. Тогда $\exists k$: $y \in f^{-k}(f^k(x))$. Поскольку отображение f (а, следовательно, и f^k) разложимо на локальные прообразы, найдется окрестность $U_1(f^k(x))$ точки $f^k(x)$, такая, что ее локальные поднятия не пересекаются между собой.

Далее, по условию леммы точка x — $\perp^0$-блуждающая с окрестностью $U_2(x)$. Тогда согласно лемме 4.64 точка $f^k(x)$ — $\perp^0$-блуждающая с окрестностью $f^k(U_2(x))$.

Рассмотрим окрестность $U_3(y)$, которая является локальным поднятием окрестности $U_1(f^k(x)) \cap f^k(U_2(x))$ в точку y. По построению, $U_3(y)$ не пересекается с другими поднятиями к точкам из $f^{-k}(f^k(x))$ из-за выбора окрестности $U_1(f^k(x))$, и не пересекается с другими поднятиями из $O^{\perp}(x) \setminus f^{-k}(f^k(x))$, поскольку точка $f^k(x)$ — $\perp^0$-блуждающая.

Следовательно, $y \in f^{-k}(x)$ — $\perp^0$-блуждающая с окрестностью $U_3(y)$. Лемма доказана. □

Следствие 4.66. $f(W^{\perp}(f)) = f^{-1}(W^{\perp}(f)) = W^{\perp}(f)$.

---

[12] Определение 4.17.

Определение 4.67. *Точка $x \in M$, не являющаяся нейтрально периодической точкой, называется* ***равномерно $\perp^0$-блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность $U(x)$, что для любого числа $n \geq 1$ множество $f^{-n} \circ f^n(U)$ может быть представлено как объединение окрестностей $U_i(y_i)$, $y_i \in f^{-n} \circ f^n(x)$, таких, что*

a) *окрестности $U_i(y_i)$ не пересекаются между собой;*
b) *каждая окрестность $U_i(y_i)$ является локальным образом окрестности $U(x)$ в точке y_i (определение 4.12).*

Другими словами, точка x называется равномерно $\perp^0$-блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что для любой точки $y \in O^{\perp}(x)$, $y \neq x$, локальный образ окрестности U в смысле определения 4.12 существует и не пересекается с окрестностью U.

Замечание 4.68. *Поскольку определение симметрично, то если x — равномерно $\perp^0$-блуждающая точка f, то все точки ее нейтрального сечения $O(x)$ равномерно $\perp^0$-блуждающие.*

Разница между определениями $\perp^0$-блуждающей и равномерно $\perp^0$-блуждающей точки в том, что в определении $\perp^0$-блуждающей точки мы можем выбирать требуемую окрестность индивидуально для каждой точки нейтрального сечения, в то время как в определении равномерно $\perp^0$-блуждающей регулярной точки требуется зафиксировать окрестность и использовать ее поднятия для всех точек нейтрального сечения.

Поэтому $\perp^0$-блуждающая точка не обязана быть равномерно $\perp^0$-блуждающей точкой, к примеру, если нейтральное сечение не отделимо локальными поднятиями от множества особых точек B_f (определение 4.29).

Заметим, однако, что у внутренних отображений одно- и двумерных компактных многообразий $\perp^0$-блуждающие точки являются равномерно $\perp^0$-блуждающими точками.

4.3.6. Инвариантность множества равномерно нейтрально неблуждающих точек.

Лемма 4.69. *Если x — равномерно $\perp^0$-блуждающая точка внутреннего отображения f, то и $f(x)$ тоже равномерно $\perp^0$-блуждающая точка.*

Доказательство. По определению, найдется окрестность $U(x)$ такая, что для каждого n $f^{-n} \circ f^n(U(x))$ распадается на непересекающиеся компоненты $U_i(y_i)$, $y_i \in f^{-n} \circ f^n(x)$, имеющие общий образ $f^n(U(x))$.

Покажем, что $f(U_i(y_i))$ — требуемый в определении набор компонент прообраза $f^{1-n} \circ f^{n-1}(f(U(x)))$ для $f(x)$ и $n-1$. Для этого покажем, что $f(U_i(y_i))$ и $f(U_j(y_j))$ либо совпадают, когда $f(y_i) = f(y_j)$, либо не пересекаются, когда $f(y_i) \neq f(y_j)$.

Предположим от противного, что $f(U_i(y_i))$ и $f(U_j(y_j))$ пересекаются, когда $f(y_i) \neq f(y_j)$. Но тогда прообраз точки пересечения принадлежит пересечению прообразов, что противоречит условию.

Таким образом, $f(U_i(y_i))$ — требуемый в определении набор компонент прообраза $f^{1-n} \circ f^{n-1}(f(U(x)))$ для $f(x)$ и $n-1$, следовательно, $f(x)$ — равномерно $\perp^0$-блуждающая точка. □

Следствие 4.70. *Множество равномерно нейтрально неблуждающих точек вперед инвариантно.*

Можно показать, что прообразы равномерно $\perp^0$-блуждающей точки будут $\perp^0$-блуждающими точками, но, вообще говоря, могут и не быть равномерно $\perp^0$-блуждающими точками.

4.3.7. Примеры нейтрально неблуждающих точек.

В определении 4.61 использовалось абстрактное понятие разложения прообраза на компоненты из раздела 4.2.2. Если же предположить, что пространство локально связно, то разложение прообраза сводится к его разбиению на компоненты связности, и определение 4.61 сразу приобретает следующий, более простой вид:

Определение 4.71. *Точка $x \in M$ называется $\perp^0$-**блуждающей** точкой f, если найдется такая ее связная окрестность U, что для любой связной компоненты $U' \neq U$ множества $f^{-n}(f^n(U))$ пересечение $U' \cap U = \varnothing$ для всех $n > 0$.*

Пусть f — необратимое накрытие окружности S^1. Так как f — локальный гомеоморфизм, для нахождения локальных компонент прообраза можно воспользоваться как разложением прообраза на компоненты связности, так и окрестностями, на которых локально отображение является гомеоморфизмом.

Построим пару примеров нейтрально неблуждающих множеств.

Пример 4.72. $z^2 \colon S^1 \to S^1$.

Построение. Рассмотрим двулистное накрытие вложенной в комплексную плоскость единичной окружности полиномом

$$z^2 \colon S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}.$$

Для этого отображения мы можем воспользоваться и разбиением прообраза на компоненты связности, и покрытием прообраза на окрестности локального гомеоморфизма.

Рассмотрим точку $\varphi = 0$ ($1 + 0i$ в комплексной плоскости). Это неподвижная точка, ее широкая траектория

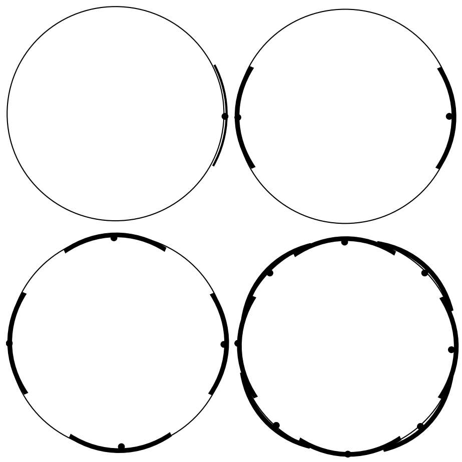

Рис. 4.8. Итерации нейтрального отображения для z^2.

состоит из ее прообразов, впоследствии неподвижных точек $\varphi = \frac{k}{2^n}2\pi$, $n \geq 0$, $0 \leq k < 2^n$, т.е. комплексных корней из единицы степени 2^n для всех n.

Для n-той степени прообраза множество $f^{-n}f^n(1+0i)$ состоит из 2^n комплексных корней из единицы степени 2^n. Для каждого такого корня его окрестность локальной гомеоморфности состоит из содержащего эту точку отрезка, высекаемого из окружности соседними этой точке корнями.

Возьмем окрестность $(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$ точки $\varphi = 0$ и рассмотрим ее нейтральные итерации (см. рисунок 4.8). После первой итерации множество распадается на две компоненты связности $(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$ и $(\pi - \frac{\pi}{5}, \pi + \frac{\pi}{5})$. После второй итерации множество распадается на четыре компоненты связности $(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$, $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5})$, $(\pi - \frac{\pi}{5}, \pi + \frac{\pi}{5})$ и $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5})$.

После третьей итерации множество уже не распадается на компоненты связности, а его покрытие окрестностями, в которых отображение является локальным гомеоморфизмом, состоит из восьми окрестностей $(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$, $(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5})$, $(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5})$, $(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{5})$, $(\pi-\frac{\pi}{5}, \pi+\frac{\pi}{5})$, $(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{5})$, $(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{5})$ и $(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{5}, \frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{5})$, которые пересекаются между собой.

Это нейтральное отображение состоит из композиции растягивающего в $2n$ раз z^{2n} и сжимающего в $2n$ раз $\sqrt[2n]{z}$, поэтому у каждой компоненты прообраза отрезка длина будет равна длине исходного отрезка. Из-за этого, как легко видеть, какой бы малой мы не взяли бы начальную окрестность, найдется n такое, что ее нейтральная итерация заполнит всю окружность. Следовательно, точка $\varphi = 0$ является $\perp^0$-неблуждающей. Поскольку то свойство этого нейтральное отображения, что у каждой компоненты прообраза отрезка длина будет равна длине исходного отрезка не зависит от выбора точки, то описанная ситуация повторится и для любой другой точки отрезка. Следовательно, у отображения z^{2n} вся окружность состоит из $\perp^0$-неблуждающих точек. □

Пример 4.73. *Пример двулистного накрытия окружности с $\perp^0$-блуждающими и $\perp^0$-неблуждающими точками.*

Построение. Рассмотрим двулистное накрытие окружности $S^1 = [0,1]/\{0,1\}$, заданное (см. рис 4.9) кусочно-линейной функцией

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 3x-1, & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

На отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ отображение тождественное, следовательно, все точки на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ неподвижные, далее, на

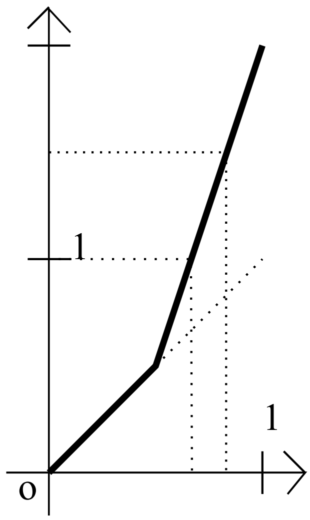

Рис. 4.9. Накрытие окружности с $\perp^0$-блуждающими точками.

отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, отображение растягивающее, в итоге дважды накрывая окружность.

Покажем, что все точки открытого интервала $(0, \frac{1}{2})$ $\perp^0$-блуждающие.

Для этого для этих точек достаточно предъявить требуемую в определении 4.71 окрестность.

В качестве такой окрестности возьмем открытый интервал $(0, \frac{1}{2})$. Поскольку все точки этого интервала неподвижные, то нейтральные итерации этого интервала $f^{-n} \circ f^n$ сводятся к итерациям f^{-n}.

$f^{-1}\left((0, \frac{1}{2})\right)$ распадается на 2 компоненты связности: собственно $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{4}{6}, \frac{5}{6})$ (см. рис 4.9). Эти компоненты связности отделены друг от друга интервалами, которые накрывают отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$.

Если рассмотреть $f^{-2}\left((0, \frac{1}{2})\right)$, то к двум упомянутым интервалам добавятся еще 2 интервала, расположенные внутри отрезков $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ и $(\frac{5}{6}, 1)$, которые для f^{-1} накрывали отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$. Опять, все четыре интервала разделены интервалами, которые накрывают отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$.

Это же справедливо и для любого n: интервалы, которые накрывают отрезок $[0, \frac{1}{2}]$ всегда будут разделены интервалами, которые накрывают отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$, поэтому для любого n множество $f^{-n}\left((0, \frac{1}{2})\right)$ будет разделяться на компоненты связности.

Следовательно, открытый интервал $(0, \frac{1}{2})$ (и все его прообразы) принадлежит множеству $W^{\perp}(f)$.

Открытый интервал $(0, \frac{1}{2})$ и все его прообразы высекают из отрезка $[\frac{1}{2}, 1]$ Канторово множество Λ. Точки этого Канторова множества Λ являются предельными для последовательностей прообразов открытого интервала $(0, \frac{1}{2})$, поэтому в любой, как угодно малой окрестности есть несколько прообразов открытого интервала $(0, \frac{1}{2})$, т.е. при достаточно большом n такой интервал накрывает всю окружность и не может быть разбит на компоненты связности.

Следовательно, $\Lambda = \Omega^{\perp}(f)$. $\square$

4.3.8. Квазинеблуждающие и суперблуждающие точки.

Данные ранее определения были практически важными, но частными случаями неблуждающих точек широкой траектории. Дадим одно общее определение, которое охватывает все возможные варианты неблуждающих точек.

Определение 4.74. *Точка $x \in M$ называется **суперблуждающей** точкой f, если она одновременно α-, ω-, и $\perp^0$-блуждающая.*

Точку $x \in M$ назовем **квазинеблуждающей** точкой f, если она не является суперблуждающей.

Множество суперблуждающих точек обозначим через $SW(f)$. Множество квазинеблуждающих точек обозначим через $Q\Omega(f)$. По определению, $Q\Omega(f) = \widehat{\Omega}(f) \cup \Omega^{\perp}(f)$.

Заметим, что для гомеоморфизмов определение суперблуждающей точки превращается просто в определение блуждающей точки. Разница между блуждающими точками и суперблуждающими точками появляется для необратимых внутренних отображений. Например, у голоморфного отображения $z^2\colon S^2 \to S^2$ множество суперблуждающих точек пусто, в то время как все точки с радиусом, отличным от 0, 1, ∞ — блуждающие.

Пример 4.75. *Пример внутреннего отображения с суперблуждающими точками.*

Построение. Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^2$, состоящее из двух прямых: $X = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \{0,1\}\}$ Рассмотрим отображение на X, $f\colon (x,y) \mapsto (x+1,0)$. Легко видеть, что все точки этого отображения суперблуждающие: в качестве требуемой в определении суперблуждающих точек окрестности можно взять метрический шар радиуса $< \frac{1}{2}$. $\square$

Как и в случае $\perp^0$-блуждающих точек, для суперблуждающих точек существует и более сильный вариант определения.

Определение 4.76. *Точка $x \in M$ называется* ***равномерно суперблуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что для любой точки $y \in O(x)$, $y \neq x$, локальный образ окрестности U в смысле определения 4.12 существует и не пересекается с окрестностью U.*

В случае локально связных топологических пространств определение суперблуждающих точек можно представить в следующем виде.

Определение 4.77. *Точка $x \in M$ называется* ***равномерно суперблуждающей*** *точкой f, если найдется ее связная окрестность U, не содержащая других точек из $O(x)$, такая, что для любой компоненты связности $U' \neq U$ множества $f^{-l}(f^k(U))$ имеем $U' \cap U = \varnothing$ для всех $k, l \in \mathbb{Z}$.*

По определению, вся траектория равномерно суперблуждающей точки состоит из равномерно суперблуждающих точек. Траекторию равномерно суперблуждающей точки назовем **равномерно суперблуждающей траекторией**.

Суперблуждающие точки в дальнейшем будут играть важную роль в изучении динамики внутренних отображений.

4.4. Центры Биркгофа внутреннего отображения.

Поскольку у внутренних отображений одному определению множества неблуждающих точек соответствует целое семейство определений, то и классическое определение центра Биркгофа неблуждающего множества динамической системы расщепляется для внутренних отображений на семейство определений.

Для внутренних отображений получаем центр Биркгофа множества неблуждающих точек, центр Биркгофа множества широко неблуждающих точек, центр Биркгофа множества $\perp^0$-неблуждающих точек и центр Биркгофа множества квазинеблуждающих точек.

Заметим, что классический результат о том, что центр Биркгофа неблуждающего множества обратимой динамической системы на компактах не пуст и совпадает с замыканием множества рекуррентных точек можно распространить и на эти центры Биркгофа для внутренних отображений, так как специфика обратимых отображений в доказательстве не используется.

4.5. Регулярно блуждающие точки.

Как и для гомеоморфизмов, в множестве блуждающих точек $W(f)$ внутреннего эпиморфизма f топологического пространства X можно выделять подмножества ω-регулярных точек, α-регулярных точек, регулярных точек и нерегулярных точек при помощи понятия регулярности, введенного Биркгофом и Смитом [**46**].

Однако, внутренние отображения имеют свою специфику: во-первых, термин “регулярные точки” уже зарезервирован в дихотомии регулярные vs. сингулярные точки внутреннего отображения. Поэтому, чтобы избежать путаницы, вместо термина “регулярные блуждающие точки”, как это принято в случае гомеоморфизмов, будем говорить о регулярно блуждающих точках. Тогда, например, выражения “регулярная регулярно блуждающая точка” и “сингулярная регулярно блуждающая точка” будут иметь четко определенный смысл.

Во-вторых, для определения блуждающего множества можно дать несколько определений, которые эквивалентны между собой для гомеоморфизмов, но различны для внутренних отображений. Соответственно, каждое из этих определений блуждающего множества и дополнительного к нему неблуждающего множества порождает свое собственное определение регулярно блуждающих точек, таким образом, у нас будет не одно определение, а целое семейство определений регулярно блуждающих точек, параметризованное выбором определения блуждающего и дополнительного к нему неблуждающего множества.

Чтобы не указывать все эти случаи, дадим определения для случая классического определения 4.42 множества блуждающих и неблуждающих точек. При необходимости, другие определения можно получить простой заменой классических множеств блуждающих и неблуждающих точек на указанные.

Определение 4.78. *Блуждающая точка x называется **ω-регулярно блуждающей**, если для произвольной окрестности U_Ω неблуждающего множества Ω найдется окрестность V_x точки x такая, что почти вся положительная полутраектория множества V_x содержится в U_Ω, т.е. начиная с некоторого $n > 0$ имеет место включение:*

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} f^i(V_x) \subset U_\Omega.$$

*Блуждающая точка $x \in X$ называется **α-регулярно блуждающей**, если для произвольной окрестности U_Ω неблуждающего множества Ω найдется окрестность V_x точки x такая, что почти вся отрицательная полутраектория множества V_x содержится в U_Ω, т.е. начиная с некоторого $n > 0$ имеет место включение:*

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} f^{-i}(V_x) \subset U_\Omega.$$

*Блуждающая точка $x \in X$ называется **регулярно блуждающей**, если она одновременно и ω- и α-регулярно блуждающая. Остальные блуждающие точки из X, не являющиеся ни α- ни ω-регулярно блуждающими, называются **нерегулярно блуждающими.***

Множества регулярно блуждающих точек, α-регулярно блуждающих и ω-регулярно блуждающих точек будем обозначать соответственно через $\mathrm{Reg}\,(f)$, $\mathrm{Reg}_-(f)$ и $\mathrm{Reg}_+(f)$. Тогда, по определению,

$$\mathrm{Reg}\,(f) = \mathrm{Reg}_-(f) \cap \mathrm{Reg}_+(f).$$

По определению, множества α-регулярно блуждающих точек, ω-регулярно блуждающих точек, а значит и регулярно блуждающих точек, открыты.

Замечание 4.79. *Подчеркнем, что отличие от определений множеств* $\mathrm{Lim}(f)$ *и* $\mathrm{Rec}(f)$, *в определении множества* $\mathrm{Reg}\,(f)$ *регулярных точек берется* пересечение, *а не объединение соответствующих множеств* $\mathrm{Reg}_{-}(f)$ *и* $\mathrm{Reg}_{+}(f)$.

4.5.1. Регулярно блуждающие компоненты.

Определение 4.80. *Пусть* $S \subset X$ *открытое подмножество (область). Тогда* S *называется* ***областью блуждающего типа***, *если* $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k \neq 0$.

Область $S \subset X$ *называется областью* ***периодического типа*** *порядка* $q \geq 1$, *если* $f^q(S) = S$ *и* $f^k(S) \cap S = \varnothing, k = 1, \ldots, q-1$.

При $q = 1$, *т.е. когда* $f(S) = S$, *область* S *называется* ***инвариантной*** *областью.*

Определение 4.81. *Максимальные связные компоненты множеств* ω*-регулярно блуждающих точек,* α*-регулярно блуждающих точек и регулярно блуждающих точек* f *называются соответственно* ω***-регулярно блуждающими***, α***-регулярно блуждающими*** *или* ***регулярно блуждающими*** *компонентами.*

Заметим, что если X — многообразие, то каждая регулярно блуждающая компонента S всегда линейно связна как открытое подмножество локально линейно связного пространства.

В силу того, что непрерывное отображение переводит связные множества снова в связные, а также в силу максимальности S, она может быть: либо (a) областью блуждающего типа, и тогда будем называть ее *блуждающей компонентой*, либо (b) областью периодического типа — тогда будем называть ее *периодической компонентой*.

Для внутренних отображений, в отличие от гомеоморфизмов, важен также случай, возвращается ли в себя прообраз максимальной связной компоненты.

Определение 4.82. *Инвариантная максимальная связная компонента U некоторого множества называется тотально инвариантной, если $f^{-1}(U) = U$.*

Определение 4.83. *Периодическая максимальная связная компонента U некоторого множества называется тотально периодической, если $f^{-n}(U) = U$ для некоторого $n > 0$.*

В случае гомеоморфизмов регулярно блуждающие периодические компоненты двумерных поверхностей впервые были исследованы Биркгофом и Смитом [**46**] для сферы, и Смитом [**110**] — в общем случае. Позже С. Х. Арансон и В. С. Медведев в работе [**5**] обобщили результаты этих статей на случай n-мерной сферы, уточнив при этом доказательства. Было показано, что любая блуждающая регулярно блуждающая компонента S имеет топологический тип либо односвязной, либо двусвязной области в $\mathbb{R}^2$, причем в случае двусвязной области X является двумерным тором а f принадлежит специальному классу гомеоморфизмов, при этом любая периодическая регулярно блуждающая компонента S имеет топологический тип или односвязной или двусвязной области в $\mathbb{R}^2$ (другими словами, гомеоморфна либо открытому диску, либо открытому кольцу $S^1 \times (0,1)$). Кроме того, в случае двусвязной области, две компоненты связности границы S лежат во множестве неблуждающих точек, а точки S стекают с одной компоненты связности ее границы ∂S на другую.

4.5.2. Некоторые свойства регулярно блуждающих компонент. Пусть $S \subset X$ — инвариантная регулярно блуждающая компонента внутреннего отображения f, X — локально линейно связное компактное многообразие с метрикой. По определению, ω-предельное множество S представляет собой замкнутое подмножество в ∂S.

Лемма 4.84. *Пусть Δ — замкнутое изолированное вперед f-инвариантное подмножество ω-предельного множества $\omega(S)$ инвариантной регулярно блуждающей компоненты S внутреннего отображения f. Тогда бассейн притяжения Δ — открытое множество.*

Доказательство. Пусть точка $y \in S$ такая, что ее ω-предельное множество $\omega(y)$ имеет непустое пересечение с Δ.

Покажем, что тогда $\omega(y) \subset \Delta$. В самом деле, предположим от противного, что в ω-предельном множестве $\omega(S)$ найдется еще одно замкнутое изолированное вперед f-инвариантное подмножество Δ_1 такое, что оно пересекается с $\omega(y)$. Тогда для последовательности метрических шаров $B_{\frac{1}{n}}(y)$ радиуса $\frac{1}{n}$ найдутся последовательности точек $p_n, q_n \in B_{\frac{1}{n}}(y)$ такие, что $f^n(p_n)$ сходится к Δ, а $f^n(q_n)$ сходится к Δ_1. Поскольку X — локально линейно связно, начиная с некоторого N, точки p_n и q_n можно соединить путем $\gamma_n \subset B_{\frac{1}{n}}(y)$. Поскольку γ_n — связное множество, $\omega(\gamma_n)$ тоже связно, при чем по построению $\omega(\gamma_n) \cap \Delta \neq \varnothing$ и $\omega(\gamma_n) \cap \Delta_1 \neq \varnothing$. Но это противоречит тому, что Δ — замкнутая изолированная компонента ω-предельного множества.

Взяв в определении ω-регулярной точки ε меньшее, чем расстояние от Δ до других точек $\omega(S)$, получим, что для всех $n > N$ окрестность точки y останется в ε-окрестности Δ. Следовательно, произвольная точка y входит в область притяжения Δ вместе со своей окрестностью, следовательно, бассейн притяжения Δ открыт. $\square$

Теорема 4.85. *ω-предельное множество $\omega(S)$ инвариантной регулярно блуждающей компоненты S внутреннего отображения f не разложимо на замкнутые изолированные вперед f-инвариантные подмножества.*

Доказательство. Достаточно будет рассмотреть случай двух замкнутых изолированных f-инвариантных подмножеств $\omega(S)$, так как лишние компоненты можно объединить в одну.

Согласно лемме 4.84, бассейны притяжения этих двух инвариантных подмножеств открыты и не пересекаются, как бассейны притяжения. При этом, поскольку в сумме они дяют все множество $\omega(S)$, объединение этих бассейнов притяжения дает всю компоненту S. Но это противоречит связности S. $\square$

Замечание 4.86. *Применяя утверждение 4.85 к отображению f^n, получим, что ω-предельное множество $\omega(S)$ инвариантной регулярно блуждающей компоненты S внутреннего отображения f не разложимо на замкнутые изолированные f-периодические подмножества.*

Проблема 4.87. *Можно ли построить пример инвариантной регулярно блуждающей компоненты внутреннего отображения, у которой ω-предельное множество не связно (например, гомеоморфно канторову множеству)? Можно ли это сделать в случае, если f — гомеоморфизм?*

Замечание 4.88. *Утверждения 4.85 и 4.86 для α-предельного множества не имеют места в случае необратимых внутренних отображений.*

Упражнение 4.89. *построить пример вперед инвариантной регулярно блуждающей компоненты внутреннего отображения, для которой ω-предельное множество ее точек состоит из неподвижной точки, а α-предельное множество ее точек несвязно и состоит из впоследствии фиксированной траектории.*

4.6. Фундаментальные окрестности.

В этом разделе мы определим фундаментальные окрестности для внутренних отображений. Как и для других понятий, перенос понятия “фундаментальные окрестности” с гомеоморфизмов на внутренние отображения приводит к нескольким возможным вариантам определений.

Напомним, как возникают и какими свойствами обладают фундаментальные окрестности в случае гомеоморфизмов.

Напомним, что в случае гомеоморфизмов фундаментальные окрестности возникают в связи с аттракторами. Подробно пары аттрактор-репеллер и фильтрации рассмотрены в разделе 6.2.3, здесь только напомним определение 6.8:

Открытое множество U называется строго притягивающим, если $f(\overline{U}) \subset U$. Из определения $U \setminus f(\overline{U}) \neq \varnothing$.

Строго притягивающее множество обладает тем свойством, что для любой точки из $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ ее ω - предельное множество содержится в инвариантном множестве $\Lambda = \cap_{n\geq 0} f^{n}(U)$, которое называется аттрактором.

Множество $U \setminus f(U) \neq \varnothing$ обладает тем свойством, что в случае гомеоморфизма оно пересекается с каждой траекторией бассейна притяжения аттрактора ровно в одной точке. Обычно рассматривают замыкание этого множества, множество $U_F = \overline{U \setminus f(U)} = \Big(U \setminus \overline{f(U)}\Big) \cup \partial U \cup f(\partial U)$ с границей $\partial U \cup f(\partial U)$.

Это замыкание U_F обладает тем свойством, что оно пересекается с каждой траекторией бассейна притяжения аттрактора, попадающей в его внутренность, ровно в одной точке, а остальные траектории бассейна притяжения аттрактора пересекаются с этим замыканием дважды, первый раз с ∂U и второй раз с $f\,(\partial U)$. При этом f индуцирует отображение на границе множества $U_F = \overline{U \setminus f(U)}$: при этом ∂U гомеоморфно отображается на $\partial f\,(U) = f\,(\partial U)$.

Фундаментальной окрестностью называют либо само множество U_F, либо те его подмножества, которые сохраняют свойство пересечения с траекториями и отображения границ.

Необходимость рассматривать подмножества возникает из-за того, что бассейн притяжения аттрактора обычно имеет сложную структуру, например, его точки могут принадлежать разным устойчивым и неустойчивым многообразиям. В таком случае обычно бассейн притяжения аттрактора разбивается на подмножества, и в каждом подмножестве выбирается своя фундаментальная окрестность.

В топологической теории динамических систем одним из важных применений фундаментальных окрестностей является построение сопрягающего два отображения гомеоморфизма: поскольку внутренность фундаментальной окрестности пересекается с каждой траекторией ровно в одной точке, то достаточно задать сопрягающий гомеоморфизм на границе фундаментальной окрестности, а далее его можно продолжить на внутренность фундаментальной окрестности произвольным образом.

При переходе к внутренним отображениям оказывается, что указанные выше свойства фундаментальных окрестностей могут нарушаться.

Например, может быть так, что ∂U уже не отображается гомеоморфно на $f\,(\partial U)$, а $\partial f\,(U) \neq f\,(\partial U)$.

Пример 4.90. *Пример отображения, для которого ∂U не отображается гомеоморфно на $f\,(\partial U)$.*

Построение. Рассмотрим отображение плоскости в полярных координатах $(\rho, \phi) \mapsto (\frac{3+sin\phi}{5}\rho, 2\phi)$. Легко видеть, что точка $(0,0)$ - неподвижная притягивающая точка, все остальные точки - блуждающие и принадлежат бассейну притяжения точки $(0,0)$.

Искомый пример дает окрестность - метрический шар единичного радиуса. Образ его границы - кривая, которая наподобие улитки Паскаля дважды оборачивается вокруг точки $(0,0)$ (см. рис. 4.12). Таким образом, часть образа ∂U лежит во внутренности образа U. $\square$

Далее, множество $U \setminus f(U)$, хоть и по прежнему пересекает каждую частную траекторию в одной точке, может содержать в себе сразу много точек широкой траектории (см. определение 3.6).

Поэтому для внутренних отображений определим несколько видов фундаментальных окрестностей, в зависимости от того, какими свойствами они обладают.

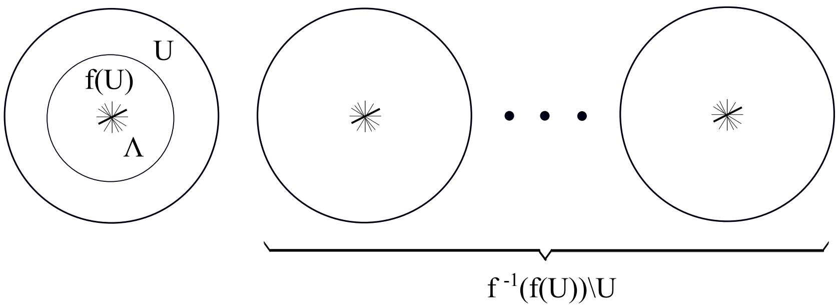

Рис. 4.10. Фундаментальная окрестность первого рода U. Справа другие прообразы $f(U)$.

Пусть открытое множество U — строго притягивающее множество внутреннего отображения f. Также предположим, что $U_F = \overline{U \setminus f(U)}$ не содержит особых точек f. Если сужение f на U_F является гомеоморфизмом, скажем, что

U_F является фундаментальной окрестностью первого рода.

Если же сужение f на U_F не является гомеоморфизмом, рассмотрим множество $U^\perp = \cup_{n\geq 0} f^{-n} \circ f^n(U)$. Если $U^\perp$ тоже является строго притягивающим множеством внутреннего отображения f, то будем говорить, что U допускает расширение до фундаментальной окрестности второго рода, а $U^\perp$ будем называть фундаментальной окрестностью второго рода.

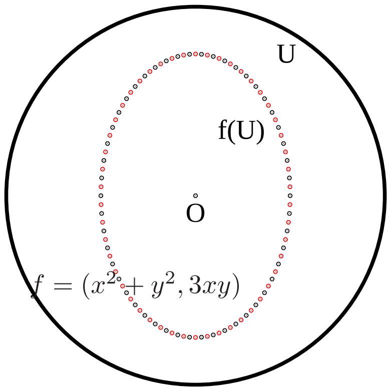

Рис. 4.11. Фундаментальная окрестность второго рода. Окружность ∂U дважды накрывает эллипс $\partial f(U)$ под действием f.

Иначе назовем U_F фундаментальной окрестностью третьего рода.

Легко видеть из определений, что фундаментальная окрестность первого рода имеет все признаки фундаментальной окрестности для гомеоморфизма: С широкими траекториями всех своих точек она пересекается ровно в одной точке, за исключением своей границы, которая пересекается по двум точкам. Граница распадается на

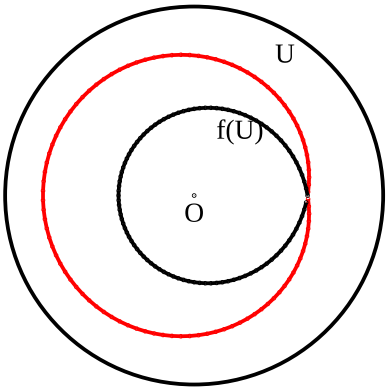

Рис. 4.12. Фундаментальная окрестность третьего рода.

два подмножества, одно из которых гомеоморфно отображается на другое с помощью внутреннего отображения f.

Фундаментальная окрестность второго рода пересекается с широкими траекториями всех своих точек ровно по одному нейтральному сечению широкой траектории, за исключением своей границы, которая пересекается по двум нейтральным сечениям. Граница распадается на два подмножества, одно из которых накрывает другое с помощью внутреннего отображения f. Также, аттрактор фундаментальной окрестности второго рода является аттрактором нейтральных сечений (см. определение 6.31).

Фундаментальная окрестность третьего рода обладает тем свойством, что нейтральное предельное множество ее точек (см. раздел 3.6.2) пересекается с репеллером, соответственно ее аттрактор не является аттрактором нейтральных сечений.

Отображения с суперблуждающими точками предоставляют примеры фундаментальных окрестностей первого рода. Голоморфные отображения, например, комплексные полиномы, предоставляют примеры фундаментальных окрестностей второго рода в бассейнах притяжения суперпритягивающих точек, см. утверждение 5.17. Отображение из примера 4.90 можно указать в качестве примера отображений с фундаментальными окрестностями третьего рода.

Имея под рукой такие свойства фундаментальных окрестностей, образованных строго притягивающими множествами, дадим теперь формальное определение различных фундаментальных окрестностей.

Определение 4.91. *Пусть U_F - замкнутое множество с краем. Назовем U_F фундаментальной окрестностью*

- ◇ ***первого рода**, если она пересекается с широкими траекториями всех своих точек ровно в одной точке, за исключением своей границы, которая пересекается по двум точкам. Граница распадается на два подмножества, одно из которых гомеоморфно отображается на другое с помощью внутреннего отображения f.*
- ◇ ***второго рода**, если она пересекается с широкими траекториями всех своих точек ровно по одному нейтральному сечению широкой траектории, за исключением своей границы, которая пересекается по двум нейтральным сечениям, а граница распадается на два подмножества, одно из которых накрывает другое с помощью внутреннего отображения f.*
- ◇ ***третьего рода**, если нейтральное предельное множество ее точек пересекается с репеллером.*

Если множество U_F не является фундаментальной окрестностью первого, второго или третьего рода, но построенное из U_F множество $U_F^{\perp} = \overline{\cup_{n\geq 0} f^{-n} \circ f^n(\operatorname{Int} U)}$ является фундаментальной окрестностью второго рода, то будем говорить, что U_F допускает расширение до фундаментальной окрестности второго рода,

Эти же определения можно распространить и на фундаментальные окрестности, содержащие особые точки. Мы не будем выписывать соответствующие определения в силу их громоздкости, отметим только, что если у фундаментальной окрестности найдется образ или прообраз, не содержащий особых точек, то ее род можно определить по роду такого образа или прообраза.

ГЛАВА 5

Гомеоморфизмы, полусопряженные внутреннему отображению.

Пусть X – полное локально компактное сепарабельное метрическое пространство, а $f\colon X \to X$ — его внутреннее отображение.

В динамике необратимых отображений иногда используется прием, когда по исходному необратимому отображению строится и в дальнейшем изучается гомеоморфизм пространства частных траекторий f, которое является проективным пределом X по отображению f.

В этом разделе предлагаются и изучаются конструкции разбиений X по различным нейтрально инвариантным относительно f подмножествам, таких, что индуцированное отображение на фактор-пространстве является гомеоморфизмом. Преимущество такого подхода в том, что полученный гомеоморфизм напрямую полусопряжен исходному внутреннему отображению.

5.1. Фактор-гомеоморфизм разбиения на нейтральные сечения.

Рассмотрим разбиение пространства X на нейтральные сечения — множества $O^{\perp}(x)$. Обозначим фактор-пространство по этому разбиению через $X/_{O^{\perp}}$, а проекцию на фактор-пространство как $\pi_{O^{\perp}}$. На фактор-пространстве $X/_{O^{\perp}}$ f индуцирует отображение $f/_{O^{\perp}}$.

Отметим, что множества $O^{\perp}(x)$ не замкнуты, поэтому в полученном фактор-пространстве не гарантируется даже выполнение аксиомы отделимости T_1, т. е. одноточечное множество может и не быть замкнутым. Далее этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

f является взаимно однозначным отображением на множестве нейтральных сечений, а, следовательно, отображение $f/_{O^\perp}$ на фактор-пространстве является взаимно однозначным.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{O^\perp}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{O^\perp}} \\ X/_{O^\perp} & \xrightarrow{f/_{O^\perp}} & X/_{O^\perp} \end{array}$$

По построению, $\pi_{O^\perp}$ — факторное отображение, f — внутреннее отображение, следовательно, композиция $\pi_{O^\perp} \circ f$ — факторное отображение. Из коммутативной диаграммы $f/_{O^\perp} \circ \pi_{O^\perp}$ — факторное отображение, следовательно, $f/_{O^\perp}$ — тоже факторное отображение. Тогда по теореме 2.18 $f/_{O^\perp}$ — гомеоморфизм пространства $X/_{O^\perp}$.

Так построенный гомеоморфизм $f/_{O^\perp}$ является топологическим фактором отображения f.

Пусть на пространстве X задано разбиение Ψ на замкнутые непересекающиеся множества.

Определение 5.1. *Разбиение Ψ называется* ***замкнутым****, если проекция на фактор-пространство — замкнутое отображение.*

Определение 5.2. *Разбиение Ψ называется* ***открытым****, если проекция на фактор-пространство — открытое отображение.*

Напомним, что множества, насыщенные относительно разбиения на нейтральные сечения (определение 3.50), называются нейтрально инвариантными (определение 3.49).

Образом множества V под действием $\pi_{O^\perp}^{-1} \circ \pi_{O^\perp}$ является нейтрально инвариантное множество

$$V' = \bigcup_{i \geq 0} f^{-n} \circ f^n(V).$$

Если V — открытое множество, то по построению V' тоже открытое множество. Однако, если V — замкнутое множество, то V' может и не быть замкнутым множеством. Таким образом, разбиение пространства X на нейтральные сечения открытое, но не замкнутое.

Определение. *Скажем, что точка x* $\perp^0$***-зацеплена*** *с точкой y под действием гомеоморфизма f, если для любых сколь угодно малых окрестностей V_x и V_y точек x и y соответственно имеет место*

$$\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n} \left(f^n \left(V_x \right) \right) \right) \cap V_y \neq \varnothing.$$

Обозначим через $\mathrm{Linked}^\perp(f)$ множество точек y таких, что для y найдется зацепленная с ней точка x. По определению, это замкнутое множество. Пример: $\perp^0$-неблуждающая точка $\perp^0$-зацеплена сама с собой. Как следствие, $\Omega^\perp(f) \subset \mathrm{Linked}^\perp(f)$.

Как уже было сказано, множества $O^\perp(x)$ не замкнуты, поэтому фактор-пространство $X/_{O^\perp}$ может обладать достаточно плохой топологией, в частности, не гарантируется даже выполнение аксиомы отделимости T_1.

Однако, как будет показано далее, все неприятности в топологии фактор-пространства $X/_{O^\perp}$ сосредоточены в $\mathrm{Linked}^\perp(f)$. Действительно, если $y \in \mathrm{Linked}^\perp(f)$, то найдется точка x, которая $\perp^0$-зацеплена с точкой y, и, следовательно, для образов точек x и y не выполняется аксиома отделимости T_2. И наоборот, если точки x и y не принадлежат множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$, то по определению найдутся окрестности V_x и V_y точек x и y, такие, что

$$\left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}\left(f^{n}\left(V_x\right)\right)\right) \cap \left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}\left(f^{n}\left(V_y\right)\right)\right) = \varnothing,$$

и, как следствие, для образов точек x и y в фактор-пространстве $X/_{O^\perp}$ выполняется аксиома отделимости T_2.

Поскольку $\Omega^\perp(f) \subset \mathrm{Linked}^\perp(f)$, то дополнение к множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$ лежит во множестве $\perp^0$-блуждающих точек. Пусть x — неособая $\perp^0$-блуждающая точка, из дополнения к множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$. Согласно определению 4.8, найдется ее окрестность $U(x)$ такая, что f в сужении на $U(x)$ является гомеоморфизмом. Следовательно, при этом $U(x)$ пересекается с любым нейтральным сечением f не более чем по одной точке. Дополнение к множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$ открыто, а пространство X локально компактно. Поэтому для точки x найдется ее компактная замкнутая окрестность $V(x)$, такая, что $V(x)$ пересекается с любым нейтральным сечением f не более чем по одной точке и целиком содержится в дополнении к множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$.

В сужении на окрестность $V(x)$ проекция $\pi_{O^\perp}$ является биективным непрерывным отображением компакта в хаусдорфово пространство, поэтому образ $V(x)$ тоже является компактом, а проекция $\pi_{O^\perp}$ в точке x является локальным гомеоморфизмом.

Следствие 5.3. *Фактор-отображение разбиения на нейтральные сечения f в сужении на множество неособых точек из $W^\perp(f)$ является локальным гомеоморфизмом.*

Если x — особая $\perp^0$-блуждающая точка из дополнения к множеству $\mathrm{Linked}^\perp(f)$, то фактор-отображение разбиения на нейтральные сечения f в сужении на $W^\perp(f)$ является внутренним отображением.

Таким образом, вне образа множества $\mathrm{Linked}^{\perp}(f)$ фактор-пространство $X/_{O^{\perp}}$ устроено достаточно хорошо. Но в образе множества $\mathrm{Linked}^{\perp}(f)$ фактор-пространство $X/_{O^{\perp}}$ может быть устроено крайне плохо. Чтобы избавиться от этих патологий, необходимо огрубить разбиение на нейтральные компоненты. Например, самый простой способ — воспользоваться тем фактом, что множество $\mathrm{Linked}^{\perp}(f)$ — инвариантно и нейтрально инвариантно и сделать его элементом разбиения, стянув его образ в фактор-пространстве в точку. Такое фактор-пространство назовем *фактор-пространством по разбиению* $\perp^0$*-блуждающего множества на нейтральные сечения* и будем обозначать $X/_{\mathrm{Linked}^{\perp}}$ (либо $X/_{\Omega^{\perp}}$ в случаях, когда $\mathrm{Linked}^{\perp}(f) = \Omega^{\perp}(f)$, как, например, для накрытий окружности).

Однако при этом теряется часть информации о динамике отображения. Чтобы сохранить эту информацию, необходимо более тонкое разбиение на f — инвариантные нейтрально инвариантные подмножества, но, чтобы не получить патологии в полученном фактор-пространстве, элементы разбиения должны быть замкнутыми множествами.

Одно из хороших свойств разбиений на замкнутые множества — фактор-пространство нормального топологического пространства по замкнутому разбиению на замкнутые подмножества нормально.

5.2. Нейтральная компонента точки.

Определение 5.4. *Нейтральной компонентой точки x назовем пересечение прообразов $\varphi^{-1}(0)$ по всем непрерывным функциям $\varphi(p)$, таким, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(p)$ на каждом нейтральном сечении принимает постоянные значения.*

Нейтральную компоненту точки x обозначим как $\mathbf{Z}^{\perp}(x)$.

Заметим, что по определению нейтральная компонента является замкнутым множеством и представляет собой объединение нейтральных сечений.

Альтернативным способом можно было бы задать нейтральную компоненту, если определить на множестве точек рефлексивное симметричное отношение $\equiv^0_{pre}$: $x \equiv^0_{pre} y \Leftrightarrow \perp^0(x) \cap \perp^0(y) \neq \varnothing$ и по трансфинитной индукции расширять нейтральную компоненту, начиная с точки x, используя операции топологического замыкания и транзитивного замыкания по отношению $\equiv^0_{pre}$. Однако, такой способ выглядит слишком громоздким.

По определению, $\perp^0(x) \subset \mathbf{Z}^{\perp}(x)$. Разница между этими множествами, в частности, в том, что $x \in \mathbf{Z}^{\perp}(x)$, но x может и не принадлежать $\perp^0(x)$.

Замкнутое нейтрально инвариантное множество является насыщенным множеством относительно разбиения на нейтральные сечения. Однако отсюда не следует, что совокупность нейтральных компонент, содержащих точки этого замкнутого нейтрально инвариантного множества, совпадает с этим множеством.

Лемма 5.5. *Нейтральная компонента не зависит от выбора точки x.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть найдутся точки x и y такие, что y принадлежит нейтральной компоненте точки x, но x не принадлежит нейтральной компоненте точки y. Тогда, по определению, найдутся непрерывные функции $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$, такие, что $\phi_1(x) = \phi_1(y) = \phi_2(y) = 0$, $\phi_2(x) = c_2 \neq 0$.

Рассмотрим функцию $\phi_3(p) = \phi_2(p) - c_2$. Это разность непрерывных функций, принимающих постоянные значения на каждом нейтральном сечении, следовательно, тоже непрерывная функция, принимающая постоянные значения на каждом нейтральном сечении. Но тогда, по определению, y не может принадлежать нейтральной компоненте точки x, поскольку $\phi_3(x) = 0$, но $\phi_3(y) = -c_2$. Получили противоречие. □

Следствие 5.6. *Любые две нейтральные компоненты либо совпадают, либо не пересекаются.*

Следствие 5.7. *Если* $x \in \perp^0(y)$, *то* $\mathbf{Z}^\perp(x) = \mathbf{Z}^\perp(y)$.

Лемма 5.8. *Образ и прообраз нейтральной компоненты тоже являются нейтральными компонентами.*

Доказательство. Покажем, что образ нейтральной компоненты является нейтральной компонентой. Сначала покажем, что образ нейтральной компоненты лежит в нейтральной компоненте. Предположим от противного, что найдутся точки x и y, принадлежащие одной нейтральной компоненте, такие, что нейтральные компоненты $f(x)$ и $f(y)$ различны. Тогда найдется непрерывная постоянная на нейтральных сечениях функция ψ_1 такая, что $\psi_1(f(x)) = 0$, $\psi_1(f(y)) = c_1 \neq 0$.

Рассмотрим функцию $\psi_1 \circ f$. Имеем, что $\psi_1 \circ f(x) = 0$, $\psi_1 \circ f(y) = c_1 \neq 0$. Получили противоречие, так как по предположению x и y принадлежат одной нейтральной компоненте.

Покажем теперь, что прообраз нейтральной компоненты лежит в нейтральной компоненте. Предположим от противного, что найдутся точки x и y, принадлежащие одной нейтральной компоненте, такие, что нейтральные компоненты $f^{-1}(x)$ и $f^{-1}(y)$ различны.

Согласно предположению, найдется непрерывная постоянная на нейтральных сечениях функция ψ_1 такая, что $\psi_1(f^{-1}(x)) = 0$, $\psi_1(f^{-1}(y)) = c_1 \neq 0$.

Заметим, что, поскольку нейтральная компонента состоит из нейтральных сечений, а для произвольной точки все точки ее прообраза принадлежат одному нейтральному сечению, то все точки ее прообраза задают одну и ту же нейтральную компоненту.

Рассмотрим функцию $\psi_1 \circ f^{-1}$. Несмотря на то, что f^{-1} — многозначное отображение, $\psi_1 \circ f^{-1}$ определена корректно, так как ψ_1 — функция, постоянная на нейтральных сечениях. Имеем, что $\psi_1 \circ f^{-1}(x) = 0$, $\psi_1 \circ f^{-1}(y) = c_1 \neq 0$. Получили противоречие, так как по предположению x и y принадлежат одной нейтральной компоненте.

Это и доказывает лемму. $\square$

5.3. Фактор-гомеоморфизм разбиения на нейтральные компоненты.

Как следует из утверждений 5.5 и 5.6, внутренний эпиморфизм $f\colon M \to M$ порождает разбиение M на замкнутые непересекающиеся множества — нейтральные компоненты.

По построению, отображение f индуцирует гомеоморфизм на фактор-пространстве по разбиению на нейтральные компоненты $M/\mathbf{Z}^{\perp}$.

В результате, с каждым внутренним отображением можно связать последовательность многозначных нейтральных отображений $x \mapsto f^{-n} \circ f^{n}(x)$ и гомеоморфизм на фактор-пространстве нейтральных компонент. Эти отображения дают декомпозицию динамики внутреннего отображения, в том смысле, что нейтральные отображения индуцируют на фактор-пространстве тождественное отображение. По построению они являются топологическими инвариантами внутреннего отображения.

Заметим, что при переходе к фактор-гомеоморфизму часть исходной информации о динамике внутреннего отображения естественно теряется, даже с учетом последовательности нейтральных отображений.

Однако исходное внутреннее отображение можно полностью восстановить, если кроме фактор-гомеоморфизма и первого нейтрального отображения $f^{-1} \circ f(x)$ знать, как исходное отображение действует на хотя бы одном представителе каждого нейтрального сечения, т. е. нужно задать отображение на некотором аналоге фундаментальных окрестностей для нейтральных сечений.

Также, не гарантируется, что удастся получить нетривиальную декомпозицию динамики внутреннего отображения: ведь для некоторых отображений нейтральная компонента может совпасть со всем пространством M, что даст одноточечное фактор-пространство и тривиальный фактор-гомеоморфизм.

Однако, как будет далее показано на примерах, во многих случаях полученный фактор-гомеоморфизм действительно нетривиален, что делает его полезным инструментом изучения динамики внутренних отображений.

Упражнение 5.9. *Построить пример внутреннего отображения пространства M с нейтральной компонентой, совпадающей со всем пространством M.*

5.4. Метрические нейтральные компоненты.

Пусть M — сепарабельное метрическое пространство, ρ — метрика на M, $f\colon M \to M$ — внутренний эпиморфизм. Рассмотрим функцию $\kappa(x,y) = \inf\{\rho(p,q) | p \in O^{\perp}(x), q \in O^{\perp}(y)\}$. По определению, это функция, постоянная на нейтральных сечениях.

Лемма 5.10. *$\kappa(x,y)$ является непрерывной функцией на $M \times M$.*

Доказательство. Заметим, что $\kappa(x,y)$ — симметричная функция, поэтому достаточно доказать утверждение леммы для функции $\kappa(*,y)$ при фиксированном $y \in M$.

Предположим от противного, что $\exists x \in M$ и $\exists$ последовательность точек (a_n), $a_n \in M$, $n > 0 : \lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, но $\lim_{n\to\infty} \kappa(x_n,y) \neq \kappa(x,y)$.

Рассмотрим значение

$$\kappa(x,y) = \inf\{\rho(p,q) | p \in O^{\perp}(x), q \in O^{\perp}(y)\}.$$

Пусть этот infinum достигается на последовательности расстояний $\rho(x_n, y_n)$ между парами точек (x_n), (y_n), $(x_n) \in O^{\perp}(x)$, $(y_n) \in O^{\perp}(y)$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1$: $\forall n > N_1$ $\rho(x_n, y_n) - \kappa(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем $k > N_1$. Поскольку f — непрерывное отображение, то $O^{\perp}(a_n)$ поточечно сходится к $O^{\perp}(x)$. Поскольку f — дискретное отображение, то из $O^{\perp}(a_n)$ можно выделить подпоследовательность точек (b_m), $b_m \in O^{\perp}(a_m)$, сходящуюся к точке x_k. В частности,

$\exists N_2$: $\forall m > N_2$ $\rho(b_m, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} &|\kappa(a_n, y) - \kappa(x,y)| = \\ &= |\inf\{\rho(p,y) | p \in O^{\perp}(a_n), y \in O^{\perp}(y)\} - \kappa(x,y)| < \\ &< |\rho(b_m, x_k)| + |\rho(x_k, y_k) - \kappa(x,y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Устремив $\varepsilon \to 0$, получим, что $\lim_{n\to\infty} \kappa(x_n, y) = \kappa(x,y)$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Определим метрическую нейтральную компоненту

$$\rho^0_{\perp}(x) = \kappa^{-1}(x,*)(0).$$

Лемма 5.11. $\rho^0_{\perp}(x) = \mathbf{Z}^{\perp}(x)$.

Доказательство. Покажем, что $\mathbf{Z}^{\perp}(x) \supset \rho^0_{\perp}(x) = \kappa^{-1}(x,*)(0)$. В самом деле, предположим от противного, что найдется точка $y \in \kappa^{-1}(x,*)(0)$, такая, что $\mathbf{Z}^{\perp}(y) \neq \mathbf{Z}^{\perp}(x)$.

Поскольку $\kappa(x,y) = \inf\{\rho(p,q) | p \in O^{\perp}(x), q \in O^{\perp}(y)\} = 0$, найдутся последовательности точек $x_i \in O^{\perp}(x)$ и $y_i \in O^{\perp}(y)$, $\lim_{n\to\infty} \rho(p,q) = 0$. Однако тогда для любой непрерывной постоянной на нейтральных сечениях функции ψ_1, по определению $\mathbf{Z}^{\perp}(x)$, $\psi_1(x_i) = 0$, и по непрерывности

$lim_{n->\infty}\psi_1(y_i) = 0$. Поскольку ψ_1 постоянна на нейтральных сечениях, $\psi_1(y) = 0$. Следовательно, $y \in \mathbf{Z}^{\perp}(x)$. Получили противоречие.

Далее, так как $\kappa(x,*)$ — непрерывная функция, по построению постоянная на нейтральных сечениях, то по определению множества $\mathbf{Z}^{\perp}$, $\mathbf{Z}^{\perp}(x) \subset \kappa^{-1}(x,*)(0)$.

Следовательно, $\rho^0_{\perp}(x) = \kappa^{-1}(x,*)(0) = \mathbf{Z}^{\perp}(x)$. $\square$

Обозначим через $P_{\perp}$ проекцию на пространство разбиения на нейтральные компоненты, т. е. отображение $P_{\perp} : V \subset M \mapsto \{\cup_{x\in V}\mathbf{Z}^{\perp}(x)\}$.

Лемма 5.12. *Если V — замкнутое множество, то проекцию $P_{\perp}$ на пространство разбиения на нейтральные компоненты можно записать как отображение $P_{\rho} : V \subset M \mapsto \{p \in M | \rho(V, O^{\perp}(p)) = 0\}$*

Доказательство. Легко видеть из определения, что $P_{\rho}(V) \subset P_{\perp}(V)$. Покажем, что $P_{\perp}(V) \subset P_{\rho}(V)$. Предположим от противного, что найдется точка $y \in V$ такая, что $P_{\perp}(y) = \mathbf{Z}^{\perp}(y) \not\subset P_{\rho}(V)$. Поскольку функция $\psi_1(p) = \inf \rho(V, O^{\perp}(p))$ непрерывна и постоянна на нейтральных сечениях, при чем по предположению $\mathbf{Z}^{\perp}(y) \not\subset P_{\rho}(V)$, т. е. найдется точка $y_1 \in \mathbf{Z}^{\perp}(y)$, такая, что $\psi_1(y_1) \neq 0$, то и на всем множестве $\mathbf{Z}^{\perp}(y)$ $\psi_1(\mathbf{Z}^{\perp}(y)) \neq 0$ по определению нейтральной компоненты. Но по построению $\psi_1(y) = 0$. Получили противоречие. $\square$

5.4.1. Проекция на пространство разбиения.

Обозначим через $P_{\perp}$ проекцию на пространство разбиения на нейтральные компоненты, т. е. отображение $P_{\perp} : V \subset M \mapsto \{\cup_{x\in V}\mathbf{Z}^{\perp}(x)\}$.

Проблема 5.13. *Верно ли, что на компактном множестве $P_{\perp}$ полунепрерывно снизу?*

Замечание 5.14. *Если V — замкнутое множество, а $P_\perp$ полунепрерывно снизу, то проекцию $P_\perp(V)$ на пространство разбиения на нейтральные компоненты можно записать как пересечение прообразов $\varphi^{-1}(0)$ по всем непрерывным функциям $\varphi(p)$, таким, что $\varphi(V) = 0$ и $\varphi(x)$ на каждом нейтральном сечении принимает постоянные значения.*

Если $P_\perp$ полунепрерывно снизу, то фактор-пространство разбиения на нейтральные компоненты хаусдорфово, см. [**87**], §19, [**88**], §43. Если $P_\perp$ полунепрерывно сверху, то фактор-пространство разбиения на нейтральные компоненты регулярно.

Проблема 5.15. *Верно ли, что на компактном множестве $P_\perp$ полунепрерывно снизу?*

Пример 5.16. *Пример индуцированного гомеоморфизма на фактор-пространстве по разбиению на нейтральные компоненты.*

Построение. Рассмотрим простейший комплексный полином $z^n\colon S^2 \to S^2$, $n > 1$. Легко видеть, что для него точки нейтрального сечения имеют один и тот же радиус. Поэтому у этого отображения его нейтральные компоненты образуют слоение S^2 на окружности с центром в 0. Его фактор-пространство по разбиению на нейтральные компоненты можно гомеоморфно отобразить на отрезок $[0, 8]$ так, чтобы точка 1 была образом окружности радиуса 1. У индуцированного гомеоморфизма точки 0 и 8 неподвижные притягивающие, точка 1 — неподвижная отталкивающая. Оставшиеся точки блуждающие. $\square$

У рассмотренного в предыдущем примере комплексного полинома z^n слоение на окружности с центром в 0 — это не просто некоторое инвариантное слоение, которых у полинома z^n бесконечно много, а, поскольку оно состоит из нейтральных компонент, которые являются топологическими инвариантами отображения, то это слоение выделенное, оно является топологическим инвариантом этого полинома. У всех внутренних отображений, топологически сопряженных данному полиному, также найдется слоение на нейтральные компоненты, при чем оно будет образом слоения на окружности с центром в 0 полинома z^n под действием сопрягающего гомеоморфизма.

Следующее утверждение показывает, что подобные топологическим инвариантные слоения на нейтральные компоненты естественно возникают у многих классов голоморфных отображений, и в особенности у полиномов, у которых бесконечность всегда является суперпритягивающей точкой.

Утверждение 5.17. *Бассейн притяжения суперпритягивающей точки голоморфного отображения Римановой поверхности обладает топологически инвариантным слоением на гомеоморфные окружности нейтральные компоненты.*

Доказательство. Согласно теореме Бехтера в окрестности суперпритягивающей точки голоморфное отображение голоморфно сопряжено функции w^n, для которой слоение на нейтральные компоненты существует (см. предыдущий пример 5.16). Поскольку слоение на нейтральные компоненты является топологическим инвариантом, то при сопряжении оно переходит в слоение на нейтральные компоненты бассейна притяжения суперпритягивающей точки. $\square$

Заметим, что для бассейна притяжения суперпритягивающей точки голоморфного отображения разбиение на нейтральные компоненты совпадает с разбиением на эквипотенциальные кривые соответствующей функции Грина, а соответствующее фактор-пространство бассейна притяжения по нейтральным компонентам представляет собой отрезок.

5.5. Свойства динамики индуцированного гомеоморфизма.

Отметим несколько простых свойств отображения $P_\perp$.

Если множество $O^\perp(x)$ — вырожденное и состоит из конечного числа точек, то по определению оно совпадает со своей нейтральной компонентой. Отсюда образ вырожденного нейтрального сечения — точка.

По построению f полусопряжено своему индуцированному гомеоморфизму $f/P_\perp$.

Отсюда следуют такие свойства отображения $P_\perp$, как, например, образ впоследствии периодической траектории является периодической траекторией с периодом — делителем периода впоследствии периодической траектории.

Упражнение 5.18. *Построить пример индуцированного гомеоморфизма, такого, что образ впоследствии периодической траектории с периодом $n > 1$ является неподвижной точкой.*

ГЛАВА 6

Цепно-рекуррентные множества и основная теорема динамики внутренних отображений.

6.1. Введение.

Теория цепно-рекуррентных множеств, о которых будет идти речь, была построена Ч. Конли в [**61**] для потоков в компактном случае, обобщена Дж. Френксом [**70**] на гомеоморфизмы и М. Харли в [**78**] на эпиморфизмы (компактный случай).

Заметим, что в настоящее время есть обобщения теории цепно-рекуррентных множеств и для некомпактного случая в терминах слабых аттракторов и существования функции Ляпунова, [**80, 81**], а также обобщения на многозначные отображения [**50**].

В разделе 6.2 приводится краткое изложение этой теории для эпиморфизмов в компактном случае (для которого гарантируется существование пар аттрактор-репеллер), следуя [**78, 48**].

В разделе 6.3 строится специфическая для внутренних отображений теория цепно-рекуррентных множеств, насыщенных относительно нейтральных сечений, и показывается, что эта теория эквивалентна стандартной теории цепно-рекуррентных множеств для фактор-гомеоморфизма внутреннего отображения по своим нейтральным компонентам из раздела 5.3.

Рассматриваемые в разделе 6.2 понятия теории цепно-рекуррентных множеств возникли в результате переноса соответствующих понятий с потоков на гомеоморфизмы, затем на эпиморфизмы компактных топологических пространств. При этом, как и при переносе других определений, в случае переноса теории цепно-рекуррентных множеств на эндоморфизмы, особенно не на компактных множествах, возникают различные ньюансы в определениях, которые в некоторых случаях могут порождать разные (отличающиеся инывриантными множествами) теории цепно-рекуррентных множеств.

Например, как показывает пример 6.39, дословно определенное цепно-рекуррентное множество не является достаточно "широким": точки, являющиеся неблуждающими согласно дословному переносу этого понятия с гомеоморфизмов на эпиморфизмы, могут и не быть цепно-рекуррентными согласно такому определению.

В разделе 6.4 будут рассмотрены альтернативные способы обобщения этих понятий, потенциально приводящее к своим оригинальным теориям.

6.2. Стандартная теория. Компактный случай.

Приведем здесь доказательство "основной теоремы динамики" Конли [**61**], обобщенной на эпиморфизмы М. Харли в [**78, 80**].

Смысл этой теоремы состоит в разложении динамики системы на "цепно-рекуррентную" и "градиентоподобную" составляющие.

6.2.1. Цепно-рекуррентные множества. Цепно-рекуррентные множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Сравнительно недавно они были введены Конли в работе [**61**] и оказались удобным инструментом для описания динамики гомеоморфизмов.

Напомним оригинальное определение по Конли и Френксу [**61, 70**]:

Определение 6.1. *Пусть $\varepsilon > 0$. ε-цепью называется конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $n > 0$, $d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$ (d — метрика на M), $j = 1 \ldots n$.*

Будем говорить, что ε-цепь начинается в x_0, заканчивается в x_n и имеет длину n. Обозначим через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ множество точек, являющихся концами начинающихся в x ε-цепей. Если $y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$, будем писать, что $x \dashv_\varepsilon y$. Будем еще говорить, что y является ε - достижимым для x.

Определение 6.2. $\mathcal{C}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$.

Если $y \in \mathcal{C}(x, f)$, будем писать, что $x \dashv y$.

Замечание 6.3. *Отношение $\dashv_\varepsilon$ (и, как следствие, $\dashv$) транзитивно: $x \dashv_\varepsilon y$ и $y \dashv_\varepsilon z \Rightarrow x \dashv_\varepsilon z$.*

Определение 6.4. *Точка $x \in M$ называется цепно-рекуррентной, если $x \in \mathcal{C}(x, f)$.*

Множество цепно-рекуррентных точек обозначается через $\mathcal{C}(f)$.

Определим отношение на $\mathcal{C}(f)$ как $x \dashv\vdash y \Rightarrow x \dashv y$ и $y \dashv x$.

Замечание 6.5. *Отношение $\dashv\vdash$ является отношением эквивалентности.*

Определение 6.6. *Классы эквивалентности точек из $\mathcal{C}(f)$ по отношению $\dashv\vdash$ называются цепно - рекуррентными классами.*

Если M — компактно, то $\mathcal{C}(f)$ — компактное непустое множество, и имеет место следующее включение:

$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f)$.

6.2.2. Основная теорема динамики.

Приведем здесь доказательство “основной теоремы динамики” Конли [**61**], обобщенной на эпиморфизмы М. Харли в [**78, 80**]. Смысл этой теоремы в том, что цепно-рекуррентные множества дают максимальное возможное разложение динамической системы на “градиентоподобную” и “транзитивную” части.

Теорема 6.7 (Основная теорема динамики внутренних эпиморфизмов, [**78, 80**].). *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение X на себя. Тогда для f существует полная функция Ляпунова Λ. Это значит, что*

(i) $\Lambda\colon X \to [0,1]$ *является непрерывной функцией, невозрастающей вдоль всех частных траекторий f, постоянной на частных траекториях точек цепно-рекуррентного множества f, и строго убывающей на частных траекториях любых других точек;*

(ii) Λ *отображает цепно-рекуррентное множество f в подмножество стандартного Канторова множества на отрезке $[0,1]$, отображая каждую цепно-рекуррентную компоненту в одно значение и отображая различные цепно-рекуррентные компоненты в различные значения;*

(iii) *если C, C' — цепно-рекуррентные компоненты, такие, что $\forall\ \varepsilon \in P$ найдется ε-цепь из C в C', то $\Lambda(C) > \Lambda(C')$.*

(1) $\varphi(x) = \varphi(f(x)) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(f)$ *(постоянна на каждой цепно-рекуррентной компоненте).*

(2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}(x, f)$ *(различна на разных цепно-рекуррентных компонентах).*

(3) *компактное множество $\varphi(\mathcal{C}(f)) \subset \mathbb{R}$ обладает пустой внутренностью.*

6.2.3. Пары аттрактор-репеллер и фильтрации.

Приведем определения аттрактора и репеллера с учетом специфики эпиморфизмов.

Определение 6.8. *Открытое множество U называется строго притягивающим, если $f(\overline{U}) \subset U$.*

Строго притягивающее[1] множество обладает тем свойством, что для любой точки из $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ ее ω - предельное множество содержится в инвариантном множестве $\Lambda = \cap_{n\geq 0} f^n(U)$.

Определение 6.9. *Инвариантное компактное множество K называется аттрактором, если у него существует строго притягивающая окрестность U, такая, что $K = \cap_{n\geq 0} f^n(U)$. U назовем* изолирующей окрестностью *аттрактора K.*

Определение 6.10. *Открытое множество U называется строго отталкивающим, если $\overline{U} \subset f(U)$.*

Определение 6.11. *Инвариантное компактное множество K называется репеллером, если у него существует строго отталкивающая окрестность U, такая, что $K = \cap_{n\geq 0} f^{-n}(U)$. U назовем* изолирующей окрестностью *репеллера K.*

Замечание 6.12. *Если U — строго притягивающее открытое множество, то $X \setminus \overline{f(U)}$ является строго отталкивающим множеством.*

Замечание 6.13. *Как следует из замечания 6.12, с каждым аттрактором на самом деле связана пара аттрактор - репеллер, так же, как и в случае гомеоморфизмов.*

[1] В литературе также часто встречается термин строго инвариантное множество.

Определение 6.14. *Функция $\varphi(x)$ называется* функцией Ляпунова*, если она не возрастает вдоль каждой орбиты: $\varphi(f(x)) \leq \varphi(x)\ \forall x$.*

Дадим доказательство для формулировки теоремы 6.7 приведенной в работе [**78**].

Теорема 6.15 (Основная теорема динамики внутренних эпиморфизмов, [**78**].). *Пусть $f\colon X \to X$ — внутренний эпиморфизм компактного метрического пространства X. Тогда существует функция Ляпунова $\varphi(x)$, такая, что*

(1) *$\varphi(x) = \varphi(f(x)) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(f)$ (постоянна на каждой цепно-рекуррентной компоненте).*
(2) *$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}(x, f)$ (различна на разных цепно-рекуррентных компонентах).*
(3) *компактное множество $\varphi(\mathcal{C}(f)) \subset \mathbb{R}$ обладает пустой внутренностью.*

Проведем доказательство теоремы 6.15, взяв в качестве основы доказательство соответствующей теоремы для гомеоморфизмов, как изложено в [**47**]. Разобьем доказательство на несколько этапов.

Теорема 6.16. *Пусть (A, R) — пара аттрактор - репеллер внутреннего эпиморфизма f компактного метрического пространства X. Тогда существует функция Ляпунова $\varphi(x)$, такая, что*

(1) *$\varphi(R) = 1$ и $\varphi(A) = 0$.*
(2) *$\forall x \notin A \cup R\ \varphi(f(x)) < \varphi(x)$.*

Такую функцию Ляпунова будем называть функцией Ляпунова относительно пары (A, R).

Доказательство. Пусть U_0 — изолирующая окрестность A, и пусть U – внутренность $\overline{U_0}$. Это тоже изолирующая окрестность A, при чем $\operatorname{Int} \overline{U} = U$. Заметим, что любая частная траектория, содержащая точку $x \notin A \cup R$, пересекает $U \setminus f(U)$ в точности в одной точке.

Рассмотрим непрерывную функцию - разбиение единицы $\psi\colon X \to [0,1]$ такую, что $\psi(f(\overline{U})) = 0$, $\psi(X \setminus U) = 1$, и $\psi \in (0,1)$ для $x \in U \setminus f(\overline{U})$. Отметим, что $\psi(R) = 1$ и $\psi(A) = 0$, и не возрастает вдоль орбит. Именно, $\psi(f(x)) < \psi(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in X \setminus U$ и $f(x) \in U$, или $x \notin f(\overline{U})$ и $f(x) \in \operatorname{Int} \overline{U}$.

Таким образом, для любой точки $x \notin A \cup R$ ψ возрастает не более чем дважды, в зависимости от того, пересекается ли траектория точки x с границей ∂U или нет.

Обозначим $\psi_n(x) = \psi(f^n(x))$, $n \leq 0$, а для $n > 0$ воспользуемся теоремой 2.24. Возьмем последовательность $a_n > 0$, такую, что $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n = 1$ и обозначим

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \psi_n$$

Полученная функция φ непрерывна, равна 1 на R и 0 на A, и строго убывает вдоль положительной полутраектории любой точки $x \notin A \cup R$, поскольку для такой точки найдется по крайней мере одно n, для которого $\psi_n(x) < \psi_n(f(x))$. □

Замечание 6.17. *Функцию φ в условиях теоремы 6.16 можно выбрать принадлежащей классу C^∞. Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству для гомеоморфизмов.*

Замечание 6.18. *Пусть U — строго притягивающее открытое множество. Тогда любое открытое множество V, такое, что $f(U) \subset V \subset U$, тоже является строго притягивающим и определяет ту же пару аттрактор - репеллер, что и U.*

Как следствие, получаем следующую лемму:

Лемма 6.19. *Пусть* $f\colon X \to X$ *— внутренний эпиморфизм компактного метрического пространства* X. *Тогда множество пар аттрактор - репеллер не более чем счетно.*

Доказательство. Рассмотрим счетную базу открытых множеств $\mathfrak{O} = \{\mathfrak{O}_n\}$ топологии X. Поскольку X – компакт, то для любого аттрактора A, пользуясь замечанием 6.18, его строго притягивающее открытое множество V можно выбрать как объединение конечного числа множеств из $\mathfrak{O}$.

Множество таких притягивающих открытых множеств V счетно, поскольку $\mathfrak{O}$ счетно, что и доказывает лемму. $\square$

Пусть $a_i > 0$ — последовательность, такая, что $\sum_i a_i = 1$, при чем $\forall i\ \sum_{i+1}^{+\infty} a_j < \frac{1}{2}a_i$. В частности, из этого свойства следует, что если для двух целочисленных последовательностей $\mu_i, \nu_i \in 0, 1$ выполняется равенство $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i a_j = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_i a_j$, то $\mu_i = \nu_i$; в частности, множество всевозможных значений $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i$, по всем $\mu_i \in 0, 1$, представляет собой Канторово множество.

Соласно лемме 6.19 множество пар аттрактор - репеллер не более чем счетно. Пусть $\{\{A_i, B_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ — некоторое перечисление этого множества.

Обозначим $AR(f) = \cap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup R_i)$. Введем на $AR(f)$ отношение эквивалентности $\approx_{AR}$. Именно, $\forall x, y \in AR(f)$ $x \approx_{AR} y \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N} x \in A_i \Leftrightarrow y \in A_i)$.

Обозначим для каждого $i \in \mathbb{N}$ через φ_i функцию Ляпунова относительно пары $\{A_i, B_i\}$. Пусть $\varphi = \sum_i a_j \varphi_i$.

Теорема 6.20. *Для так определенной функции* φ *справедливы следующие свойства.*

(1) $\forall x \in X\ \varphi(f(x)) \leq \varphi(x)$.
(2) $\varphi(x) = \varphi(f(x)) \Leftrightarrow x \in \cap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i)$.
(3) $\forall x, y \in AR(f)\ \varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x \approx_{AR} y$.

(4) $\varphi(AR(f)) \subset \mathbb{R}$ *имеет пустую внутренность.*

Доказательство. Функция φ убывает вдоль орбит, поскольку является суммой убывающих вдоль орбит функций. При этом, поскольку все a_i больше 0, то $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ тогда и только тогда, если $\forall i\ \psi_i(f(x)) = \psi_i(x)$, другими словами, когда $x \in A_i \cup B_i\ \forall i \in \mathbb{N}$. Это доказывает первое и второе свойства.

Далее, заметим, что если $x \in AR(f)$, то $\varphi = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_j \mu_i$, где $\mu_i = 0$ если $x \in A_i$ и $\mu_i = 1$ если $x \in R_i$. Третье и четвертое свойства тогда следуют из выбора чисел a_i. □

Лемма 6.21. $\mathcal{C}(f) \subset AR(f)$.

Доказательство. Пусть ψ — функция Ляпунова относительно пары аттрактор - репеллер (A, R). Пусть $\varepsilon > 0$. рассмотрим множества $A_\varepsilon = \psi^{-1}([0, 2\varepsilon])$ и $R_\varepsilon = \psi^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$.

Пусть $\delta_0 = \inf\{\psi(x) - \psi(f(x)) \| \psi(x) \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]\}$. Заметим, что $\delta_0 > 0$. Пусть $\delta = \inf\{\delta_0, \varepsilon\}$. Отметим, что если $x_0 \in \psi^{-1}([2\varepsilon, 1 - \varepsilon])$ и если последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ является δ-цепью, то $\psi(x_n) \leq \psi(x_0) - \frac{1}{2}$.

Пусть $x \in \mathcal{C}(f)$. Тогда $x \dashv_\delta x$. Из вышесказанного следует, что $x \in A_\varepsilon \cup R_\varepsilon$. Отсюда следует, что $x \in A \cup R = \cap_\varepsilon A_\varepsilon \cup R_\varepsilon$. □

Лемма 6.22. *Если $x \notin \mathcal{C}(f)$ то существует пара аттрактор - репеллер (A, R) такая, что $x \notin A \cup R$.*

Доказательство. Обозначим $W^u_\varepsilon(x) = \{y \| y \dashv_\varepsilon x\}$. По определению, это открытое множество. При этом, по определению $\dashv_\varepsilon$, $\frac{\varepsilon}{2}$ окрестность $f(W^u_\varepsilon(x))$ содержится в $W^u_\varepsilon(x)$. Как следствие, $f(\overline{W^u_\varepsilon(x)}) \subset W^u_\varepsilon(x)$ и $W^u_\varepsilon(x)$ является строго притягивающим множеством.

Рассмотрим $x \notin \mathcal{C}(f)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $x \notin W^u_\varepsilon(x)$. Но $f(x) \in W^u_\varepsilon(x)$ по определению. Следовательно, x не принадлежит ни аттрактору, ни репеллеру, ассоциированному с окрестностью $W^u_\varepsilon(x)$. □

Как следствие лемм 6.21 и 6.22 получаем

Следствие 6.23. $\mathcal{C}(f) = AR(f)$.

Следующая лемма заканчивает доказательство теоремы 6.7.

Лемма 6.24. *Если* $x, y \in \mathcal{C}(f)$, *то* $x \approx_{AR} y \Leftrightarrow x \dashv\vdash y$.

Доказательство. Пусть x, y не эквивалентны относительно $x \dashv\vdash y$. Тогда, к примеру, $y \notin W^u_\varepsilon(x)$. Тогда, для соответствующей пары аттрактор - репеллер, x принадлежит аттрактору, а y — репеллеру, так что x и y не эквивалентны относительно $\approx_{AR}$.

В другую сторону, если x принадлежит аттрактору, а y — репеллеру, то найдется такое ε, что y не является ε - достижимым для x. □

6.3. Цепно-рекуррентная теория для нейтрально инвариантных множеств.

Теория цепно-рекуррентных множеств применительно к внутренним отображениям порождает еще один набор топологических инвариантов.

В разделе 5.3 было описано построение фактор-гомеоморфизма, представляющго собой максимальное возможное разложение внутреннего отображения на "гомеоморфизм" и "нейтральное отображение".

Фактор-гомеоморфизм обладает собственным набором топологических инвариантов, которые наследуются оригинальным внутренним отображением. Соответственно, среди топологических инвариантов внутреннего отображения есть и такой экзотический инвариант, как цепно-рекуррентные множество фактор-гомеоморфизма.

Интересно, что соответствующую цепно-рекуррентную теорию можно построить "в лоб", как цепно-рекуррентную теорию для ε-цепей специального вида, которые далее будут названы ε-цепями нейтральных сечений.

Приведем здесь базовые определения, с помощью которых строятся соответствующие цепно-рекуррентные множества, определение соответствующей функции Ляпунова и формулировку основной теоремы динамики для ε-цепей нейтральных сечений.

Как будет затем показано, соответствующая функция Ляпунова постоянна на нейтральных компонентах, и таким образом, является функцией Ляпунова обычного цепно-рекуррентного множества фактор-гомеоморфизма. Это избавляет от необходимости доказывать соответствующие теоремы, в частности, основную теорему динамики для ε-цепей нейтральных сечений. так как так построенная теория ε-цепей нейтральных сечений сводится к стандартной теории обычных ε-цепей для фактор-гомеоморфизма.

6.3.1. ε-цепь для нейтральных сечений.

Определение 6.25. *Пусть $\varepsilon > 0$. ε-цепью нейтральных сечений назовем конечную последовательность точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, где $n > 0$, $d(O^{\perp}(f(x_{j-1})), x_j) < \varepsilon$ (d — метрика на M), $j = 1 \dots n$.*

Будем говорить, что ε-цепь начинается в x_0, заканчивается в x_n и имеет длину n. Обозначим через $\mathcal{C}^{\perp}_{\varepsilon}(x, f)$ множество точек, являющихся концами начинающихся в x ε-цепей. Если $y \in \mathcal{C}^{\perp}_{\varepsilon}(x, f)$, будем писать, что $x \dashv^{\perp}_{\varepsilon} y$. Будем еще говорить, что y является ε - достижимым для x.

Определение 6.26. $\mathcal{C}^{\perp}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}^{\perp}_{\varepsilon}(x, f)$.

Если $y \in \mathcal{C}^{\perp}(x, f)$, будем писать, что $x \dashv^{\perp} y$.

Замечание 6.27. *Отношение $\dashv^{\perp}_{\varepsilon}$ (и, как следствие, $\dashv^{\perp}$) транзитивно: $x \dashv^{\perp}_{\varepsilon} y$ и $y \dashv^{\perp}_{\varepsilon} z \Rightarrow x \dashv^{\perp}_{\varepsilon} z$.*

Определение 6.28. *Точку $x \in M$ назовем цепно-рекуррентной относительно нейтральных сечений, если $x \in \mathcal{C}^{\perp}(x, f)$.*

Множество цепно-рекуррентных относительно нейтральных сечений точек обозначим через $\mathcal{C}^{\perp}(f)$.

Определим отношение на $\mathcal{C}^{\perp}(f)$ как $x \dashv\vdash^{\perp} y \Rightarrow x \dashv^{\perp} y$ и $y \dashv^{\perp} x$.

Замечание 6.29. *Отношение* $\dashv\vdash^{\perp}$ *является отношением эквивалентности.*

Определение 6.30. *Классы эквивалентности точек из* $\mathcal{C}^{\perp}(f)$ *по отношению* $\dashv\vdash^{\perp}$ *назовем цепно - рекуррентными классами нейтральных сечений.*

6.3.2. Пары аттрактор-репеллер и фильтрации для нейтральных сечений. Напомним, что множество U называется нейтрально инвариантным (определение 3.49), если $\forall x \in U\ O_f^{\perp}(x) \subset U$.

Определение 6.31. *Инвариантное компактное множество* K *назовем аттрактором нейтральных сечений, если у него существует нейтрально инвариантная строго притягивающая окрестность* U, *такая, что*

$$K = \cap_{n \geq 0} f^n(U).$$

U *назовем* нейтрально инвариантной изолирующей окрестностью *аттрактора нейтральных сечений* K.

Определение 6.32. *Инвариантное компактное множество* K *назовем репеллером нейтральных сечений, если у него существует нейтрально инвариантная строго отталкивающая окрестность* U, *такая, что*

$$K = \cap_{n \geq 0} f^{-n}(U).$$

U *назовем* нейтрально инвариантной изолирующей окрестностью *репеллера нейтральных сечений* K.

Замечание 6.33. *Согласно 6.12, с каждым аттрактором нейтральных сечений связан репеллер нейтральных сечений, образующие пару аттрактор нейтральных сечений — репеллер нейтральных сечений.*

Определение 6.34. *Функция* $\varphi(x)$ *называется* функцией Ляпунова нейтральных сечений, *если она постоянна на нейтральных сечениях и не возрастает вдоль каждой орбиты:* $\varphi(f(x)) \leq \varphi(x)\ \forall x$.

Теорема 6.35 (Аналог основной теоремы динамики для нейтральных сечений, [**78**].). *Пусть* $f\colon X \to X$ — *внутренний эпиморфизм компактного метрического пространства* X. *Тогда существует функция Ляпунова нейтральных сечений* $\varphi(x)$, *такая, что*

(1) $\varphi(x)$ *постоянна на каждом нейтральном сечении.*
(2) $\varphi(x) = \varphi(f(x)) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}^{\perp}(f)$ *(постоянна на каждой нейтрально инвариантной цепно-рекуррентной компоненте).*
(3) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}^{\perp}(x, f)$.
(4) *компактное множество* $\varphi(\mathcal{C}^{\perp}(f)) \subset \mathbb{R}$ *обладает пустой внутренностью.*

Относительно доказательства теоремы 6.35 отметим, что искомая функция Ляпунова нейтральных сечений $\varphi(x)$ должна быть постоянна на каждом нейтральном сечении. Но, тогда, по определению 5.4, она будет постоянна и на нейтральных компонентах. Следовательно, функция Ляпунова нейтральных сечений $\varphi(x)$ индуцирует функцию Ляпунова обычного цепно-рекуррентного множества на фактор-пространстве нейтральных сечений, и наоборот, если на фактор-пространстве нейтральных сечений существует обычная функция Ляпунова, как в теореме 6.7, то она индуцирует функцию Ляпунова нейтральных сечений.

Это избавляет от необходимости доказывать соответствующие теоремы, так как так при условии, что фактор -пространство нейтральных сечений является достаточно хорошим топологическим пространством, построенная теория ε-цепей нейтральных сечений сводится к стандартной теории обычных ε-цепей для фактор-гомеоморфизма.

6.4. Особенности определения цепно-рекуррентных множеств для необратимых отображений.

ε-цепь можно еще назвать конечной ε-O^+ траекторией. Казалось бы, в теории цепно-рекуррентных множеств можно было бы рассматривать и другие цепи. Например, заменив в определении f на f^{-1}, мы бы получили конечную ε-O^- траекторию.

При внимательном рассмотрении определения 6.1 возникают некоторые вопросы. Первое замечание состоит в том, что ε-цепь в этом определении не симметрична.

Так как цепно-рекуррентная точка x соединена с собой ε-O^+ цепью, то пройдя по точкам этой цепи в противоположном направлении, мы получим, что x соединена с собой некоторым аналогом ε-O^- цепи относительно f^{-1}, но вид этого аналога несколько отличается от ε-цепи, определенной в 6.1.

Назовем ε-цепь из определения 6.1 ε-цепью с пост-возмущением. Это определение еще можно переписать следующим образом:

Определение 6.36. *ε-цепью с пост-возмущением длины $n > 0$ назовем конечную последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, где $f(x_{2j}) = x_{2j+1}$, $d(x_{2j+1}, x_{2j+2}) < \varepsilon$ (d — метрика на M), $j = 0 \ldots n-1$.*

Дадим еще одно определение.

Определение 6.37. *ε-цепью с пре-возмущением длины $n > 0$ назовем конечную последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, где $f(x_{2j+1}) = x_{2j+2}$, $d(x_{2j}, x_{2j+1}) < \varepsilon$ (d — метрика на M), $j = 0 \ldots n-1$.*

Вообще говоря, определения 6.36 и 6.37 не эквивалентны, что можно видеть на примере разрывных отображений.

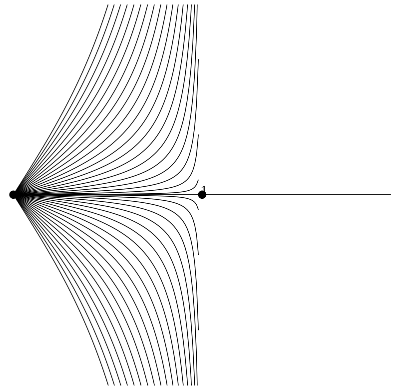

Рис. 6.1. Разрывное отображение.

В этих терминах, в общем случае, если f соединяет x с точкой y ε-цепью с пост-возмущением, то f^{-1} соединяет y с точкой x ε-цепью с пре-возмущением,

Можно показать, что если для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ f равномерно непрерывно в некоторой окрестности $\mathcal{C}_{\varepsilon_1}(x, f)$, (в частности, это справедливо, если M — компакт), то найдется $\varepsilon_2 > 0$, такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_2$, если f соединяет x с точкой y ε-цепью с пост-возмущением, то заодно f соединяет x с точкой y и ε-цепью с пре-возмущением.

Из этого факта следует эквивалентность соответствующих теорий для равномерно непрерывных гомеоморфизмов.

Для общего случая более подходит следующее определение:

Определение 6.38. *Симметричной ε-цепью длины $n > 0$ назовем конечную последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$, где $f(x_{2j+1}) = x_{2j+2}$, $d(x_{2j}, x_{2j+1}) < \varepsilon$, (здесь d — метрика на M), $j = 0 \ldots n-1$, $d(x_{2n}, x_{2n+1}) < \varepsilon$.*

Обозначим через $\mathcal{C}^{pre}(f)$ цепно-рекуррентное множество, порожденное ε-цепями с пре-возмущением, через

$\mathcal{C}^{post}(f)$ — цепно-рекуррентное множество, порожденное ε-цепями с пост-возмущением, и через $\mathcal{C}^{sym}(f)$ — цепно-рекуррентное множество, порожденное симметричными ε-цепями.

Если цепно-рекуррентная точка x соединена с собой ε цепью для f, то пройдя по точкам этой цепи в противоположном направлении, мы получим, что x соединена с собой симметричной ε цепью для f^{-1} и наоборот. Это означает, что по определению $\mathcal{C}^{sym}(f) = \mathcal{C}^{sym}(f^{-1})$. Также, прямо из определения следует, что $\mathcal{C}^{post}(f) \subset \mathcal{C}^{sym}(f)$, $\mathcal{C}^{pre}(f) \subset \mathcal{C}^{sym}(f)$,

Из определения легко следует, что в и в наиболее общем случае определения следует только, что $\Omega^{+}(f) \subset \mathcal{C}^{sym}(f)$.

Заметим, что для $\Omega(f)$ это, вообще говоря, не так, поскольку это не так для $\Omega^{-}(f)$.

Пример 6.39. $\Omega^{-}(f) \not\subset \mathcal{C}^{sym}(f)$.

Построение. Для примера достаточно рассмотреть какое-либо отображение с супернеблуждающей точкой. Например, рассмотрим пример 4.36. В этом примере после построения мы получаем дерево X и отображение $f : X \to X$, в котором все точки склейки (счетное число) супернеблуждающие, поскольку как угодно малая окрестность точки склейки имеет непустое пересечение со своим прообразом под действием f^{-1}, следовательно, $\Omega^{-}(f) \neq \varnothing$. Однако, как легко видеть, $\mathcal{C}^{sym}(f) = \varnothing$. □

Данный пример показывает, что стандартное определение для необратимых отображений в некоторых случаях плохо согласовано с множеством неблуждающих точек.

Хотелось бы определить такой аналог цепно-рекуррентного множества, который всегда содержал бы в себе супернеблуждающие точки.

6.4.1. Цепно-рекуррентное множество широких обратных ε-цепей.

Определение 6.40. *Пусть $\varepsilon > 0$. Широкой обратной ε-цепью длины $n > 0$ назовем конечную последовательность замкнутых множеств $S_0, S_1, \ldots, S_{2n+1}$, где $f^{-1}(S_{2j+1}) = x_{2j+2}$, $d(S_{2j}, S_{2j+1}) < \varepsilon$, (здесь d — метрика на M), $j = 0 \ldots n-1$, $d(S_{2n}, S_{2n+1}) < \varepsilon$.*

Будем говорить, что обратная ε-цепь начинается в x_0, если $S_0 = x_0$. Будем говорить, что обратная ε-цепь достигает точки y, если $y \in S_{2n+1}$. Обозначим через $\mathcal{C}^*_\varepsilon(x, f)$ множество точек, достижимых обратными ε-цепями, начинающимися в x. Если $y \in \mathcal{C}^*_\varepsilon(x, f)$, будем писать, что $x \lhd_\varepsilon y$. Будем еще говорить, что y является ε - достижимым для x.

Определение 6.41. $\mathcal{C}^*(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{C}^*_\varepsilon(x, f)$.

Если $y \in \mathcal{C}^*(x, f)$, будем писать, что $x \lhd y$.

Замечание 6.42. *Отношение $\lhd_\varepsilon$ (и, как следствие, $\lhd$) транзитивно: $x \lhd_\varepsilon y$ и $y \lhd_\varepsilon z \Rightarrow x \lhd_\varepsilon z$.*

Определение 6.43. *Точка $x \in M$ называется цепно-рекуррентной относительно широких обратных ε-цепей, если $x \in \mathcal{C}^*(x, f)$.*

Обозначим множество $\mathcal{C}^*(f)$. Множество точек цепно-рекуррентных относительно широких обратных ε-цепей обозначается через $\mathcal{C}^*(f)$.

Определим отношение на $\mathcal{C}^*(f)$ как $x \lhd\!\rhd y \Rightarrow x \lhd y$ и $y \lhd x$.

Замечание 6.44. *Отношение $\lhd\!\rhd$ является отношением эквивалентности.*

Определение 6.45. *Классы эквивалентности точек из $\mathcal{C}^*(f)$ по отношению $\lhd\!\rhd$ назовем цепно - рекуррентными классами широких обратных ε-цепей.*

Если M — компактно, то $\mathcal{C}^*(f)$ — компактное непустое множество, и совпадает с классическим цепно - рекуррентным множеством: $\mathcal{C}^*(f) = \mathcal{C}(f)$.

В общем же случае это разные отношения эквивалентности и, соответственно, цепно-рекуррентные множества у них могут быть разные.

ГЛАВА 7

Внутренние отображения одномерных многообразий.

В данном разделе мы познакомимся с внутренними отображениями одномерных многообразий — числовой прямой $\mathbb{R}$ и окружности S^1.

Одномерные внутренние отображения специфичны тем, что в особой точке внутреннее отображение отображает открытый интервал на полузамкнутый. Это возможно либо в случае, если одномерное многообразие имеет край (например, замкнутый отрезок) либо в случае топологических пространств, не являющихся многообразиями, таких, как, например, деревья, но не в рассматриваемом здесь случае. Поэтому внутренние отображения одномерных многообразий выделяются тем, что не имеют особых точек и являются локальными гомеоморфизмами. При этом окружность S^1 допускает разветвленные накрытия, а числовая прямая $\mathbb{R}$ не допускает внутренних отображений, отличных от гомеоморфизмов.

Динамика одномерных отображений, в частности отображений окружности — обширная тема, изучаемая еще с работ Пуанкаре. Поэтому мы здесь ограничимся только вопросами топологической (непрерывной) классификации одномерных многообразий без края, и не будем затрагивать вопросы, связанные с гладкостью, а также не будем затрагивать тему динамики на одномерных пространствах с краем или особенностями (отрезки, деревья, дендриты, пучки окружностей и т. д.).

Знакомство с внутренними отображениями одномерных многообразий начнем с обзора классических результатов о классификации сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов одномерных многообразий — числовой прямой $\mathbb{R}$ и окружности S^1.

7.1. Классификация гомеоморфизмов $\mathbb{R}$

Следующая теорема дает классификацию сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ с точностью до сопряженности.

Теорема 7.1 (S. Sternberg [**111**] (1957)). *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — (сохраняющие ориентацию) гомеоморфизмы. Они сопряжены тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что выполнены следующие два условия:*

(i) *$p(\mathrm{Fix}(g)) = \mathrm{Fix}(f)$;*
(ii) *для каждой точки $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ знаки чисел $f(x) - x$ и $g(p(x)) - p(x)$ одинаковы.*

7.2. Классификация сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности S^1

Классификация сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов S^1 с точностью до полусопряженности восходит еще к работам Пуанкаре (см. [**103**] и современный обзор в [**21**],§11.2 — Классификация Пуанкаре гомеоморфизмов окружности с точностью до полусопряженности). Далее будет изложена уточненная классификация сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов S^1 уже с точностью до сопряженности, описанная в [**86, 107, 118, 89**]. Изложение материала следует [**13**].

Под окружностью S^1 будем понимать единичную окружность в комплексной плоскости: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| =$

1}. Определим универсальное накрывающее отображение $q : \mathbb{R} \to S^1$ по формуле $q(t) = e^{2\pi it}$.

Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Тогда f поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, удовлетворяющего условию

$$\widetilde{f}(x+1) = \widetilde{f}(x) + 1. \tag{7.1}$$

Обратно, всякий гомеоморфизм $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию (7.1), индуцирует некоторый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности.

7.2.1. Число вращения. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм и $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ его поднятие. Тогда, предел

$$r(\widetilde{f}) = \lim_{|n|\to\infty} \frac{\widetilde{f}^n(t)}{n}$$

существует и не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$. Он называется *числом вращения* гомеоморфизма f.

Следующее утверждение можно найти в работе ван Кампена [**118**], (см. также З. Нитецки [**23**]).

Лемма 7.2. *1) Пусть $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — два различных поднятия гомеоморфизма $f : S^1 \to S^1$. Тогда $r(\widetilde{f}_1) \equiv r(\widetilde{f}_2)$* mod $\mathbb{Z}$. *Поэтому класс $r(\widetilde{f}) + \mathbb{Z}$ можно обозначать через $r(f)$.*

2) Класс $r(\widetilde{f})$ инвариантен относительно сохраняющей ориентацию топологической сопряженности, т.е. если $g = h \circ f \circ h^{-1}$ и h сохраняет ориентацию, то $r(f) = r(g)$.

3) Число вращения $r(f)$ иррационально (т.е. соответствующий класс состоит из иррациональных чисел) тогда и только тогда, когда f не имеет периодических точек.

Пусть f — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности. Обозначим через $\Omega(f)$ множество его неблуждающих точек f, а через $\mathrm{Per}(f)$ — множество его периодических точек.

Оказывается, что возможны 4 принципиально различных случая, описанные ниже.

Случай 1. $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$ Очевидно, что тогда

$$\Omega(f) = \mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(f) \quad \text{и} \quad r(f) = 0.$$

Следовательно, f определяется своими ограничениями на дополнительные интервалы к $\mathrm{Fix}(f)$. Поэтому f включается в поток, неподвижные точки которого совпадают с $\mathrm{Fix}(f)$.

Случай 2. $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$**, но** $\mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$ Тогда, как отмечалось в Лемме 7.2, $r(f)$ рационально.

Предположим теперь, что $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$. Тогда число вращения $r(f)$ иррационально и множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ является совершенным подмножеством в S^1 и либо совпадает со всей окружностью, либо нигде не плотно, и следовательно, гомеоморфно канторовому множеству C.

Случай 3. $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$ **и** $\Omega(f) = S^1$ Тогда f сопряжен с вращением окружности на иррациональный угол $r(f)$ [**118**]. В частности, f включается в поток.

Отметим одно достаточное условие для случая 3.

Теорема 7.3 (А. Данжуа [**66**]). *Предположим, что f является C^1-диффеоморфизмом, причем производная f' имеет ограниченную вариацию. Если $r(f)$ иррационально, то f сопряжен с поворотом на иррациональный угол $r(\widetilde{f})$ (доказательство см. также Ван Кампен* [**118**]*).* □

Случай 4. $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$ **и** $\Omega(f) \approx C$ Ниже мы следуем работе Н. Маркли [**89**]. Пусть $M_\gamma : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм вращения окружности на угол γ. Скажем, что подмножества $X, Y \subset S^1$ конгруэнтны, $X \equiv Y$, если $Y = M_\gamma(X)$ для некоторого $\gamma \in S^1$.

Заметим, что дополнение к $\Omega(f)$ является счетным дизъюнктным объединением открытых интервалов:

$$S^1 \setminus \Omega(f) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i).$$

Множество $I = S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \subset \Omega(f)$ состоит из *недостижимых* точек канторового множества, а множество $A = \Omega(f) \setminus I$ из *достижимых*.

Произведем факторизацию окружности по отношению эквивалентности $\sim$ следующим образом: каждую дугу $[a_i, b_i]$ сожмем в точку. Тогда фактор-пространство $S^1_{/\sim}$ остается гомеоморфным окружности, а фактор-отображение

$$p : S^1 \to S^1_{/\sim} \approx S^1$$

является аналогом хорошо известной функции Кантора, которая локально постоянна на всюду плотном открытом множестве. Очевидно, что $p(\Omega(f)) = S^1$, причем ограничение $p|_I$ является гомеоморфизмом, а $p|_A$ склеивает точки, являющиеся концами одного и того же дополнительного интервала. Так как I и A инвариантны относительно f, то f индуцирует некоторый гомеоморфизм $\widetilde{f}$ фактор-пространства $S^1_{/\sim}$ так, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & S^1 \end{array} \qquad (7.2)$$

Отметим также, что $\Omega(\widetilde{f}) = S^1$. Следовательно, мы имеем случай 3 и поэтому $\widetilde{f}$ сопряжен с вращением на иррациональный угол $r(\widetilde{f})$. Кроме того, несложно показать, что числа вращения f и $\widetilde{f}$ совпадают. Таким образом в диаграмме (7.2) можно считать, что $\widetilde{f} = M_{r(f)}$.

Пусть $p_1 : (S^1, f) \to (S^1, M_{r(f)})$ — какой-нибудь другой гомоморфизм. Тогда они отличаются на некоторый автоморфизм потока $(S^1, M_{r(f)})$. Но все автоморфизмы этого потока также являются вращениями поэтому, $p(I)$ и $p_1(I)$ получаются друг из друга вращением окружности, т.е. $p(I) \equiv p_1(I)$.

Обозначим множество $p(I)$ через $T(f)$. Таким образом, $T(f)$ — это образ множества недостижимых точек при гомоморфизме дискретного потока (S^1, f) на поворот $M_{r(f)}$ на угол $r(f)$.

Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизмы без периодических точек, для которых $\Omega(f)$ и $\Omega(g)$ гомеоморфны канторовому множеству. Следующие утверждения принадлежат Н. Маркли [**89**].

Теорема 7.4 (Н. Маркли [**89**]). *f и g сопряжены тогда и только тогда, когда $r(f_1) = r(f_2)$ и $T(f_1) \equiv T(f_2)$.*

7.3. Разветвленные накрытия окружности.

В отличие от гомеоморфизмов, эндоморфизмы окружности менее исследованы, и находятся в процессе активного изучения. Существует обширная литература по необратимым отображениям окружности, дать обзор которой не представляется возможным по причине ее обширности. Для обзора текущих результатов укажем только основные работы по данной тематике, такие, как [**64, 63**], [**64, 90**], [**100, 101, 102, 77**].

Среди эндоморфизмов окружности внутренние отображения окружности можно считать наиболее хорошо изученным классом отображений. Внутренние отображения окружности не могут иметь особых точек, поэтому класс внутренних отображений окружности совпадает с классом обычных накрытий окружности. При необходимости, топологическую классификацию накрытий окружности можно получить из общих результатов одномерной динамики в терминах перемешивающих (“Kneading”) инвариантов теории комбинаторной эквивалентности кусочно-монотонных отображений, введенной Милнором и Терстоном в **[97]**, см. **[90]**. Также нужно упомянуть недавнюю работу **[17]** по топологической классификации накрытий окружности.

Дадим здесь еще одну топологическую классификацию накрытий окружности, независимо полученную автором. Преимущество этой классификации в том, что она получена в терминах введенных здесь множеств нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек, что позволяет применять эти результаты при исследовании внутренних отображений в больших размерностях с помощью разрабатываемых здесь методов.

Сначала дадим краткий обзор результатов, относящихся к необратимым внутренним отображениям окружности.

Естественным топологическим инвариантом внутренних отображений является их степень. Два отображения окружности гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень. Степень отображения f будем обозначать через $\deg(f)$. У необратимых внутренних отображений $|\deg(f)| > 1$.

Далее, необратимые внутренние отображения окружности всегда имеют неподвижные точки. Обозначим через $\mathrm{Per}_n(f)$ множество периодических точек отображения f периода n.

Лемма 7.5 (**[21]**,§8, 8.2.4). *Для любого непрерывного отображения $f\colon S^1 \to S^1$ имеет место неравенство* $\mathrm{Per}_n(f) \geq |(\deg(f))^n - 1|$.

Наиболее хорошо изученным классом внутренних отображений окружности являются растягивающие отображения. Кратко напомним свойства растягивающих отображений, следуя обзорам [**21, 31**].

Определение 7.6. *Пусть $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение метрического пространства (X, ρ). Отображение f называется* ***растягивающим****, если для некоторых чисел $\mu > 1$, $\varepsilon_0 > 0$ и всяких $x, y \in X$, $x \neq y$, $\rho(x, y) < \varepsilon_0$, имеет место неравенство $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$.*

Каноническими представителями растягивающих отображений окружности является семейство отображений E_n, $|n| > 1$. $E_n = n\varphi \mod 1$ в представлении $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $E_n = z^n$ в представлении $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Всякое растягивающее отображение окружности степени n сопряжено E_n. Всякое непрерывное отображение окружности степени n, $|n| > 1$, полусопряжено и комбинаторно сопряжено[1] E_n ([**64**]).

7.4. Критерий топологической сопряженности накрытий окружности.

Изучим здесь свойства сохраняющих ориентацию внутренних отображений окружности (которые на самом деле является локальными диффеоморфизмами окружности, так как множество их особых точек пусто) и дадим критерий их топологической сопряженности.

7.4.1. Нейтрально рекуррентные точки окружности.

Пусть $f\colon S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию локальный гомеоморфизм, при чем f глобально не является гомеоморфизмом. Тогда степень отображения d больше 1 и

[1] См. определение 3.26

число прообразов у каждой точки равно d. Поэтому у каждой точки ее нейтральное сечение $O^{\perp}(x)$ состоит из счетного числа точек. Поскольку S^1 — компакет, множество $\perp^0$-рекуррентных точек $\mathrm{Rec}^{\perp}(f)$ не пусто.

Поскольку окружность S^1 — одномерное многообразие, то произвольная ее точка разбивает любую свою малую окрестность на две полуокрестности.

Пусть x — $\perp^0$-рекуррентная точка f. Поскольку S^1 — одномерное многообразие, точка x разбивает любую свою малую окрестность на две полуокрестности.

Поскольку x — $\perp^0$-рекуррентная точка, то из определения следует, что хотя бы в одной полуокрестности точки x найдется последовательность точек из $O^{\perp}(x)$, сходящаяся к x.

Определение 7.7. *Назовем $\perp^0$-рекуррентную точку x* ***двусторонней****, если в каждой полуокрестности x найдется последовательность точек из $O^{\perp}(x)$, сходящаяся к x.*

Определение 7.8. *Назовем $\perp^0$-рекуррентную точку x* ***односторонней****, если найдется полуокрестность x, не содержащая точек из $O^{\perp}(x)$.*

По определению, если точка x $\perp^0$-рекуррентная, то она либо односторонняя $\perp^0$-рекуррентная, либо двусторонняя $\perp^0$-рекуррентная.

Поскольку внутреннее отображение сохраняет сходящиеся последовательности, если $\perp^0$-рекуррентная точка односторонняя (двусторонняя), то и вся ее широкая траектория состоит из односторонних (двусторонних) $\perp^0$-рекуррентных точек. Поэтому можно говорить о *односторонней* и *двусторонней* $\perp^0$-рекуррентной траектории.

Множество точек, не являющихся $\perp^0$-рекуррентными, открыто как дополнение к замкнутому множеству $\mathrm{Rec}^{\perp}(f)$. $\mathrm{Rec}^{\perp}(f)$ не пусто, поэтому в S^1 это множество является объединением не более чем счетного числа открытых интервалов, состоящих из точек, не являющихся $\perp^0$-рекуррентными, границы которых состоят из односторонних $\perp^0$-рекуррентных, а дополнение к этим замкнутым интервалам в S^1 состоит из двусторонне $\perp^0$-рекуррентных точек.

Возьмем произвольную точку $x \in S^1$ и рассмотрим ее прообразы $y_1, y_2, \ldots, y_{d^n} \in f^{-n}(x)$. Поскольку f — накрытие окружности, то образ отрезка между соседними точками прообраза под действием f^n 1 раз накрывает окружность. Тем более образ любого отрезка между любыми двумя точками прообраза $f^{-n}(x)$ под действием f^n накрывает окружность, возможно, несколько раз.

По определению, для любых двух точек $p_1, p_2 \in O^{\perp}(x)$ найдется n такое, что $p_1, p_2 \in f^{-n}(f^n(x))$, т. е. принадлежат одному прообразу точки для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Получаем

Следствие 7.9. *Для любых двух точек $p_1, p_2 \in O^{\perp}(x)$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что под действием f^n образ любого отрезка, соединяющего p_1 и p_2, накрывает окружность.*

Следствие 7.10. *Если точка x $\perp^0$-рекуррентная, то для любой как угодно малой ее полуокрестности F, содержащей сходящуюся к x последовательность точек из $O^{\perp}(x)$, найдется $n > 0$ такое, что $f^n(F) = S^1$.*

Лемма 7.11. *Замыкание компоненты связности множества точек, не являющихся $\perp^0$-рекуррентными, пересекается с каждым нейтральным сечением не более чем по одной точке.*

Доказательство. Предположим от противного, что в замыкании компоненты Q связности найдутся две точки, принадлежащие одному нейтральному сечению. Внутренность отрезка I, соединяющего эти точки в Q, целиком состоит из точек, не являющихся $\perp^0$-рекуррентными. Согласно следствию 7.9, найдется $n > 0$ такое, что $f^n(I) = S^1$. По условию $\mathrm{Rec}^{\perp}(f) \neq \varnothing$ и содержит бесконечное число точек. Поскольку точки отрезка I отображаются на $\mathrm{Rec}^{\perp}(f) \subset S^1$, отрезок I должен содержать бесконечное число $\perp^0$-рекуррентных точек, что противоречит условию леммы. Получили противоречие. $\square$

Следствие 7.12. *Если точка $x \in S^1$ не является $\perp^0$-рекуррентной, то она является $\perp^0$-блуждающей.*

Таким образом, компоненты связности множества точек, не являющихся $\perp^0$-рекуррентными, на самом деле являются компонентами связности множества $\perp^0$-блуждающих точек $W^{\perp}(f)$.

Лемма 7.13. *Любые две $\perp^0$-рекуррентные точки принадлежат одной нейтральной компоненте.*

Доказательство. Пусть x — $\perp^0$-рекуррентная точка. Из утверждения 7.10 следует, что в как угодно малой окрестности x найдется точка, принадлежащая нормальному сечению любой другой точки окружности. Следовательно, x принадлежит $\perp^0$-предельному множеству любой другой точки окружности, а, следовательно, и нейтральной компоненте любой другой точки окружности (утверждение 5.7).

Поскольку разбиение на нейтральные компоненты дизъюнктивно (утверждение 5.6), то $\mathbf{Z}^{\perp}(x) = S^1$. Отсюда и следует утверждение леммы. $\square$

7.4.2. Фактор-гомеоморфизм $f/_{\Omega^{\perp}}$.

Построим фактор-гомеоморфизм отображения f. Поскольку согласно лемме 7.13 $\Omega^{\perp}(f)$ не разложимо на нейтральные компоненты, воспользуемся конструкцией фактор-пространства по разбиению $\perp^0$-блуждающего множества на нейтральные сечения $X/_{\Omega^{\perp}}$ из раздела 5.1.

$X/_{\Omega^{\perp}}$ не пусто и состоит как минимум из одной точки — образа множества $\Omega^{\perp}(f) = \mathrm{Rec}^{\perp}(f)$. Обозначим эту точку через Ω. Если множество $W^{\perp}(f)$ не пусто, то, как следствие леммы 7.11 и утверждения 5.3 образ любой компоненты связности U множества $\perp^0$-блуждающих точек гомеоморфен замкнутому отрезку, у которого обе граничные точки отождествлены с точкой Ω, т. е. гомеоморфен окружности.

$W^{\perp}(f)$ может содержать в себе несколько различных нейтрально инвариантных наборов компонент связности, поэтому у фактор-пространства $X/_{\Omega^{\perp}}$ таких окружностей может быть несколько, но не более чем счетное число, так как они являются представителями набора компонент связности $W^{\perp}(f)$ исходной окружности. Все эти окружности образуют букет с общей точкой Ω.

Теорема 7.14. *Фактор-пространство $X/_{\Omega^{\perp}}$ является букетом не более чем счетного числа окружностей, где общая точка букета является образом множества $\mathrm{Rec}^{\perp}(f)$, возможно, вырожденным в точку, если $W^{\perp}(f) = \varnothing$.*

На этом букете окружностей f индуцирует гомеоморфизм букета окружностей $f/_{\Omega^{\perp}}$, у которого точка Ω является неподвижной. По построению, в сужении на каждую окружность букета $f/_{\Omega^{\perp}}$ является гомеоморфизм на (возможно, другую) окружность букета, у которого точка Ω отображается в точку Ω.

Пусть S_i — некоторая окружность букета. Рассмотрим цепочку окружностей S_i, $f(S_i)$, $f^2(S_i)$, $\ldots$. Если соответствующее нейтрально инвариантное множество, порожденное компонентой связности множества $W^{\perp}(f)$, соответствующей окружности S_i, периодическое, то цепочка окружности S_i тоже периодическая — найдется $n \geq 0$ такое, что $f^n(S_i) = S_i$. Иначе соответствующее нейтрально инвариантное множество блуждающее и в цепочке окружности S_i все окружности различны — цепочка блуждающая.

Как будет показано далее, конкретный вид отображения $f/_{\Omega^{\perp}}$ на блуждающих цепочках не влияет на топологическую сопряженность внутренних отображений окружности. Поэтому соответствующие компоненты связности можно просто выбросить.

Фактор-пространство $X/_{\Omega^{\perp}}$ с выброшенными окружностями, соответствующими блуждающим цепочкам, обозначим через $P(X/_{\Omega^{\perp}})$ и назовем компонентой периодических цепочек фактор-пространства по разбиению $\perp^0$-блуждающего множества на нейтральные сечения.

Как и $X/_{\Omega^{\perp}}$, $P(X/_{\Omega^{\perp}})$ является букетом не более чем счетного числа окружностей, но все цепочки в этом букете имеют конечный период.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — цепочка окружностей длины n из букета. Поставим в соответствие гомеоморфизму цепочки окружностей длины n из букета гомеоморфизм стандартной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с помеченными точками $\varphi = 0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, \ldots, \frac{n-1}{n}2\pi$, разорвав окружности по точке Ω и отобразив их произвольным гомеоморфизмом по порядку на сегменты $(\frac{k-1}{n}2\pi, \frac{k}{n}2\pi)$ стандартной окружности. Обозначим так построенный гомеоморфизм стандартной окружности через $\Psi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Из результатов о классификации одномерных гомеоморфизмов, приведенных в разделах 7.1 и 7.2 следует, что два гомеоморфизма цепочки окружностей в букете длины n топологически сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие им гомеоморфизмы стандартной окружности с помеченными точками $\varphi = 0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, \ldots, \frac{n-1}{n}2\pi$ сопряжены с помощью гомеоморфизмов, сохраняющих отмеченные точки.

По построению гомеоморфизм стандартной окружности $\Psi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет рациональное число вращения $\frac{1}{n}$, его множество периодических точек не пусто, следовательно, все его периодические точки имеют период n. Класс топологической сопряженности такого гомеоморфизма полностью определяется его множеством периодических точек и знаками интервалов дополнения к множеству периодических точек.

С дополнительным условием сохранения помеченных точек (которые являются периодическими) два таких гомеоморфизма сопряжены тогда и только тогда, когда найдется гомеоморфизм окружностей, переводящий множество периодических точек первого гомеоморфизма в множество периодических точек второго гомеоморфизма с сохранением знаков интервалов дополнения к множеству периодических точек и отмеченных точек.

Возвращаясь назад к приведенному букету $P(X/_{\Omega^\perp})$, как следствие, получим, что два гомеоморфизма подбукета циклической цепочки окружностей топологически сопряжены тогда и только тогда, когда найдется гомеоморфизм подбукетов, переводящий множество периодических точек первого гомеоморфизма в множество периодических точек второго гомеоморфизма с сохранением знаков интервалов дополнения к множеству периодических точек.

7.4.3. Растягивающее отображение $f/_{W^\perp}$.

Определение 7.15. *Неподвижная точка $q = f(q)$ непрерывного отображения f называется топологически отталкивающей, если найдется окрестность V точки q*

такая, что для каждой точки $p \neq q$ в V найдется некоторое $n \geq 1$ такое, что n-тая итерация $f^n(p)$ лежит вне V.

Из определения следует, что если неподвижная точка $\perp^0$-рекуррентна, то она топологически отталкивающая.

Следствие 7.16. *Если $\mathrm{Rec}^\perp(f) = S^1$, то все неподвижные точки f изолированы.*

Применяя это утверждение к отображению f^n, $n \geq 1$, получим

Следствие 7.17. *Если $\mathrm{Rec}^\perp(f) = S^1$, то все периодические точки f периода n изолированы.*

Поскольку поднятие f на накрывающее пространство $\mathbb{R}^1$ монотонно, получим

Следствие 7.18. *Если $\mathrm{Rec}^\perp(f) = S^1$, то f имеет в точности $d-1$ неподвижных точек.*

Следующее утверждение необходимо для доказательства теоремы 7.25.

Лемма 7.19. *Если $\mathrm{Rec}^\perp(f) = S^1$, то f топологически сопряженно растягивающему отображению.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно построить гомеоморфизм h, сопрягающий f стандартному растягивающему отображению E_k стандартной окружности.

Для построения сопрягающего гомеоморфизма можно использовать тот же метод, что и в классической теореме о том, что метрически растягивающее отображение окружности f степени k топологически сопряжено отображению E_k, см. напр. [**21**], только вместо условия, что отображение является метрически растягивающим, использовать условие леммы. Приведем здесь соответствующее доказательство для полноты изложения.

Необратимые внутренние отображения окружности всегда имеют неподвижные точки. Возьмем произвольную неподвижную точку p_0 отображения f и зададим $h(p_0) = (1, 0)$, т. е. положим, что отображение h отображает точку p_0 в единицу e (точку на стандартной окружности с угловой координатой 0).

Множество $f^{-1}(p_0)$ кроме точки p_0 содержит еще $k-1$ ее прообраз под действием отображения f. Аналогично, у образа точки p_0, точки $e = (1, 0)$, есть еще $k-1$ прообраз под действием отображения E_k (корни k-й степени из 1). Поскольку на окружности задан циклический порядок, то существует и единственное продолжение h на $f^{-1}(p_0)$, такое, что h отображает $f^{-1}(p_0)$ на $E_k^{-1}(e)$ с сохранением циклического порядка.

Применив это же рассуждение к отображениям f^2 и E_k^2, получим отображение h, которое с сохранением циклического порядка отображает точки из $f^{-2}(p_0)$ в точки из $E_k^{-2}(e)$ и т. д. Продолжив рассуждения по индукции, получим отображение h, определенное на точках широкой траектории $O_f(p_0)$ и отображающее их в точки широкой траектории $O_{E_k}(e)$ с сохранением циклического порядка, т.е. монотонное.

Далее, по построению точки широкой траектории $O_{E_k}(e)$ плотны на стандартной окружности. Покажем, что точки широкой траектории $O_f(p_0)$ тоже плотны на своей окружности.

Рассмотрим множество $S^1 \setminus O_f(p_0)$. По определению, это множество нейтрально инвариантно. Предположим, что точки широкой траектории $O_f(p_0)$ не плотны на S^1. Тогда в множестве $S^1 \setminus O_f(p_0)$ найдется открытый отрезок. Но тогда все точки этого отрезка являются нейтрально блуждающими с окрестностью, состоящей из этого отрезка, и, следовательно, не являются нейтрально рекуррентными. Это противоречит условию леммы. Следовательно, точки широкой траектории $O_f(p_0)$ плотны на S^1.

На каждой окружности существует естественное кодирование точек окружности числами в k-ичной записи. Именно, все остальные точки окружности кодируются номарами отрезков между прообразами p_0 на исходной окружности и e на стандартной окружности (прообразам j-того порядка соответствует j-ая значащая цифра в k-ичной записи). Поскольку точки соответствующих широких траекторий плотны на каждой окружности, то отрезки между прообразами не могут быть большими (их длины стремятся к 0), поэтому каждому числу в k-ичной записи с точностью до $mod 1$ соответствует единственная точка окружности.

Как следствие, отображение h продолжается по непрерывности на всю окружность. По построению, это биекция, следовательно h — искомый гомеоморфизм. $\square$

Рассмотрим, что случится с отображением f, если стянуть каждую компоненту связности множества $W^{\perp}(f)$ в точку.

Зададим на окружности разбиение на компоненты связности множества $W^{\perp}(f)$ по следующему правилу: если точка двусторонняя $\perp^0$-рекуррентная, то ее элемент разбиения состоит из самой этой точки, в противном случае ее элемент разбиения состоит из замыкания компоненты связности множества $W^{\perp}(f)$, имеющего непустое пересечение с этой точкой.

Легко видеть, что фактор-пространство по этому разбиению гомеоморфно окружности, а индуцированное отображение является ее локальным гомеоморфизмом. Обозначим фактор-пространство через $X/_{W^{\perp}}$, проекцию на фактор-пространство через $\pi_{W^\perp}$, а индуцированное отображение через $f/_{W^\perp}$.

По построению, у отображения $f/_{W^\perp}$ $W^\perp(f/_{W^\perp}) = \varnothing$, следовательно, $\mathrm{Rec}^\perp(f/_{W^\perp}) = S^1$. Как следует из леммы 7.19, отображение $f/_{W^\perp}$ сопряжено E_d.

Следствие 7.20. *Локальный гомеоморфизм окружности f полусопряжен E_d с помощью монотонного отображения, отображающего каждое замыкание компоненты связности множества $W^\perp(f)$ в точку.*

По построению, у фактор-пространства $X/_{W^\perp}$ есть отмеченные точки — образы компоненты связности множества $W^\perp(f)$. Согласно утверждению 7.19, отображение $f/_{W^\perp}$ топологически сопряжено стандартному растягивающему отображению E_d. Обозначим соответствующее сопрягающее отображение через h_{E_d}. При этом сопряжении отмеченные точки фактор-пространства $X/_{W^\perp}$ переходят в точки стандартной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

У отображения E_d стандартной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с угловой координатой φ есть в точности $d-1$ фиксированных точек. При топологическом сопряжении отображения отображению E_d есть произвол, какую из $d-1$ фиксированных точек отобразить в точку $\varphi = 0$.

Однако, после того, как выбрать точку $\varphi = 0$, координаты всех оставшихся периодических точек будут определены однозначно. А так как у отображения E_d множество периодических точек плотно в S^1, то и координаты всех других точек будут определены однозначно.

Таким образом, композиция $h_{E_d} \circ \pi_{W^\perp}$ ставит в соответствие каждой компоненте связности множества $W^\perp(f)$ число — угловую координату на стандартной окружности S^1.

Этот набор чисел не является произвольным. Опишем все свойства набора чисел, соответствующего компонентам связности множества $W^\perp(f)$.

Если степень отображения $d > 2$, то этот набор чисел определен с точностью до поворота на угол $\frac{2\pi}{d-1}$, т. е. элементы циклической группы, образованной поворотом на угол $\frac{2\pi}{d-1}$, переводят такой набор в ему эквивалентный.

Далее, если точка широкой траектории является отмеченной, то и вся ее широкая траектория является отмеченной, при чем каждому отмеченному нейтральному сечению соответствует своя окружность в фактор-пространстве $X/_{\Omega^{\perp}}$.

Как следствие, этот набор чисел сохраняется при преобразованиях E_d: $\varphi \mapsto d\varphi \mod 2\pi$, и $(E_d^{-1})^j$, где $(E_d^{-1})^j$ отображает точку в j-й корень степени d из этой точки. Назовем группу преобразований, порожденных преобразованиями E_d и $(E_d^{-1})^j$, группой сдвигов вдоль широкой траектории E_d.

7.4.4. Топологический инвариант f. Разделим набор чисел, соответствующий компонентам связности множества $W^{\perp}(f)$, на два подмножества. Подмножество, соответствующее блуждающим компонентам, обозначим через RC_W, а подмножество, соответствующее периодическим компонентам, обозначим через RC_P. По определению, RC_W и RC_P инвариантны относительно действия группы сдвигов вдоль широкой траектории E_d.

Выберем из RC_W по одному произвольному представителю каждой широкой траектории, входящей в RC_W. Полученный не более чем счетный набор чисел обозначим через C_W.

По построению, C_W удовлетворяет следующим условиям:

(CW1) никакие 2 числа из C_W не переводятся друг в друга преобразованиями группы сдвигов вдоль широкой траектории E_d.

(CW2) никакое число из C_W нельзя перевести преобразованиями группы сдвигов вдоль широкой траектории E_d в число, соответствующее периодической точке отображения E_d.

Разобьем RC_P на подмножества RC_{P_i}, такие, что для каждого i RC_{P_i} состоит из впоследствии периодических точек периода i. Каждое нейтральное сечение впоследствии периодической широкой траектории содержит ровно одну периодическую точку. Выберем из RC_{P_i} из каждого нейтрального сечения содержащуюся в нем единственную периодическую точку в качестве представителя. Полученный набор чисел обозначим через C_{P_i}. Поскольку у отображения E_d периодических точек заданного периода конечное число, то C_{P_i} является не более чем конечным набором чисел. Объединение всех непустых C_{P_i} обозначим через C_P. Как и C_W, C_P — не более чем счетный набор чисел.

По построению, C_P удовлетворяет следующему условию:

(CP1) числа, входящие в C_P, являются угловыми координатами периодических точек отображения E_d.

Определение 7.21. *Скажем, что пара множеств C_W и C_P эквивалентна паре множеств C'_W и C'_P, если найдется*

(1) *сдвиг нуля системы координат на угол, кратный $\frac{2}{d-1}\pi$;*

(2) *набор элементов g_i группы сдвигов вдоль широкой траектории E_d*

такие, что после применения сдвига нуля системы координат ко всем числам множеств C_W и C_P, а затем применения к каждому числу из множества C_W своего элемента g_i полученные множества чисел будут совпадать с множествами C'_W и C'_P.

По построению, C_W и C_P являются топологическими инвариантами сопряженности локального гомеоморфизма. Если у двух локальных гомеоморфизмов f и g пары множеств C_W и C_P не эквивалентны, то их множества нейтрально блуждающих точек топологически различны, следовательно, f и g не могут быть сопряжены.

Множество C_P дополнительно разбивается на траектории (которые состоят из периодических точек, поэтому являются конечными цепочками). Каждому числу из C_P в компоненте периодических цепочек $P(X/_{\Omega^\perp})$ фактор-пространства по разбиению $\perp^0$-блуждающего множества на нейтральные сечения соответствует некоторая окружность, а всей цепочке-полутраектории периода n, в которую входит это число, гомеоморфизм цепочки окружностей длины n из букета.

Поставим в соответствие исходному локальному гомеоморфизму окружности f

(1) приведенный букет окружностей $P(X/_{\Omega^\perp})$ с отмеченными множествами периодических точек и знаками интервалов дополнения к множеству периодических точек;
(2) множество C_W;
(3) множество C_P;
(4) взаимное соответствие S между элементами C_P и окружностями в $P(X/_{\Omega^\perp})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.22. *Назовем полученный набор* ***инвариантом топологической сопряженности*** *локального гомеоморфизма окружности f.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.23. *Инвариант топологической сопряженности локального гомеоморфизма окружности f с парой множеств C_W и C_P и приведенным букетом окружностей $P(X/_{\Omega^\perp})$ и инвариант топологической сопряженности локального гомеоморфизма окружности*

g с парой множеств C'_W и C'_P и приведенным букетом окружностей $P'(X/_{\Omega^\perp})$ эквивалентны, если

- *пара множеств C_W и C_P эквивалентна паре множеств C'_W и C'_P*
- *найдется гомеоморфизм букета $P(X/_{\Omega^\perp})$ на букет $P'(X/_{\Omega^\perp})$*
  - *сохраняющий взаимное соответствие S между элементами C_P и окружностями;*
  - *переводящий отмеченные множества периодических точек в отмеченные;*
  - *сохраняющий знаки интервалов дополнения к множеству периодических точек.*

Теорема 7.24 (О реализации). *Пусть задана пара множеств C_W и C_P, удовлетворяющих соответственно условиям (CW1) и (CW2) и условию (CP1), гомеоморфизм букета окружностей $P(X/_{\Omega^\perp})$, у которого все цепочки окружностей периодические, и взаимное соответствие S между элементами C_P и окружностями в $P(X/_{\Omega^\perp})$. Тогда существует локальный гомеоморфизм окружности g, такой, что указанный набор является его инвариантом топологической сопряженности.*

Если указанный набор был получен как инвариант топологической сопряженности некоторого локального гомеоморфизма окружности f, то f и g топологически сопряжены.

Доказательство. Восстановим из множеств C_W C_P преобразованиями группы сдвигов вдоль широкой траектории E_d множества RC_W и RC_P. По определению, $RC_W \cup RC_P$ — не более чем счетное подмножество точек стандартной окружности.

Выберем произвольную счетную сходящуюся последовательность чисел (d_i), такую, что $\sum_0^\infty d_i = 1$ и произвольным образом сопоставим каждой точке из $RC_W \cup RC_P$ некоторое число из последовательности (d_i). Полученную функцию-соответствие обозначим через $d\colon RC_W \cup RC_P \to \mathbb{R}$.

Возьмем стандартную единичную окружность S^1, на которой задано стандартное растягивающее отображение E_d, и счетный набор отрезков, длинна которых образует выбранную последовательность (d_i).

Каждой точке x из множеств RC_W и RC_P соответствует некоторый отрезок длины $d(x)$. Обозначим этот отрезок $D(x)$. Вклеим вместо каждой такой точки соответствующий отрезок с помощью стандартной топологической операции вклейки.

Полученное топологическое пространство G гомеоморфно исходной окружности, при этом по построению вне вклеенных отрезков на нем остается заданным стандартное растягивающее отображение E_d.

Вложение исходной стандартной единичную окружности S^1 с выколотым замыканием множеств RC_W и RC_P в полученное пространство G обозначим через i_G.

Продолжим отображение E_d на все пространство G. Продолженное отображение обозначим через g. На отрезке, вклеенном вместо точки x, продолжим отображение следующим образом: граничные точки отрезка отобразим с сохранением ориентации в граничные точки отрезка, соответствующего точке $E_d(x)$. Если $x \in RC_W \cup (RC_P \setminus C_P)$, то продолжим отображение внутрь отрезка линейно.

Для точек из C_P у нас задано взаимное соответствие S между элементами C_P и окружностями в $P(X/_{\Omega^\perp})$. На окружностях из $P(X/_{\Omega^\perp})$ задано отображение $f/_{\Omega^\perp}$. Обозначим через $l_{D(x)}$ линейное отображение отрезка $D(x)$ в окружность $S(x)$, а через $l_{D(E_d(x))}$ — линейное отображение отрезка $D(E_d(x))$ в окружность $S(E_d(x))$. Если $x \in C_P$, то отображение отрезков $D(x)$ и $D(E_d(x))$ зададим как $l^{-1}_{D(E_d(x))} \circ f/_{\Omega^\perp} \circ l_{D(x)}$.

Полученное отображение g задано на всем пространстве G.

Предположим теперь, что заданный инвариант топологической сопряженности был получен с некоторого локального гомеоморфизма окружности f.

Покажем, что f и g топологически сопряжены. Как уже показано, гомеоморфизм окружности f полусопряжен E_d с помощью монотонного отображения h_{E_d}, отображающего каждое замыкание компоненты связности множества $W^{\perp}(f)$ в точку. Определим сопрягающее отображение h следующим образом. Вне замыкания множества $W^{\perp}(f)$ положим $h = i_G \circ h_{E_d}$. Концы отрезков из множества $W^{\perp}(f)$ отобразим в концы соответствующих вклеенных отрезков.

Осталось распространить сопрягающее отображение h на множество $W^{\perp}(f)$. Множество $W^{\perp}(f)$ делится на два подмножества: подмножество блуждающих компонент, соответствующих RC_W и подмножество впоследствии периодических компонент, соответствующих RC_P. Множество C_W содержит по одному представителю для каждого вполне инвариантного набора блуждающих компонент. Для каждого такого представителя соответствующую блуждающую компоненту отобразим во внутренность соответствующего вклеенного отрезка линейно, Затем распространим сопрягающее отображение h на оставшихся блуждающие компоненты, подбирая число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что соответствующая ветвь отображения f^{-n} отображает эту компоненту на компоненту, для которой отображение h уже определено, и задавая h как соответствующую однозначную ветвь отображения $g^n \circ h \circ f^{-n}$.

Множество впоследствии периодических компонент, соответствующих RC_P, содержит подмножество периодических компонент, соответствующих C_P. По вышеприведенному построению, на вклеенных отрезках, соответствующих C_P, отображение g задано как $l^{-1}_{D(E_d(x))} \circ f/_{\Omega^\perp} \circ l_{D(x)}$, поэтому для сопряженности достаточно положить h равным отображению $l_{D(x)}$ на подмножестве периодических компонент, соответствующих C_P. На оставшихся впоследствии периодических компонентах, не являющихся периодическими, распространим сопрягающее отображение h так же, как и в выше разобранном случае блуждающих компонент.

По построению, полученное отображение h является искомым сопряжением между f и g. $\square$

Как следствие, получаем следующую теорему.

Теорема 7.25 (Критерий топологической сопряженности). *Два локальных гомеоморфизма окружности f и g топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их инварианты топологической сопряженности эквивалентны.*

Литература

[1] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — С. 368.

[2] *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Международный симпозиум по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. — Киев, 1969.

[3] *Аносов Д. В.* Грубые системы // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.* — 1985. — Т. 169. — С. 59–93.

[4] *Аносов Д. В., Солодов В. В.* Гиперболические множества // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Динамические системы – 9. — ВИНИТИ, 1991. — С. 12–99.

[5] *Арансон С. Х., Медведев В. С.* Регулярные компоненты гомеоморфизмов n-мерной сферы // *Мат. Сборник.* — 1971. — Т. 85(127), № 1(5). — С. 3–17.

[6] *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. О отображениях окружности на себя // *Известия АН СССР. Серия мат.* — 1961. — Т. 25, № 1. — С. 21–86.

[7] *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974. — С. 424.

[8] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2008. — С. 308.

[9] *Величко Н. В.* О конечнократных открытых отображениях // *Труды Инст. математики и механики УрО РАН.* — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 164–173.

[10] *Власенко И. Ю.* Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов // Труды Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008". — Київ: Ин-т математики НАН України, 2008. — С. 373–389.

[11] *Власенко И. Ю.* Динамика внутренних отображений // *Нелінійні Коливання.* — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 181–186.

[12] *Власенко И. Ю.* Фактор-гомеоморфизм внутреннего эпиморфизма // Збірник праць. Український математичний конгрес - 2009. Секція 2. Топологія і геометрія. — Київ: Ин-т математики НАН України, 2011. — С. 29–37.

[13] *Власенко И. Ю., Максименко С. И.* Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий // *Препринт 2004.8.* — 2004. — С. 62.

[14] *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1948.

[15] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Геометрическая теория динамических систем. — М.: Наука, 1986. — С. 760.

[16] *Еременко А. Э., Любич М. Ю.* Динамика аналитических преобразований // *Алгебра и анализ.* — 1989. — Т. 1, № 3. — С. 1–70.

[17] *Жужома Е. В., Исаенкова Н. В.* Классификация накрытий окружности // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Тр. МИАН. — М. МАИК, 2012. — Т. 278. — С. 88–93.

[18] *Зарелуа А. В.* Топологическое и когомологическое строение нульмерных отображений // Геометрическая топология и теория множеств. — М., Наука, 2004. — Т. 247 из *Тр. МИАН.* — С. 74–94.

[19] *Зелинский Ю. Б.* Применение локальной степени к изучению квазивнутренних отображений // *Украинский мат. ж.* — 1978. — Т. 30, № 3. — С. 299–308.

[20] *Зелинский Ю. Б.* О кратности непрерывных отображений областей // *Украинский мат. ж.* — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 554–558.

[21] *Каток А. Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — С. 768.

[22] *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1969.

[23] *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975. — С. 304.

[24] *Плыкин Р. В.* Источники и стоки а-диффеоморфизмов поверхностей // *Математический сборник.* — 1974. — Т. 94(196), № 2(6). — С. 243–264.

[25] *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. — М.: МЦНМО, 1997. — С. 350.

[26] *Пришляк А. О.* Векторные поля морса-смейла с конечным числом особых траекторий на трехмерных многобразиях // *Доповіді НАН України.* — 1998. — Т. 6. — С. 43–47.

[27] *Пришляк А. О.* Классификация трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Некоторые

вопросы современной математики: Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Інститут математики НАН України, 1998. — Т. 25. — С. 305–301.

[28] *Пришляк А. О.* Векторные поля морса-смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях // *Мат. заметки.* — 2002. — Т. 71, № 2. — С. 254–260.

[29] *Пришляк А. О.* Топологическая эквивалентность векторных полей морса-смейла с beh 2 на трехмерных многообразиях // *УМЖ.* — 2002. — Т. 54, № 4. — С. 492–500.

[30] *Савельев И. В.* Строение множества особых точек кусочно-линейных разветвленных накрытий многообразий // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1985. — Т. 49, № 6. — С. 1274–1301. http://dx.doi.org/10.1070/IM1986v027n03ABEH001189.

[31] *Синай Я. Г.* Современные проблемы эргодической теории (Современные проблемы математики. вып. 31). — М. Физматлит, 1995. — С. 208.

[32] *Стоилов С.* О топологических принципах теории аналитических функций. — Москва, Мир, 1964. — С. 228.

[33] *Трохимчук Ю. Ю.* О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства // *Укр. Мат. Журнал.* — 1964. — Т. 16, № 2. — С. 196–211.

[34] *Трохимчук Ю. Ю.* О непрерывных отображениях плоских областей // *Укр. матем. ж.* — 1965. — Т. 17, № 1.

[35] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 70. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2008. — С. 538.

[36] *Трохимчук Ю. Ю.* О непрерывных отображениях плоских областей // *Укр. Мат. Журнал.* — 2014. — Т. 66, № to appear.

[37] *Трохимчук Ю. Ю., Зелинский Ю. Б., Шарко В. В.* Некоторые результаты в топологии многообразий, теории многозначных отображений и теории Морса // *Труды Мат. Инст. Стеклова.* — 1983. — Т. 154. — С. 222–230. — Топология (Москва, 1979).

[38] *Чернавский А. В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // *Мат. сборник.* — 1964. — Т. 65, № 3. — С. 357–369.

[39] *Чернавский А. В.* Дополнение к статье “конечнократные открытые отображения многообразий” // *Мат. сборник.* — 1965. — Т. 66, № 3. — С. 471–472.

[40] *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // *Укр. Мат. Журнал.* — 1964. — Т. 61, № 1. — С. 61.

[41] *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г.* Динамика одномерных отображений. — Киев, Наукова Думка, 1989. — С. 216.

[42] *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев, Наукова Думка, 1986. — С. 276.

[43] *Akin E., Hurley M., Kennedy J. A.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 164, no. 783. — Pp. viii+130.

[44] *Alexander J.* Note on riemann spaces // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1920. — Vol. 26. — Pp. 370–372.

[45] *Auslander J., Kolyada S., Snoha L.* Functional envelope of a dynamical system // *Nonlinearity.* — 2007. — Vol. 20, no. 9. — Pp. 2245–2269.

[46] *Birkhoff G., Smith P.* Structure analysis of surface transformations // *J. Math.* — 1928. — Vol. 7. — Pp. 357–369.

[47] *Bonatti C.* The global dynamics of generic diffeomorphisms. — 2003.

[48] *C. B.* Generic Dynamics // *Lectures. Albus Salam ICTP, SMR 1573.* — 2004. — Vol. 11.

[49] *Choi S. K., Chu C.-K., Park J. S.* Chain recurrent sets for flows on non-compact spaces // *J. Dynam. Differential Equations.* — 2002. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 597–611. http://dx.doi.org/10.1023/A:1016339216210.

[50] *Chu H.-Y.* Chain recurrence for multi-valued dynamical systems on noncompact spaces // *Nonlinear Anal.* — 2005. — Vol. 61, no. 5. — Pp. 715–723. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2005.01.024.

[51] *Church P. T.* Extensions of Stoilow's theorem // *J. London Math. Soc.* — 1962. — Vol. 37. — Pp. 86–89.

[52] *Church P. T.* Differentiable open maps on manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1963. — Vol. 109. — Pp. 87–100.

[53] *Church P. T.* Differentiable monotone mappings and open mappings // Proc. First Conf. on Monotone Mappings and Open Mappings (SUNY at Binghamton, Binghamton, N.Y., 1970). — State Univ. of New York at Binghamton, Binghamton, N.Y., 1971. — Pp. 145–183.

[54] *Church P. T.* Discrete maps on manifolds // *Michigan Math. J.* — 1978. — Vol. 25, no. 3. — Pp. 351–357. http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1029002116.

[55] *Church P. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n-manifolds // *Duke Math. J.* — 1960. — Vol. 27. — Pp. 527–536.

[56] *Church P. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n-manifolds. II // *Duke Math. J.* — 1961. — Vol. 28. — Pp. 607–623.

[57] *Church P. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n-manifolds. III // *Duke Math. J.* — 1963. — Vol. 30. — Pp. 379–389.

[58] *Church P. T., Timourian J. G.* Differentiable maps with small critical set or critical set image // *Indiana Univ. Math. J.* — 1978. — Vol. 27, no. 6. — Pp. 953–971. http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1978.27.27064.

[59] *Church P. T., Timourian J. G.* Deficient points of maps on manifolds // *Michigan Math. J.* — 1980. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 321–338. http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1029002406.

[60] *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems. — Mass.: Birkhäuser Boston, 1980. — Vol. 1 of *Progress in Physics.* — Pp. vii+248.

[61] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. — Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978. — Vol. 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* — Pp. iii+89.

[62] *de George D. L., Reddy W. L.* A branch set linking theorem // *Math. Scand.* — 1975. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 327–333.

[63] *de Melo W.* Dynamics on the circle // Dynamics, games and science. I. — Heidelberg: Springer, 2011. — Vol. 1 of *Springer Proc. Math.* — Pp. 651–659.

[64] *de Melo W., van Strien S.* One-dimensional dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1993. — Vol. 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* — Pp. xiv+605.

[65] *DeGeorge D. L., Reddy W. L.* Branch set linking for nonorientable manifolds // *Illinois J. Math.* — 1982. — Vol. 26, no. 3. — Pp. 382–387.

[66] *Denjoy A.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // *J. de Math. Pures. Appl.* — 1932. — Vol. 11. — Pp. 333–375.

[67] *Dold A.* Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1986. — Vol. 99, no. 1. — Pp. 65–72. http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100063933.

[68] *Elienberg S.* Sur les transformations continues d'espaces métriqes compacts // *Fundamenta Mathematicae.* — 1934. — Vol. 22. — Pp. 292–296.

[69] Encyclopedia of general topology / Ed. by K. P. Hart, J.-i. Nagata, J. E. Vaughan. — Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 2004. — Pp. x+526.

[70] *Franks J.* A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem // Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. — Vol. 81 of *Contemp. Math.* — Pp. 111–117.

[71] *Gamboa J. M., Ronga F.* On open real polynomial maps // *J. Pure Appl. Algebra.* — 1996. — Vol. 110, no. 3. — Pp. 297–304. http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(95)00106-9.

[72] *Heinonen J.* The branch set of a quasiregular mapping // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002). — Beijing: Higher Ed. Press, 2002. — Pp. 691–700.

[73] *Heinonen J., Rickman S.* Quasiregular maps $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^3$ with wild branch sets // *Topology.* — 1998. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 1–24. http://dx.doi.org/10.1016/S0040-9383(97)00015-3.

[74] *Heinonen J., Rickman S.* Geometric branched covers between generalized manifolds // *Duke Math. J.* — 2002. — Vol. 113, no. 3. — Pp. 465–529. http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-02-11333-7.

[75] *Hemmingsen E., Reddy W. L.* Branched coverings without regular points over branch point images // *Illinois J. Math.* — 1974. — Vol. 18. — Pp. 124–130.

[76] *Hirsch M. W.* Jacobians and branch points of real analytic open maps // *Aequationes Math.* — 2002. — Vol. 63, no. 1-2. — Pp. 76–80. http://dx.doi.org/10.1007/s00010-002-8006-8.

[77] Homoclinic and nonwandering points for maps of the circle / L. Block, E. Coven, I. Mulvey, Z. Nitecki // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 1983. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 521–532. http://dx.doi.org/10.1017/S014338570000211X.

[78] *Hurley M.* Chain recurrence, semiflows, and gradients // *J. Dynam. Differential Equations.* — 1995. — Vol. 7, no. 3. — Pp. 437–456.

[79] *Hurley M.* Properties of attractors of generic homeomorphisms // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 1996. — Vol. 16, no. 6. — Pp. 1297–1310.

[80] *Hurley M.* Lyapunov functions and attractors in arbitrary metric spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1998. — Vol. 126, no. 1. — Pp. 245–256. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04500-6.

[81] *Hurley M.* Weak attractors from Lyapunov functions // *Topology Appl.* — 2001. — Vol. 109, no. 2. — Pp. 201–210. http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641(99)00158-3.

[82] *Kennedy J. A., Yorke J. A.* Pseudocircles in dynamical systems // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1994. — Vol. 343, no. 1. — Pp. 349–366. http://dx.doi.org/10.2307/2154536.

[83] *Kolyada S., Snoha L., Trofimchuk S.* Noninvertible minimal maps // *Fund. Math.* — 2001. — Vol. 168, no. 2. — Pp. 141–163. http://dx.doi.org/10.4064/fm168-2-5.

[84] *Kolyada S., Snoha L., Trofimchuk S.* Proper minimal sets on compact connected 2-manifolds are nowhere dense // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 2008. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 863–876. http://dx.doi.org/10.1017/S0143385707000740.

[85] *Kolyada S. F.* On dynamics of triangular maps of the square // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 1992. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 749–768. http://dx.doi.org/10.1017/S0143385700007082.

[86] *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Monografie Matematyczne, Tom 46. — Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1968. — P. 383 pp. (errata insert).

[87] *Kuratowski K.* Topology. Vol. I. New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski. — New York: Academic Press, 1966. — Pp. xx+560.

[88] *Kuratowski K.* Topology. Vol. II. New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor. — New York: Academic Press, 1968. — Pp. xiv+608.

[89] *Markley N. G.* Homeomorphisms of the circle without periodic points // *Proc. Lond. Math. Soc. (3).* — 1970. — Vol. 20. — Pp. 688–698.

[90] *Martens M., de Melo W., van Strien S.* Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics // *Acta Math.* — 1992. — Vol. 168, no. 3-4. — Pp. 273–318. http://dx.doi.org/10.1007/BF02392981.

[91] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.* — 1969. — Vol. 448. — P. 40.

[92] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I.* — 1971. — no. 488. — P. 31.

[93] *Martio O., Ryazanov V.* The Chernavskiĭ theorem and quasiregular mappings // *Siberian Adv. Math.* — 2000. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 16–34.

[94] *Martio O., Srebro U., Väisälä J.* Normal families, multiplicity and the branch set of quasiregular maps // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* — 1999. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 231–252.

[95] *Milnor J.* Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. — Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. — Pp. viii+257.

[96] *Milnor J., Thurston W.* On iterated maps of the interval // *Lecture Notes in Mathematics.* — 1988. — Vol. 1342. — Pp. 465–563.

[97] *Milnor J., Thurston W.* On iterated maps of the interval // Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87). — Springer, Berlin, 1988. — Vol. 1342 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 465–563. http://dx.doi.org/10.1007/BFb0082847.

[98] *Nadler Jr. S. B.* Continuum theory. — New York: Marcel Dekker Inc., 1992. — Vol. 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* — Pp. xiv+328. — An introduction.

[99] *Newhouse S. E.* Hyperbolic limit sets // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 167. — Pp. 125–150.

[100] *Nitecki Z.* Nonsingular endomorphisms of the circle // Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968). — Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970. — Pp. 203–220.

[101] *Nitecki Z.* Factorization of nonsingular circle endomorphisms // Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971). — Academic Press, New York, 1973. — Pp. 367–373.

[102] *Nitecki Z.* Partitions for circle endomorphisms // Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. of Bahia, Salvador, 1971). — Academic Press, New York, 1973. — Pp. 375–388.

[103] *Poincaré J. H.* Mémoire sur les courbes défines par les equations différentielles i // *J. Math. Pures at Appl. 4 série.* — 1885. — Vol. 1. — Pp. 167–244.

[104] *Prishlyak A.* Gradient like Morse-Smale dynamical systems on 4-manifolds // *Mat. studii.* — 2001. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 99–104.

[105] *Prishlyak A.* Topological classification of flows and functions on low-dimensional manifolds // *Preprint.* — 2004. — Vol. 6. — P. 58.
[106] *Reshetnyak Y. G.* Space mappings with bounded distortion. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1989. — Vol. 73 of *Translations of Mathematical Monographs.* — Pp. xvi+362. — Translated from the Russian by H. H. McFaden.
[107] *Sergeraert F.* Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité // *Inven. Math.* — 1977. — Vol. 39. — Pp. 253–275.
[108] *Sharkovsky A.* Dynamics of One-Dimensional Maps. — Springer, 1997. — P. 261.
[109] *Smith L.* Transfer and ramified coverings // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1983. — Vol. 93, no. 3. — Pp. 485–493. http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100060795.
[110] *Smith P.* The Regular Components of Surface Transformations // *Amer. Jour. of math.* — 1930. — Vol. 52, no. 2. — Pp. 357–369.
[111] *Sternberg S.* Local c^{∞}-transformations of the real line // *Duke. Math. Journ.* — 1957. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 99–102.
[112] *Stoïlow S.* Leçon sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques. — Paris, 1938. — P. 228.
[113] *Stoïlow S.* Sur une extension topologique du principe du maximum du module et ses applications à la théorie des fonctions // *Acad. Roum. Bull. Sect. Sci.* — 1940. — Vol. 23. — Pp. 28–30.
[114] *Stoïlow S.* Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Deuxième édition, augmentée de notes sur les fonctions analytiques et leurs surfaces de Riemann. — Paris: Gauthier-Villars, 1956. — Pp. xvi+194.
[115] *Stoïlow S.* Sur la classification topologique des recouvrements riemanniens // *Rev. Math. Pures Appl.* — 1956. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 37–42.
[116] *Väisälä J.* Discrete open mappings on manifolds // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.* — 1966. — Vol. 392. — P. 10.
[117] *Väisälä J.* A survey of quasiregular maps in $\mathbf{R}^n$ // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978). — Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980. — Pp. 685–691.
[118] *van Kampen E. R.* The topological transformations of a simple closed curve into itself // *Amer. J. Math.* — 1935. — Vol. 57. — Pp. 142–152.
[119] *Vlasenko I. Y.* On the classification of the regular components of two-dimentional inner maps // *Ukr. Math. Journal.* — 2013. — Vol. 65, no. 12. — Pp. 41–48.

[120] *Whyburn G. T.* Non-alternating transformations // *American Journal of Mathematics.* — 1934. — Vol. 56. — Pp. 294–302.

[121] *Whyburn G. T.* Analytic Topology. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 28. — New York: American Mathematical Society, 1942. — Pp. x+278.

[122] *Whyburn G. T.* On the interiority of real functions // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1942. — Vol. 48. — Pp. 942–945.

[123] *Whyburn G. T.* Interior mappings into the circle // *Duke Math. J.* — 1944. — Vol. 11. — Pp. 431–434.

[124] *Wilson D.* Open mappings on manifolds and a counterexample to the Whyburn conjecture // *Duke Math. J.* — 1973. — Vol. 40. — Pp. 705–716.

[125] *Zelinskii Y.* Continuous mappings between domains of manifolds // *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.* — 2010. — Vol. 60, no. 2. — Pp. 11–14.

[126] *Zorich V. A.* The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems // Quasiconformal space mappings. — Berlin: Springer, 1992. — Vol. 1508 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 132–148. http://dx.doi.org/10.1007/BFb0094243.

Предметный указатель

Наукове видання
Праці
Інституту математики НАН України
Математика та її застосування
Том 101

Власенко Ігор Юрійович

ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ:
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ
(Рос. мовою)

Комп'ютерний набір та верстка
І. Ю. Власенко

Підп. до друку 09.09.2014. Формат 60 × 84/16. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 4,25. Ум. друк арк. 4.0
Тираж 65 пр. Зам. 175.

Ін-т математики НАН України
01601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3