Про класифікацію бінарно-тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини три

А. В. Тарасевич
(Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна)
E-mail: allatarasevych@gmail.com

Нехай Q — довільна множина. *Двомісною оборотною функцією (бінарною квазігрупою або 2-квазігрупою)* [1], яка визначена на Q, називають відображення $f:\ Q^2 \to Q$, для якого існують бінарні функції f_1 і f_2, такі, що для всіх $x, y \in Q$ виконуються первинні тотожності:

$$f(f_1(x,y),y) = x, \quad f_1(f(x,y),y) = x, \qquad f(x, f_2(x,y)) = y, \quad f_2(x, f(x,y)) = y. \tag{1}$$

Тримісною оборотною функцією (тернарною квазігрупою або 3-квазігрупою) [5], яка визначена на Q, називають відображення $g:\ Q^3 \to Q$, для якого існують тернарні функції g_1, g_2, g_3, такі, що для всіх x, y, z із Q виконуються первинні тотожності:

$$\begin{array}{lll} g(g_1(x,y,z),y,z) = x, & g(x,g_2(x,y,z),z) = y, & g(x,y,g_3(x,y,z)) = z, \\ g_1(g(x,y,z),y,z) = x, & g_2(x,g(x,y,z),z) = y, & g_3(x,y,g(x,y,z)) = z. \end{array} \tag{2}$$

Під *функційним рівнянням* (див. [4]) розуміємо рівність двох термів, яка містить функційні і предметні змінні, до того ж усі предметні змінні зв'язані кванторами загальності. Функційні рівняння, які розглядаються, не містять ні функційних, ні предметних сталих. Функційне рівняння називається:

- *узагальненим*, в якому усі функційні змінні попарно різні;
- *квазігруповим*, якщо його розв'язки розглядаються на множині оборотних функцій;
- *тривіальним*, якщо його розв'язки спричинюють одноелементність базової множини;
- *бінарно-тернарним*, якщо серед його функційних змінних є і бінарні, і тернарні;
- *квадратичним*, якщо його кожна предметна змінна має точно дві появи у рівнянні.

Функційною довжиною [2] функційного рівняння називаємо кількість появ функційних змінних у рівнянні. *Предметним типом* функційного рівняння від n предметних змінних називають набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де a_i — кількість появ у рівнянні i-тої предметної змінної при лексикографічному порядку, а n — кількість різних незалежних предметних змінних. Загальна кількість всіх появ предметних змінних у рівнянні залежить від арності функційної змінної та функційної довжини рівняння. Оскільки ми розглядаємо узагальнені квазігрупові бінарно-тернарні функційні рівняння довжини три, то такі рівняння можуть мати:

1) дві бінарних та одну тернарну;
2) одну бінарну та дві тернарних функційних змінних.

В першому випадку загальна кількість появ предметних змінних – 6, а в другому випадку – 7. Оскільки розглядаються нетривіальні функційні рівняння, то, в залежності від кількості появ різних незалежних предметних змінних, в цих випадках можливі такі предметні типи рівнянь:

1) $(6,0,0)$, $(4,2,0)$, $(3,3,0)$, $(2,2,2)$;
2) $(7,0,0)$, $(5,2,0)$, $(4,3,0)$, $(3,2,2)$.

Функційні рівняння називають *парастрофно-первинно рівносильними* [2], [6], якщо від одного рівняння до іншого можна перейти за скінчену кількість застосувань первинних тотожностей (1) і (2). Множини розв'язків парастрофно-первинно рівносильних рівнянь мають залежність між собою, тобто маючи множину розв'язків одного рівняння можна легко виписати множину розв'язків парастрофно-первинно рівносильного до нього рівняння [3]. Враховуючи цю залежність, дано класифікацію відповідних функційних рівнянь на множині Q з точністю до відношення парастрофно-первинної рівносильності.

Лема 1. *Кожне узагальнене нетривіальне квадратичне бінарно-тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких трьох функційних рівнянь:*

$$F_1(F_2(x,x),y) = G(y,z,z), \tag{3}$$
$$F_1(F_2(x,y),x) = G(y,z,z), \tag{4}$$
$$F_1(F_2(x,y),z) = G(x,y,z). \tag{5}$$

Лема 2. *Кожне узагальнене нетривіальне бінарно-тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три предметного типу* $(2,2,3)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких* 12*-ти функційних рівнянь:*

$$F(x,x) = G_1(G_2(y,y,z),z,z), \tag{6}$$
$$F(x,y) = G_1(G_2(x,y,z),z,z), \tag{7}$$
$$F(x,y) = G_1(G_2(y,z,z),x,z), \tag{8}$$
$$F(x,z) = G_1(G_2(x,y,y),z,z), \tag{9}$$
$$F(x,z) = G_1(G_2(x,y,z),y,z), \tag{10}$$
$$F(x,z) = G_1(G_2(y,y,z),x,z), \tag{11}$$
$$F(x,x) = G_1(G_2(z,z,z),y,y), \tag{12}$$
$$F(x,y) = G_1(G_2(z,z,z),x,y), \tag{13}$$
$$F(x,x) = G_1(G_2(y,z,z),y,z), \tag{14}$$
$$F(x,z) = G_1(G_2(x,z,z),y,y), \tag{15}$$
$$F(z,z) = G_1(G_2(x,y,y),x,z), \tag{16}$$
$$F(z,z) = G_1(G_2(x,y,z),x,y). \tag{17}$$

Нехай $(Q;+)$ — абелева група, α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2, δ_3 — автоморфізми цієї групи; 0 — її нейтральний елемент, бінарні функції f_1, f_2 та тернарні функції g_1,g_2 лінійні над групою $(Q;+)$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \alpha_1 x + a + \beta_1 y, & f_2(x,y) &= \alpha_2 x + b + \beta_2 y,\\ g_1(x,y,z) &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, & g_2(x,y,z) &= \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + d. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 3. *Трійка функцій* (f_1, f_2, g_1)*, які лінійні над групою* $(Q;+)$ *та визначені рівностями (18), є розв'язком функційного рівняння:*

(3) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = -\beta_2$;
(4) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\gamma_1 = \alpha_1\beta_2$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\alpha_1\alpha_2 = -\beta_1$;
(5) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\beta_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \alpha_1\beta_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \gamma_1$.

Теорема 4. *Трійка функцій* (f_1, g_1, g_2)*, які лінійні над групою* $(Q;+)$ *та визначені рівностями (18), є розв'язком функційного рівняння:*

(6) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_1\delta_3 = -\gamma_2 - \gamma_3$, $\delta_1 = -\delta_2$, $\alpha_1 = -\beta_1$;
(7) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_2 = -\gamma_3 - \gamma_1\delta_3$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_2$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$;
(8) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2 - \gamma_1\delta_3$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_1$, $\alpha_1 = \gamma_2$;
(9) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_2 + \gamma_3$, $\delta_2 = -\delta_3$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$;
(10) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_3 + \gamma_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_2, \alpha_1 = \gamma_1\delta_1$;
(11) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_3 + \gamma_3$, $\delta_1 = -\delta_2$, $\alpha_1 = \gamma_2$;
(12) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\delta_1 = -\delta_2 - \delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\alpha_1 = -\beta_1$;
(13) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\delta_1 = -\delta_2 - \delta_3$, $\beta_1 = \gamma_3$, $\alpha_1 = \gamma_2$;
(14) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2 - \gamma_1\delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$, $\alpha_1 = -\beta_1$;
(15) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_2 + \gamma_1\delta_3$, $\gamma_3 = -\gamma_2$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$;
(16) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\alpha_1 = \gamma_3 - \beta_1$, $\delta_2 = -\delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$;
(17) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_3 - \beta_1$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$.

Література

[1] В. Д. Белоусов. *Основы теории квазигрупп и луп.* М.: Наука, 1967.

[2] Г.В. Крайнічук. *Classification of quasigroup functional equations of the type (3;3;0)*, Вісник ДонНу, А: природничі науки, 2016.

[3] Ф. М. Сохацький. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах. УМН*, 56(9) : 1259–1266, 2004.

[4] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications.* Academic press, New York, London, 1966.

[5] Lijun Ji, R. Wei. *The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugate invariant subgroups*, volume 18 of *Journal of Combinatorial Designs.* 292 – 304, 2010.

[6] F.M.Sokhatsky.*Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, Visnyk DonNU, À: natural Sciences, 2016.