Устойчивость неподвижных точек квазилинейных каскадов в пространстве $convR^n$

И.В. Атамась
(Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького)
E-mail: `atamas_v@ukr.net`

В.И. Слынько
(Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ)
E-mail: `vitstab@ukr.net`

Динамические системы (потоки и каскады) в метрическом пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ естественным образом возникают в теории управления, теории дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями, теории устойчивости систем с неточными значениями параметров. В работе [1] рассматривались вопросы устойчивости разностных уравнений с разностным оператором Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$. В частности, там установлены общие теоремы метода сравнения и прямого метода Ляпунова применительно к этому классу уравнений. В работах [2, 3] исследован вопрос об устойчивости по двум мерам дискретных динамических систем в пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$.

В пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ рассмотрим дискретную динамическую систему

$$\overline{X} = \mathbf{A}X + \psi(V[X])B, \tag{1}$$

где $X \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$. Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^q = \beta\mathbf{I}$ при некоторых натуральном q и положительном β. Пусть существует изолированная неподвижная точка $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ ДДС (1), которая определяется из уравнения

$$X^* = \mathbf{A}X^* + \psi(V[X^*])B.$$

Определение 2.1. Неподвижная точка $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ дискретной динамической системы (1) называется:

(1) устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $d_H(X_0, X^*) < \delta$ следует, что $\sup\limits_{p\in\mathbb{Z}_+} d_H(X_p, X^*) < \varepsilon$;

(2) асимптотически устойчивой по Ляпунову, если она устойчива и существует положительное число ρ такое, что при всех $X_0 \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$, $d_H(X_0, X^*) < \rho$ выполняется равенство $d_H(X_p, X^*) \to 0$ при $p \to \infty$.

Пусть

$$\delta\overline{X} = h_{\overline{X}} - h_{X^*} \in C(S^{n-1}), \quad \delta X = h_X - h_{X^*} \in C(S^{n-1}).$$

Используя результаты работы А.Д. Александрова [4] доказано, что уравнение в вариациях в окрестности неподвижной точки $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ является разностным уравнением в банаховом пространстве $C(S^{n-1})$ и имеет вид

$$\delta\overline{X} = \mathcal{Z}\delta X + o(\|\delta X\|_{C(S^{n-1})}), \quad \|\delta X\|_{C(S^{n-1})} \to 0. \tag{2}$$

Здесь действие оператора $\mathcal{Z}$ на функции $f \in C(S^{n-1})$ определяется следующим образом

$$(\mathcal{Z}f)(x) = \mathfrak{A}f(x) + \psi'_V(V[X^*])h_B(x)\int\limits_{S^{n-1}} f(p)F[X^*; d\omega(p)], \quad x \in S^{n-1},$$

а $\mathfrak{A}$ — расширение оператора $\mathbf{A}$ на пространство $C(S^{n-1})$ определяется так

$$(\mathfrak{A}f)(p) = \|\mathbf{A}^*p\| f\Big(\frac{\mathbf{A}^*p}{\|\mathbf{A}^*p\|}\Big), \quad f \in C(S^{n-1}), \quad p \in S^{n-1}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}^*$ — линейный оператор, сопряженный к $\mathbf{A}$.

Для формулировки теоремы об условиях асимптотической устойчивости неподвижной точки X^* ДДС (1), определим функции

$$\mathrm{A}_{mk} \in C(S^{n-1}), \quad \mathrm{B}_{mk} \in (C(S^{n-1}))^*, \quad k = \overline{1,q}, \quad 1 \le m \le k$$

из рекуррентных соотношений

$$\mathrm{A}_{m,k+1} = \mathrm{A}_{mk}, m = \overline{1,k}, \quad \mathrm{A}_{k+1,k+1} = \psi_V'(V[X^*])\mathfrak{A}^k h_B \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{B}_{m,k+1}[d\omega] = \mathfrak{A}^* \mathrm{B}_{mk}[d\omega] + F[X^*; d\omega]\psi_V'(V[X^*]) \int\limits_{S^{n-1}} h_B(\xi)\mathrm{B}_{mk}[d\omega(\xi)], m = \overline{1,k}, \\ \mathrm{B}_{k+1,k+1}[d\omega] = F[X^*; d\omega], \end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathfrak{A}^* \in L((C(S^{n-1}))^*)$ — сопряженный оператор к оператору $\mathfrak{A}$, с начальными условиями

$$\mathrm{A}_{11} = h_B, \quad \mathrm{B}_{11}[d\omega] = F[X^*; d\omega]. \tag{6}$$

Введем матрицу

$$d_{lm} = \int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{A}_{mq}(x)\mathrm{B}_{lq}[d\omega(x)], \quad D = [d_{lm}]_{l,m=1}^q, \tag{7}$$

и ее характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = \det[d_{lm} - \lambda\delta_{lm}]_{l,m=1}^q.$$

Теорема 3.1. Предположим, что все корни алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda - \beta) = 0$$

лежат внутри открытого единичного круга $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ и $\beta < 1$.

Тогда неподвижная точка $X = X^*$ ДДС (1) асимптотически устойчива по Ляпунову.

Литература

[1] *Gnana Bhaskar, T. and Shaw, M.* Stability results for Set Difference Equations // Dynamical Systems and Applications. – **13**, 2004. – 479-485.

[2] Slyn'ko V.I. The stability of fixed points of discrete dynamical systems in the space conv$\mathbb{R}^n$ // Functional Analysis and Its Applications, – April 2016, Volume 50, Issue 2, pp 163-165.

[3] Slyn'ko V.I. Stability in terms of two measures for set difference equations in space conv$\mathbb{R}^n$ // Applicable Analysis. 2017. – **96**, №2, p. 278-292.

[4] Александров А.Д. *К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел* // Матем. сб., **2(44)**, (1937), №5, 947-972.