Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраической системы

Чуйко С.М.
(Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, 84 116 Донецкая обл., ул. Генерала Батюка, 19.)
E-mail: `chujko-slav@ukr.net`

Исследована задача о построении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ линейной нетеровой $(k \neq n)$ дифференциально алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

здесь $A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$ — непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор-столбец; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k$. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной. Изучению дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1, 2]. В статье [3] предложена оригинальная классификация, достаточные условия разрешимости,оригинальная конструкция общего решения $X_p(t)$ однородной части системы (1) а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши $K[f(s), \nu_p(s)](t)$ для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям теоремы [3, с. 11–12]. Зафиксируем произвольную непрерывную вектор функцию $\nu_p(t)$. Подставляя общее решение

$$z(t, c_{\rho_p}) = X_p(t)c_{\rho_p} + K[f(s), \nu_p(s)](t), \quad c_{\rho_p} \in \mathbb{R}^{\rho_p}$$

задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\} = 0. \tag{2}$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}, кроме того $Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times\rho_p}$.

Лемма. *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям теоремы* [3, с. 11–12]. *При условии (2) и только при нем для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a,b]$ общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_p(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[f(s); \nu_p(s); \alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\} + K[f(s), \nu_p(s)](t).$$

Здесь P_Q — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p} \to \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_p\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q.

Литература

[1] S. L. Campbell. *Singular Systems of differential equations*, San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

[2] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, Київ: Вища школа, 2000.

[3] S. M. Chuiko. *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, Journal of Mathematical Sciences 235(1): 2–18, 2018.