m-опуклі множини та задача про тінь

Марія Стефанчук
(м. Київ)
E-mail: mariast@imath.kiev.ua

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Справедливе твердження, що перетин довільної кількості m-опуклих множин є m-опуклою множиною. Тому для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить E, і називати її m-опуклою оболонкою множини E.

Означення 2. m-опуклий перетин всіх m-опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-опуклою оболонкою множини E.

Частковим випадком належності точки 1-опуклій оболонці об'єднання деякого набору куль є задача про тінь, поставлена Г. Худайбергановим у 1982 році [4].

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

Іншими словами цю задачу можна сформулювати так: *яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

При $n = 2$ ця задача була розв'язана Г. Худайбергановим. Він показав, що для кола на площині двох кругів необхідно і достатньо для створення тіні в центрі кола.

Теорема 3. *Для того щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Означення 4. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-напівопуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна півплощина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Оскільки перетин довільної кількості m-напівопуклих множин є m-напівопуклою множиною, то для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ завжди знайдеться мінімальна m-напівопукла множина, яка є перетином всіх m-напівопуклих множин, які містять E.

Означення 5. m-напівопуклий перетин всіх m-напівопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-напівопуклою оболонкою множини E.

Розглянемо аналог задачі про тінь для напівопуклості, яка є частковим випадком належності точки 1-напівопуклій оболонці деякої сім'ї куль.

Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Наступна теорема дає розв'язок цієї задачі для випадку $n = 2$.

Теорема 6. *Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Наступна теорема дає достатні умови належності центра сфери 1-півопуклій оболонці сім'ї куль з центрами на цій сфері.

Теорема 7. *Для того, щоб центр двовимірної сфери в тривимірному евклідовому просторі належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Розглянемо аналоги m-опуклих множин в комплексному та гіперкомплексному просторах.

Означення 8. Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E (x \in \mathbb{H}^n \setminus E)$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Аналогічно дійсному випадку для довільної множини $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить E і називати її m-комплексною (m-гіперкомплексною) оболонкою множини E.

Ю. Б. Зелінським [1] була сформульована задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах. Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)? І встановлено, що в комплексному (гіперкомплексному) просторі при $n = 2$ для створення тіні необхідно і достатньо дві кулі.

Теорема 9. *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n$ $(4n-2)$ куль.*

Література

[1] Ю. Б. Зелинский. Задача о тени для семейства множеств. *Збірник праць Ін-ту матем. НАН України*, 12(4) : 197 – 204, 2015.

[2] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени. *Укр. мат. журн*, 67(12) : 1658 – 1666, 2015.

[3] Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук. Узагальнення задачі про тінь. *Укр. мат. журн*, 68(6) : 757 – 762, 2016.

[4] Г. Худайберганов. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. *Рукопись деп. в ВИНИТИ*, № 1772, 85 Деп, 21.02.1982 г.