Квазі-еліптичні функції

Луківська Дзвенислава Володимирівна
(Львівський національний університет ім. І.Франка, вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна.)
E-mail: d.lukivska@gmail.com

Християнин Андрій Ярославович
(Львівський національний університет ім. І.Франка, вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна.)
E-mail: khrystiyanyn@ukr.net

Означення 1. Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де α, $\beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція g називається **квазі-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $\;Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = pg(u), \;\; g(u + \omega_2) = qg(u).$$

Клас квазі-еліптичних функцій позначатимемо $\mathcal{QE}$.

Теорема 2. *Кожна голоморфна квазі-еліптична функція є сталою.*

Візьмемо довільну точку u_0 і побудуємо паралелограм з вершинами $u_0,\; u_0+\omega_1,\; u_0+\omega_1+\omega_2$, $u_0 + \omega_2$. Цей паралелограм ми будемо називати паралелограмом періодів u_0, побудованим на періодах ω_1 і ω_2 і позначати $\prod(u_0)$ [2]. Точками паралелограма періодів $\prod(u_0)$ є точки вигляду $u_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \quad (0 \le r_1 < 1,\, 0 \le r_2 < 1)$.

Теорема 3. *Нехай $f \in \mathcal{QE}$. Тоді кількість нулів функції f дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному паралелограмі періодів $\prod(u_0)$.*

Розглянемо функцію

$$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)e^{i(m\alpha+n\beta)}, \tag{1}$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\; m,n \in \mathbb{Z},\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

Нехай K — компактна підмножина $\mathbb{C}$. Оскільки [1], [2]

$$\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{|\omega|^3} < +\infty,$$

то ряд в правій частині (1) або принаймні його залишок, є рівномірно збіжний на множині K. Таким чином $G_{\alpha\beta}$ мероморфна в $\mathbb{C}$.

Означення 4. Функція

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta} = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)e^{i(m\alpha+n\beta)} + C_{\alpha\beta},$$

де

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha}G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha}-1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta}G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta}-1}$$

називається **узагальненою $\wp$-функцією Вейєрштрасса.**

Для повноти, зауважимо, якщо $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, ми визначимо $C_{00} = 0$. Тоді $\wp_{00} = \wp$ (тобто $\wp_{00}$ співпадає з класичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса).

Твердження 5. *Функція* $\wp_{\alpha\beta} \in \mathcal{QE}$.

Отже, так побудована функція $\wp_{\alpha\beta}$ є своєрідним квазі-еліптичним аналогом класичної $\wp$ функції Вейєрштрасса.

Твердження 6. *Функція* $\wp_{\alpha\beta}$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$\wp'^2_{\alpha\beta}(u) - 4\wp^3_{\alpha\beta}(u) + 12C_{\alpha\beta}\wp^2_{\alpha\beta}(u) + (g_2 e^{i(m\alpha+n\beta)} - 12C^2_{\alpha\beta})\wp_{\alpha\beta}(u) = -4C^3_{\alpha\beta} - (g_3 - C_{\alpha\beta}g_2)e^{i(m\alpha+n\beta)},$$

де

$$g_2 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}.$$

Варто зазначити, що підставляючи $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, і $C_{00} = 0$ у це рівняння, ми отримаємо класичне диференціальне рівняння для функції $\wp$.

Дане рівняння дає змогу виразити всі похідні функції $\wp_{\alpha\beta}$ через $\wp_{\alpha\beta}$ і $\wp'_{\alpha\beta}$. Зокрема,

$$\wp''_{\alpha\beta}(u) = 6\wp^2_{\alpha\beta}(u) - 12C_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}(u) - \frac{1}{2}(g_2 e^{i(m\alpha+n\beta)} - 12C^2_{\alpha\beta}),$$
$$\wp'''_{\alpha\beta}(u) = 12\wp_{\alpha\beta}(u)\wp'_{\alpha\beta}(u) - 12C_{\alpha\beta}\wp'_{\alpha\beta}(u).$$

Література

[1] Hellegouarch Y. *Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles.* Academic Press, 2002.
[2] A. Hurwitz, R. Courant, *Function theory*, Moscow: Nauka. 1968. 648 pp.(in Russian).