

Критичні точки диференційовних відображень

Сергій Максименко

(Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна)

E-mail: maks@imath.kiev.ua

Добре відомо, що критичні точки диференційовних відображень між многовидами часто дають інформацію про топологічні властивості як відображень так і самих многовидів. Яскравим прикладом є так звана лема Морса яка говорить, що для гладкої функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на компактному m -вимірному многовиді без краю, яка має лише так звані *невироджені* критичні точки (такі функції називають *функціями Морса*), має місце таке співвідношення:

$$\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^m c_m,$$

де c_i — число критичних точок індексу i , а $\chi(M)$ — Ейлерова характеристика многовиду. Більш того, мають місце нерівності Морса

$$\text{rank} H_i(M, \mathbb{R}) \leq c_i.$$

Іншими словами, ранги груп гомологій многовиду обмежують знизу числа критичних точок відповідних індексів довільної функції Морса на M . Зокрема, якщо група гомологій $H_i(M, \mathbb{R})$ нетривіальна, то кожна функція Морса $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ матиме хоча б одну критичну точку індексу i .

Мета цих лекцій розповісти про деякі базові результати про класифікації критичних точок та розглянути їх застосування до вивчення топології многовидів. Ось список питань, про які йтиметься в мова.

- (1) Диференційовні многовиди та їх відображення. Простори джетів (струменів). Що таке h -принцип.
- (2) Дiffeоморфізми многовидів та їх дії на просторах гладких відображень. Нормальні форми критичних точок. Класифікація особливостей. Лема Морса. Прості особливості. Особливості Уїтні відображень поверхонь. Поняття корозмірності (кратності) критичних точок. Теорема Тужрона про достатність струменів.
- (3) Підготовчі теореми Вейерштраса та Мальгранжа. Застосування до класифікації критичних точок. Стійкі особливості.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений, 1*, Мир, 1982.
- [2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений, 2*, Мир, 1984.
- [3] М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, 1977.
- [4] М. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*. - М.: Мир. 1990.
- [5] Н. М. Мишачев, Я. М. Элиашберг, *Введение в h -принцип*. - М.: Московский центр непрерывного математического образования, 2004.