2-КНФ булевих функцій, які задають самодвоїсті топології на скінченних множинах

Скрябіна А.В.
(Запорізький національний університет)
E-mail: anna_29_95@mail.ru

Стєганцева П.Г.
(Запорізький національний університет)
E-mail: steg_pol@mail.ru

Розглянемо деяку топологію τ на скінченній множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Сукупність доповнень до елементів топології τ позначимо символом $C\tau$ і назвемо доповненням топології τ. Очевидно, що $C\tau$ також є топологією на X.

Топологію τ на скінченній множині X можна задавати за допомогою булевої функції, а кожна така булева функція має 2-КНФ вигляду $(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_2})(x_{j_1} \vee \bar{x}_{j_2})...(x_{k_1} \vee \bar{x}_{k_2})$ [1]. Отже, задачу дослідження топологій можна звести до задачі дослідження 2-КНФ булевих функцій.

Твердження 1. Якщо деяка 2-КНФ задає топологію τ, то 2-КНФ, отримана з неї заміною $x_i^{\sigma} \to x_i^{\bar{\sigma}}$, задає топологію $C\tau$.

Будемо позначати символами f_τ і $f_{C\tau}$ 2-КНФ топології τ та її доповнення $C\tau$ відповідно.

Означення 1. 2-КНФ φ_1 та φ_2, які задають топології на множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, називаються *еквівалентними*, якщо існує така бієкція $f : X \to X$, що $f(\varphi_1) = \varphi_2$.

Означення 2. Топології τ і $C\tau$, а також відповідні їм 2-КНФ f_τ та $f_{C\tau}$ будемо називати *взаємно двоїстими.* Якщо після переходу від f_τ до $f_{C\tau}$ виявиться, що f_τ та $f_{C\tau}$ еквівалентні, то кожну з них будемо називати *самодвоїстою* 2-КНФ, а відповідні їм гомеоморфні топології – *самодвоїстими.*

Означення 3. *Максимальною* 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію на множині X, називається така 2-КНФ, в яку з будь-якою парою диз'юнкцій $x_i \vee \bar{x}_j$ та $x_j \vee \bar{x}_k$ входить і диз'юнкція $x_i \vee \bar{x}_k$, де $i, j, k = \overline{1, n}$.

Твердження 2. Топології τ_1 і τ_2 гомеоморфні тоді і лише тоді, коли відповідні їм максимальні 2-КНФ еквівалентні.

Означення 4. *Кратністю* змінної x_i в топології на X назвемо число, яке дорівнює кількості входжень цієї змінної в 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію. Будемо позначати кратність змінної x_i символом r_i. Аналогічно $\bar{r_i}$ – кратність $\bar{x_i}$ в 2-КНФ.

З'ясуємо, коли 2-КНФ і відповідна їй топологія є самодвоїстими.

Твердження 3. Нехай f_τ – максимальна 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію τ. Множину змінних можна розбити на пари $x_i, \bar{x}_j$ так, що їх кратності однакові, тобто $r_i = \bar{r_j}$, тоді і лише тоді, коли τ – самодвоїста топологія.

Істотні та неістотні (фіктивні) змінні булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задає топологію τ на множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, будемо називати істотними та неістотними змінними топологічного простору (X, τ). Наступне твердження пов'язує ці поняття з поняттям гомеоморфних топологій.

Твердження 4. Якщо топології τ_1 і τ_2 гомеоморфні, то вони мають однакову кількість істотних змінних.

Зрозуміло, що одну з еквівалентних 2-КНФ булевої функції, що задає топологію, можна сконструювати з диз'юнкцій виду $x_i \vee \bar{x}_j$, де $i < j$, $i, j = \overline{1, n}$. Загальна кількість таких диз'юнкцій дорівнює C_n^2. Задання топологій на скінченних множинах булевими функціями дозволяє виділяти класи топологій за такими ознаками, як кількість істотних змінних, визначена кількість диз'юнкцій в 2-КНФ та ін.

Твердження 5. Мінімальна кількість диз'юнкцій в 2-КНФ булевої функції від $n \geq 2$ змінних, що задає топологію на n-елементній множині і має n істотних змінних, обчислюється за формулою $D(n) = [\frac{1}{2}(n+1)]$.

Наприклад, при $n = 3$ така 2-КНФ має вигляд $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$, а самодвоїстими 2-КНФ із вказаною властивістю є $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)$ при $n = 4$ або $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_5 \vee \bar{x}_6)$ при $n = 6$.

Література

[1] Н.П.Башова, Е.В.Стеганцев. 2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве. *Вестник ХНТУ*, 3(54) : 16-20, 2015.