1. Базові поняття теорії гомотопій.

Ключові слова: гомотопія, стягувані простори, ретракти та (сильні) деформаційні ретракти, гомотопічна еквівалентність, проста гомотопічна еквівалентність, лінійна зв'язність, компоненти лінійної зв'язності.

Означення. Нехай X та Y — топологічні простори. Відображення $F : X \times I \to Y$ називається *гомотопією*. Позначимо $F_t = F|_{X\times t} : X \to Y$. Тоді F також називають *гомотопією між* F_0 *та* F_1.

Через $[X, Y]$ позначається множина гомотопічних класів відображень $X \to Y$.

Задача 1.1. Довести, що $\mathbb{R}^n$ є зв'язним простором

Задача 1.2. Нехай

- $O(n)$ — ортогональна група,
- $SL(\mathbb{R}, n)$ спеціальна лінійна група, що складається з матриць $n \times n$, з детермінантом рівним 1,
- $SO(\mathbb{R}, n) = O(n) \cap SL(\mathbb{R}, n)$,
- $GL(\mathbb{R}, n)$ — загальна лінійна група, що складається з усіх невироджених матриць,
- $GL^+(\mathbb{R}, n)$ — підгрупа в $GL(\mathbb{R}, n)$, що складається з матриць з додатним визначником.

Описати компоненти зв'язності цих груп.

Задача 1.3. Довести, що кожен гомеоморфізм відрізка $h : [0, 1] \to [0, 1]$ який зберігає кінці, тобто $h(0) = 0$ і $h(1) = 1$, ізотопний тотожньому гомеоморфізму. Скільки компонент зв'язності має група гомеоморфізмів відрізка?

Задача 1.4. Узагальнити попередній приклад на гомеоморфізми n-диска.

2. Стягувані простори

Простір X називаться *стягуваним*, якщо тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ гомотопне постійному відображенню $X \to *$ в деяку його точку $* \in X$.

Задача 2.1. Довести, що простір X стягуваний тоді і тільки тоді, коли деяка його точка $* \in X$ є деформаційним ретрактом X.

Задача 2.2. Довести, що простір X стягуваний тоді і тільки тоді, коли $X \times 0$ є ретрактом свого конусу CX.

Задача 2.3. Довести, що наступні простори є стягуваними:

- точка
- відрізок $[0, 1]$
- скінчене дерево (зв'язний граф без циклів)
- числова пряма $\mathbb{R}$
- евклідовий простір $\mathbb{R}^n$
- гільбертів простір l_2
- одинична сфера S^∞ в l_2

Задача 2.4. Нехай M — гладкий многовид. На просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ задамо C^∞-топологію Уітні. Довести, що $C^\infty(M)$ стягуваний у цій топології тоді і лише тоді, коли M є компактом. Якщо M некомпактний, то $C^\infty(M)$ є навіть незв'язним.

Задача 2.5. Довести, що група $\mathcal{H}^+(I)$ гомеоморфізмів відрізка, що зберігають орієнтацію, є стягуваною. Побудувати гомотопію, що стягує $\mathcal{H}^+(I)$ в тотожнє відображення.

3. Ретракти та деформаційні ретракти

Підмножина $A \subset X$ називаєтся *ретрактом*, якщо існує неперервне відображення $r : X \to A$ яке є нерухомим на A, тобто $r|_A = \mathrm{id}_A$.

A називаєтся *деформаційним ретрактом*, якщо тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ гомотопне деякій ретракції $r : X \to A$.

A називаєтся *сильним деформаційним ретрактом*, якщо існує деформаційна ретракція $r_t : X \to X$, яка є нерухомою на A.

Задача 3.1. Довести, що кожна точка $* \in X$ є ретрактом X.

Задача 3.2. Чи існує ретракція відрізка $[0, 1]$ на свою границю $\{0, 1\}$?

Задача 3.3. Побудувати ретракцію числової прямої $\mathbb{R}$ на відрізок $[0, 1]$. Чи можна знайти диференційовну ретракцію $r : \mathbb{R} \to [0, 1]$, хоча б класу C^1?

Задача 3.4. Розглянемо стандартні вкладення

$$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n,$$

тобто $\mathbb{R}^i \approx \mathbb{R}^i \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{i+1}$. Нехай $D^i \subset \mathbb{R}^i$ — одиничний диск. Тоді ми отримуємо послідовність вкладень

$$D^1 \subset D^2 \subset \cdots \subset D^n.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, n-1$ побудувати ретракції $r_i : \mathbb{R}^n \to D^i$. При яких i ретракцію r_i можна зробити диференційовною?

Задача 3.5. Показати, що одиничне коло $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ є сильним деформаційним ретрактом $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Побудувати сильну деформаційну ретракцію в явному вигляді.

Задача 3.6. Узагальнити попередній приклад на вищі розмірності.

Задача 3.7. Показати, що $SL(\mathbb{R}, n)$ є сильним деформаційним ретрактом $GL^+(\mathbb{R}, n)$.

Задача 3.8. Показати, що $O(n)$ є сильним деформаційним ретрактом $GL(\mathbb{R}, n)$. Якому відомому факту з лінійної алгебри відповідає твердження даної задачі?

Задача 3.9. Перевірити, що одиничне коло $S^1 \subset \mathbb{C}$ є підгрупою мультиплікативної групи $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Показати, що ця група також ізоморфна до $SL(\mathbb{R}, 2)$, що складається з матриць виду

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким чином, кожен елемент $\theta \in S^1$ можна розглядати як гомеоморфізм (повороту) S^1. Отримуємо вкладення $S^1 \approx SL(\mathbb{R}, 2) \subset \mathcal{H}(S^1)$. Довести, що $SL(\mathbb{R}, 2)$ є сильним деформаційним ретрактом $\mathcal{H}(S^1)$. Побудувати відповідну деформацію.

Задача 3.10. Показати, що кожна ретракція $r : X \to A$ індукує вкладення $C(A, Y) \subset C(X, Y)$ при якому $C(A, Y)$ є ретрактом $C(X, Y)$. Якою формулою можна задати ретракцію $R : C(X, Y) \to C(A, Y)$?

4. Гомотопічна еквівалентність

Простори X та Y називаються *гомотопічно еквівалентними*, якщо існують такі відображення $f : X \to Y$ та $g : Y \to X$, що

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \qquad \text{гомотопне} \qquad \mathrm{id}_X$$

$$f \circ g : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \qquad \text{гомотопне} \qquad \mathrm{id}_Y.$$

При цьому самі відображення f та g називаються *гомотопічними еквівалентностями.*

Задача 4.1. Довести, що якщо A — деформаційний ретракт X, то A та X гомотопічно еквівалентні, а відображення вкладення $A \subset X$ є гомотопічною еквівалентністю.

Задача 4.2. Побудувати приклад двох графів, які є гомотопічно еквівалентними, але жоден з них не вкладається в інший у якості ретракта.

Задача 4.3. Нехай $Q_n \subset \mathbb{R}^2$ — скінчена підмножина, що складається з n точок. Довести, що простір $\mathbb{R}^2 \setminus Q_n$ гомотопічно еквівалентний букету n кіл $\vee_n S^1$.

Задача 4.4. Узагальнити попередній приклад на вищі розмірності.

Задача 4.5. Показати, що кожна поверхня з краєм гомотопічно еквівалентна букету скінченого числа кіл.

Задача 4.6. Довести, що кожен скінчений зв'язний граф гомотопічно еквівалентний букету скінченого числа кіл.

Задача 4.7. Нехай M — замкнутий многовид (тобто M — компактний і $\partial M = \emptyset$) і $f : M \to \mathbb{R}$ — гладка функція. Для кожного $a \in \mathbb{R}$ позначимо $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$. Очевидно, що $M_a \subset M_b \subset M$ при $a < b$. Нехай a — некритичне значення f. Довести, що для всіх досить малих $\varepsilon > 0$ множина $M_{a-\varepsilon}$ є сильним деформаційним ретрактом M_a.

Задача 4.8. Довести, що якщо простори X та Y гомотопічно еквівалентні, то мають місце біекції

$$[X, Z] \leftrightarrow [Y, Z] \qquad \text{та} \qquad [Z, X] \leftrightarrow [Z, Y].$$

5. Циліндр відображення

Нехай $f : X \to Y$ неперервне відображення. Побудуємо наступний простір M_f, який називається *циліндром відображення* f. Розглянемо добуток $X \times I$ і приклеїмо $X \times \{1\}$ до Y за відображенням f, тобто в незв'язному об'єднанні $X \times I \ \cup\ Y$ ототожнимо кожну точку $(x, 1)$ з точкою $f(x) \in Y$. Отриманий простір позначається M_f і називається *циліндром відображення* f:

$$M_f = X \times I \ \cup_f\ Y.$$

Задача 5.1. Нехай S^1 — одиничне коло в комплексній площині $\mathbb{C}$ і $f : S^1 \to S^1$ відображення визначене за формулою $f(z) = z^2$. Довести, що циліндр відображення f гомеоморфний стрічці Мьобіуса.

Задача 5.2. Побудувати цилиндри наступних відображень:

(1) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \geq 2$
(2) $f : X \to *$ — постійне відображення топологічного простору X в точку.
(3) $\mathrm{id} : X \to X$ — тотожнє відображення $\mathrm{id}(x) = x$ для всіх $x \in X$.

Задача 5.3. Нехай $K \subset \mathbb{R}^2$ зв'язний граф і N його регулярний окіл, а ∂N — границя цього околу.

(1) Довести, що K є сильним деформаційним ретрактом N.
(2) Побудувати ретракцію $r : N \to K$ таку, що окіл N гомеоморфний циліндру відображення $r|_{\partial N} : \partial N \to K$.

Задача 5.4. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення. Довести, що Y є сильним деформаційним ретрактом циліндра відображення M_f.

6. Конус та надбудова над відображенням

Нехай X — топологічний простір.

Конусом над X називається простір CX отриманий з $X \times I$ "стисненням" $X \times \{1\}$ в точку:

$$CX = X \times I / \{X \times 1\}.$$

Формально, точками простору CX є точки виду (x, t), при $0 \leq t < 1$ та множина $X \times 1$.

Надбудовою над X називається простір SX отриманий з $X \times I$ "стисненням" кожної з основ $X \times \{0\}$ та $X \times \{1\}$ в точку:

$$SX = X \times I / \{X \times 0, X \times 1\},$$

тобто точками простору SX є точки виду (x, t), при $0 < t < 1$ та множини $X \times 0$ та $X \times 1$.

Таким чином, надбудову SX можна уявляти як об'єднання двох конусів над X зі спільною основою.

Кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ індукує відображення конісів та надбудов:

$$Cf : CX \to CY, \qquad Sf : SX \to SY.$$

Задача 6.1. Показати, що диск D^2 є (тобто гомеоморфний) конусом над S^1, тобто $D^2 \approx CS^1$. При цьому у якості вершини конуса можна вибрати довільну точку $x \in IntD^2$. Аналогічно довести, що $D^n \approx CS^{n-1}$.

Задача 6.2. Довести, що коло S^1 є надбудовою над 0-вимірною сферою $S^0 = \partial I = \{0, 1\}$, яка складається з двох точок, тобто $S^1 = S(S^0)$.

Задача 6.3. Довести, що сфера S^2 є надбудовою над колом S^1, тобто $S^2 = S(S^1)$. Аналогічно показати, що $S^n \approx S(S^{n-1})$.

Задача 6.4. Довести, що для довільного топологічного простору X його конус CX є стягуваним.

Задача 6.5. Нехай $f : S^1 \to S^1$ відображення визначене за формулою $f(z) = z^n$. Описати відповідні відображення конусів $Cf : CS^1 \to CS^1$ та надбудов $Sf : S(S^1) \to S(S^1)$

7. Накриваючі простори.

Відображення $p : X \to A$ називається *накриваючим*, якщо для кожної точки $a \in A$ існує такий окіл U_a, що його прообраз $p^{-1}(U_a)$ є незв'язним об'єднанням множин $\cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ таких, що для кожної з них $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U_a$ є гомеоморфізмом.

Задача 7.1. Довести, що будь-яке накриваюче відображення $p : X \to A$ є *відкритим*, тобто образ $p(V)$ кожної відкритої множини $V \subset X$ є відкритою множиною в A.

Задача 7.2. Довести, що прообраз $p^{-1}(a)$ будь-якої точки $a \in A$ при накриваючому відображенні $p : X \to A$ є *дискретною* підмножиною в X.

Задача 7.3. Показати, що наступні відображення є накриваючими:

(1) $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^n$, $n \geq 1$
(2) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{it}$.

Задача 7.4. Чи буде накриваючим відображення $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^n$? і для яких $n \geq 2$?

Задача 7.5. Нехай G — топологічна група і H — її дискретна підгрупа. Показати, що проекція $p : G \to G/H$ групи G на множину правих (або лівих) класів суміжності G/H є накриваючим відображенням.

Задача 7.6. Розглянемо сферу S^3 як підмножину в просторі кватерніонів $\mathbb{H}$, що складається з кватерніонів виду

$$a + bi + cj + dk, \qquad \text{де} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Якщо ототожнити $\mathbb{H}$ з $\mathbb{R}^4$, то S^3 буде звичайною одиничною сферою. Довести наступні твердження:

(1) S^3 є групою відносно множення кватерніонів.
(2) Центр S^3 складається з двох елементів $Z = \{+1, -1\}$. Класи суміжності S^3 по Z — це пари антиподальних точок на S^3.
(3) Фактор-відображення $S^3 \to S^3/Z$ є накриваючим, а фактор-група гомеоморфна 3-вимірному проективному простору $\mathbb{R}P^3$.

Задача 7.7. Нехай $\mathbb{Z}^2$ адитивна підгрупа векторного простору $\mathbb{R}^2$ що складається з точок з цілочисельними координатами (m, n). Показати, що відображення $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ є накриваючим. Описати простір $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Задача 7.8. Нехай G та H — групи Лі і $f : G \to H$ — гомоморфізм, який індукує ізоморфізм відповідних алгебр Лі. Тоді f — накриваюче відображення.

8. Вільні групи та копредставлення груп

Задача 8.1. Записати копредставлення наступних груп:

- група цілих чисел $\mathbb{Z}$;
- скінчена циклічна група $\mathbb{Z}_n$;
- вільна абелева група $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdots \oplus \mathbb{Z}$;
- вільна група F_n;
- вільний добуток $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$;
- група перестановок 3-х символів (симетричної групи S_3), або група симетрій правильного трикутника;
- група $\mathbb{D}_n$ симетрій правильного n-кутника, а точніше, множини коренів n-го степеня з 1 на одиничному колі (відмінність проявляється лише для $n = 2$). Ця група називається групою *діедра*.

Задача 8.2. Нехай $G = \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle$ і $H = \langle h_1, \dots, h_m \mid s_1, \dots, s_n \rangle$ копредставлення груп G і H. Записати копредставлення прямого добутку $G \times H$ цих груп.

9. Фундаментальна група та теорема ван Кампена

Нехай X — топологічний простір і $x \in X$ – точка. *Фундаментальна група* $\pi_1(X, x_0)$ простору X в точці x_0 — це множина гомотопічних класів неперервних відображень

$$\pi_1(X, x_0) \ = \ [\ (I, \partial I),\ (X, x_0)\ ].$$

Кожне неперервне відображення $\omega : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ можна інтерпретувати як *петлю* в точці x_0.

Множина $\pi_1(X, x_0)$ допускає структуру групи.

Теорема ван Кампена.

Формулювання 1. *Припустимо, що топологічний простір X є об'єднанням двох таких своїх підмножин A і B, що A, B та їх перетин $A \cap B$ — лінійно зв'язні. Тоді*

$$\pi_1(X) \ \approx \ \pi_1(A) \underset{\pi_1(A\cap B)}{*} \pi_1(B),$$

тобто $\pi_1(X)$ є вільним добутком груп $\pi_1(A)$ та $\pi_1(B)$ з амальгамованою підгрупою $\pi_1(A \cap B)$.

Формулювання 2. Припустимо, що задані копредставлення:

$$\pi_1(A) = \langle a_1, \dots, a_k \mid r_1, \dots, r_\alpha \rangle \qquad \pi_1(B) = \langle b_1, \dots, b_l \mid s_1, \dots, s_\beta \rangle.$$

Нехай також $c_1, \dots, c_m$ — система твірних групи $\pi_1(A \cap B)$ і

$$\phi_A : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A), \qquad \phi_B : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$$

гомоморфізми індуковані вкладеннями $A \cap B$ в A та B відповідно.

Тоді $\phi_A(c_i)$ можна виразити через $a_1, \dots, a_k$, а $\phi_B(c_i)$ — через $b_1, \dots, b_l$.

Теорема стверджує, що $\pi_1(X)$ має наступне копредставлення:

$$\pi_1 X = \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \mid r_1, \dots, r_\alpha,\ s_1, \dots, s_\beta,\ \phi_A(c_i) = \phi_B(c_i), i = 1, \dots, m \rangle.$$

Зокрема співвідношення в групи $\pi_1(A \cap B)$ непотрібні.

Формулювання 3. Ще одна інтерпретація теореми ван Кампена полягає в наступному. Розглянемо наступну комутативну діаграму, що індукована вкладеннями відповідних просторів:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1 A \arrow[dr] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "\phi_A"] \arrow[rr, "\phi_{A\cap B}"] \arrow[dr, "\phi_B"'] & & \pi_1 X \\
& \pi_1 B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Теорема стверджує, що для довільної групи G і гомоморфізмів α, β і γ таких, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1 A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "\phi_A"] \arrow[dr, "\phi_B"'] & & G \\
& \pi_1 B \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

знайдеться єдиний гомоморфізм $\chi : \pi_1 X \to G$ для якого наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1 A \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] & & \\
\pi_1(A\cap B) \arrow[ur, "\phi_A"] \arrow[rr, "\phi_{A\cap B}"] \arrow[dr, "\phi_B"'] & & \pi_1 X \arrow[r, "\chi"] & G \\
 & \pi_1 B \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Задача 9.1. Довести, що фундаментальна група стягуваного простору X тривіальна: $\pi_1 X = 0$.

Задача 9.2. Нехай A — сильний деформаційний ретракт X, тоді вкладення $A \subset X$ індукує ізоморфізм фундаментальних груп $\pi_1 A \approx \pi_1 X$.

Задача 9.3. Припустимо, що точки $x, y \in X$ належать до однієї компоненти лінійної зв'язності простору X, тобто існує такий шлях $\alpha : I \to X$, що $\alpha(0) = x$ і $\alpha(1) = y$. Довести, що тоді групи $\pi_1(X, x)$ та $\pi_1(X, y)$ ізоморфні причому ізоморфізм $\phi_\alpha : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ можна задати формулою:

$$\phi_\alpha(\omega) = \alpha^{-1}\omega\alpha, \qquad \omega \in \pi_1(X, x).$$

Показати, що ізоморфізм ϕ_α залежить тільки від гомотопічного класу $[\alpha]$.

Зокрема, якщо простір X — лінійно зв'язний, то $\pi_1(X, x)$ не залежить від точки x. Тому для таких просторів позначення точки x часто опускають і записують просто $\pi_1 X$.

Задача 9.4. Нехай X, Y – топологічні простори, $x \in X$ і $y \in Y$ — точки. Розглянемо топологічний добуток $X \times Y$ і точку $(x, y) \in X \times Y$. Довести, що

$$\pi_1\bigl(X \times Y, (x, y)\bigr) \approx \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Задача 9.5. Знайти фундаментальні групи та виписати їх копредставлення для наступних просторів:

(1) дерева
(2) графа, що містить v вершин та e ребер
(3) кола S^1
(4) n-вимірної сфери
(5) n-вимірного диску D^n
(6) 2-вимірного тора $T^2 = S^1 \times S^1$
(7) добутку $S^1 \times S^2$
(8) проективної площини $\mathbb{R}P^2$
(9) проективного простору $\mathbb{R}P^n$
(10) компактної поверхні без краю
(11) компактної поверхні з краєм
(12) букету n кіл $\vee_n S^1$
(13) букету $S^1 \vee S^2$

У всіх прикладах підрахувати фактор-групу по комутанту $\pi_1 X/[\pi_1 X, \pi_1 X]$.

Література

[1] О. О. Пришляк *Основи сучасної топології*, Навч. посібник, КНУ ім. Т. Шевченка, 2006
[2] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии: геометрические главы*, М. Наука, 1977
[3] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, М. Наука, 1989
[4] Ху Сы-Цзян, *Теория гомотопий*, М. Мир, 1964