Про нові матричні представлення алгебри Кліффорда та алгебри SO(8), корисні у квантовій теорії поля

Симулик Володимир Михайлович
(Інститут електронної фізики НАН України, вул. Університетська 21, 88000 м. Ужгород, Україна)
E-mail: vsimulik@gmail.com

Матричні представлення алгебри Кліффорда (про алгебру Кліффорда див., наприклад, [1, 2]) мають важливі прикладні застосування у сучасній теоретичній фізиці. Перш за все у релятивістській квантовій механіці та квантовій теорії поля.

Нагадаємо, що одним із основних об'єктів цих важливих сучасних моделей фізичної реальності є рівняння Дірака (про рівняння Дірака та спінорне поле див., наприклад, [3]), яке описує дублет частинка-античастинка спінів $s = (1/2, 1/2)$ або, іншими словами, дублет ферміон-антиферміон зі спінами одна друга.

Найбільш відомою і корисною (а також історично першою) є форма запису цього матрично-диференціального рівняння першого порядку за допомогою гамма-матриць Дірака γ^μ, ($\mu = 0, 1, 2, 3$), які реалізують 16-вимірне матричне представлення алгебри Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathtt{C}}$(1,3) над полем комплексних чисел. У роботах [4, 5] 16 елементів представлення Кліффорда-Дірака алгебри $\mathrm{Cl}^{\mathtt{C}}$(1,3) зв'язані з ортами алгебри SO(3,3), а у наших роботах [6–10] – з ортами алгебр SO(1,5) та SO(6). Таким чином, доведено, що одні і ті ж самі 15 неодиничних елементів задають як представлення алгебри $\mathrm{Cl}^{\mathtt{C}}$(1,3), так і представлення алгебри SO(1,5) (аналогічно для SO(6)).

Представлення оператора рівняння $D \equiv i\gamma^\mu\partial_\mu - m$, а також багатьох інших операторів квантованого спінорного поля, у термінах гамма-матриць Дірака дозволяє безпосередньо використовувати антикомутаційні співвідношення між операторами алгебри Кліффорда-Дірака для знаходження симетрій, розв'язків, законів збереження (інтегралів руху), виконання процедури канонічного квантування та розрахунків процесів взаємодій у квантово-польових моделях. Важливо, що використання алгебри Кліффорда суттєво спрощує розрахунки.

Окрім рівняння Дірака, гамма-матричні представлення алгебри Кліффорда-Дірака широко використовуються у діракоподібних рівняннях для полів довільних спінів Баба [11], Баргмана-Вігнера [12], Раріти-Швінгера (для поля, що відповідає спіну 3/2 [13]), для рівняння Іваненко-Ландау-Дірака-Кейлера, див., наприклад, [14], яке описує як ферміони спіну 1/2, так і бозони спіну 1, а також у нових рівняннях для полів довільних спінів, запроваджених у розгляд нещодавно [15–17]. Таким чином, як бачимо, використання алгебри Кліффорда у квантовій теорії поля значно ширше, ніж аналіз добре відомого рівняння Дірака та відповідного йому 4-компонентного спінорного поля.

Очевидно, що актуальною є задача пошуку більш широких ніж 16-вимірна $\mathrm{Cl}^{\mathtt{C}}$(1,3) та 15-вимірна SO(1,5) алгебри, матричні предсталення яких у термінах гамма-матриць могли би мати використання як у відомих моделях квантової теорії поля, так і для побудови принципово нових моделей. Така задача ставилась і вирішувалась у наших роботах [6–10], де були знайдені нові 64-вимірні матричні представлення алгебри Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathtt{R}}$(0,6) та $\mathrm{Cl}^{\mathtt{R}}$(4,2), а також 28-вимірне представлення алгебри SO(8), над полем дійсних чисел. На відміну від відомого матричного представлення алгебри SO(1,5), 15 елементів якого з точністю до коефіцієнта 1/2 співпадають з 15 неодиничними елементами представлення алгебри Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathtt{C}}$(1,3) і задають також і 16-вимірне представлення цієї алгебри Кліффорда, знайдені нами 64-вимірні матричні представлення алгебр Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathtt{R}}$(0,6) та $\mathrm{Cl}^{\mathtt{R}}$(4,2) не співпадають суттєво з 28-вимірним представленням алгебри SO(8). Орти (28 неодиничних елементів) алгебри SO(8) не утворюють алгебру Кліффорда навіть якщо додати одиничний елемент. Для того, щоб орти знайденого нами представлення алгебри

SO(8) реалізували те чи інше представлення алгебри Кліффорда, їх необхідно принципово доповнити новими елементами. Таким чином, приходимо до 64-вимірних матричних представлень алгебр Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0{,}6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4{,}2)$ над полем дійсних чисел, що були знайдені нами раніше, див. [6–10].

На основі нових представлень згаданих алгебр у роботах [6–10] доведено наявність у стандартного рівняння Дірака не лише ферміонних, але і бозонних симетрій, розв'язків та законів збереження. Тобто доведено Фермі-Бозе дуалізм цього рівняння. Далі, у роботах [15–17] вказано на Фермі-Бозе дуалізм також і діракоподібних рівнянь для вищих спінів.

У лекції, яка пропонується, дається авторський розгляд нових представлень алгебри Кліффорда та алгебри SO(8), історії та основних принципів їх знаходження, а також їх практичного застосування до актуальних задач релятивістської квантової механіки та квантової теорії поля.

Математичний формалізм та явний вигляд реалізацій $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0{,}6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4{,}2)$ представлень алгебр Кліффорда над полем дійсних чисел, а також детальний опис представлення алгебри SO(8), легко знайти у роботах [6–10, 15–17]. Відносно наступних застосувань певний інтерес викликає аналогічний розгляд супер-алгебри Кліффорда в суперпросторі Мінковського.

Тут, для наочності, лише коротко нагадаємо, що 7 γ^{μ} матриць

$$\left\{\gamma^1,\, \gamma^2,\, \gamma^3,\, \gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\, \gamma^5 = \gamma^1\gamma^3\widehat{C},\, \gamma^6 = i\gamma^1\gamma^3\widehat{C},\, \gamma^7 = i\gamma^0\right\}, \tag{1}$$

де $\widehat{C}$ – оператор комплексного спряження, задовольняють анткомутаційним співвідношенням

$$\gamma^{\mathrm{A}}\gamma^{\mathrm{B}} + \gamma^{\mathrm{B}}\gamma^{\mathrm{A}} = -2\delta^{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} = \overline{1,7}. \tag{2}$$

для генераторів алгебри Кліффорда. Оскільки лінійно незалежними є лише 6 із них, $\gamma^4 = -i\gamma^7\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, то маємо представлення $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0{,}6)$ розмірності $2^6 = 64$.

Оператори (1) породжують також 28 ортів

$$s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}} = \{s^{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mathrm{A}}, \gamma^{\mathrm{B}}],\, s^{\mathrm{A}8} = -s^{8\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{A}}\}, \quad \bar{\mathrm{A}}, \bar{\mathrm{B}} = \overline{1,8}, \tag{3}$$

які задовольняють комутаційним співвідношенням алгебри SO(8)

$$[s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}}, s^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{D}}}] = \delta^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{C}}}s^{\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{D}}} + \delta^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}}s^{\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{A}}} + \delta^{\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{D}}}s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{C}}} + \delta^{\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{A}}}s^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}}. \tag{4}$$

Зрозуміло, що таке представлення SO(8) є алгеброю над полем дійсних чисел. Зрозуміло також, що 28 елементів SO(8) не утворюють алгебру Кліффорда і не являються підалгеброю жодної алгебри Кліффорда.

У наших роботах [6–10] інтерпретація даного представлення алгебри SO(8) не була досконалою, однак цей недолік виправлено у [15–17], особливо у [18, 19] і тут, у цьому короткому повідомленні.

Автор щиро вдячний проф. А.К. Прикарпатському за корисні зауваження щодо класифікації алгебр Кліффорда над полем дійсних чисел у минулому та слушні пропозиції щодо подальшого застосування розробленого математичного апарату на майбутнє.

Література

[1] P. Lounesto. *Clifford algebras and spinors*, 2-nd edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

[2] Д.С. Широков. *Алгебры Клиффорда и спиноры.* Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова, 2011.

[3] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей*, изд. 4-е, испр. Москва : Наука, 1984.

[4] W.A. Hepner. The inhomogeneous Lorentz group and the conformal group. *Nuov. Cim.*, 26(2) : 351–368, 1962.

[5] M. Petras. The SO(3,3) group as a common basis for Dirac's and Proca's equations *Czech. J. Phys.*, 46(6) : 455–464, 1995.

[6] В.М. Симулик, І.Ю. Кривський. Про розширену дійсну алгебру Кліффорда-Дірака та нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульвою масою. *Доповіді НАН України*, 5 : 82–88, 2010.

[7] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky. Bosonic symmetries of the Dirac equation. *Phys. Lett. A.*, 375(25) : 2479–2483, 2011.

[8] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Some statistical aspects of the spinor field Fermi–Bose duality. *Cond. Matt. Phys.*, 15(4) : 43101 (1–10), 2012.

[9] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Application of the generalized Clifford–Dirac algebra to the proof of the Dirac equation Fermi–Bose duality. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 3(1) : 46–61, 2013.

[10] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Bosonic symmetries, solutions and conservation laws for the Dirac equation with nonzero mass. *Ukr. J. Phys.*, 58(6) : 523–533, 2013.

[11] H.J. Bhabha. Relativistic wave equations for the elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 17(2-3) : 200–216, 1945.

[12] V. Bargman, E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 34 : 211–223, 1948.

[13] W. Rarita, J. Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Phys. Rev.*, 60(1) : 61, 1941.

[14] И.Ю. Кривский, Р.Р. Ломпей, В.М. Симулик. О симметриях комплексного уравнения Дирака-Кейлера. *ТМФ*, 143(1) : 64–82, 2005.

[15] V.M. Simulik. Derivation of the Dirac and Dirac-like equations of arbitrary spin from the corresponding relativistic canonical quantum mechanics. *Ukr. J. Phys.*, 60(10) : 985–1006, 2015.

[16] V.M. Simulik. Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory. *J. Phys: Conf. Ser.*, 670 : 012047(1–16), 2016.

[17] V.M. Simulik. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin s=2. *J. Phys: Conf. Ser.*, 804 : 012040(1–10), 2017.

[18] V.M. Simulik. General form of the covariant field equations of arbitrary spin and the relativistic canonical quantum mechanics. *arXiv: 1509.0463v1 [quant-ph, hep-th]*, 12 Sep. 2015. 42 p.

[19] V.M. Simulik. Relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin. *Proceedings of 9-th International Conference "Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics (BGL-9)"*, Minsk, Belarus. October 27-30 2015. P. 396–409.