Про різні класифікації тотожностей на квазігрупах

Г.В. Крайнічук
(Донецький національний університет ім. В. Стуса, Вінниця, Україна)
E-mail: kraynichuk@ukr.net

Алгебра $(Q;\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$ називається *квазігрупою* [1], якщо виконуються тотожності

$$(x\cdot y)\overset{\ell}{\cdot} y=x,\quad (x\overset{\ell}{\cdot} y)\cdot y=x,\quad x\overset{r}{\cdot}(x\cdot y)=y,\quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot} y)=y. \tag{1}$$

Операцію $(\cdot)$ називаємо *головною*. *Парастрофи* операції $(\cdot)$ визначаються співвідношеннями:

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot} x_{2\sigma}=x_{3\sigma} :\Leftrightarrow\ x_1\cdot x_2=x_3$$

де $\sigma\in S_3:=\{\iota,\ell,r,s,s\ell,sr\}$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$, $s:=(12)$. Очевидно, що $\overset{\sigma}{(}\overset{\tau}{\cdot})=(\overset{\sigma\tau}{\cdot})$ $\forall\sigma,\tau\in S_3$. З цієї рівності випливає, що відображення $(\sigma;(\cdot))\ \mapsto\ (\overset{\sigma}{\cdot})$ є дією групи S_3 на множині всіх квазігрупових операцій множини Q. Стабілізатор $\mathrm{Ps}(\cdot)$ цієї дії називається *парастрофною симетрією* операції $(\cdot)$ [4], тому $6/|\mathrm{Ps}(\cdot)|$ є кількістю різних парастрофів операції $(\cdot)$. Оскільки $\mathrm{Ps}(\cdot)$ є підгрупою симетричної групи S_3, то існує шість класів квазігруп. Аналогічно вводиться парастрофна симетрія для многовидів квазігруп [4]. Многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із многовида $\mathfrak{A}$ називається *σ-парастрофом многовида* $\mathfrak{A}$. Пучком многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів.

Тотожності, які визначають квазігрупу, називаються *первинними*, наприклад (1).

Означення 1. *Парастрофним (σ-парастрофним)* називається перетворення, коли тотожність ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ отримується з тотожності $\mathfrak{id}$ заміною головної опрації на її σ^{-1}-парастроф.

Означення 2. Дві тотожності називаються:

1) *рівносильними*, якщо вони визначають один і той самий многовид;
2) *первинно-рівносильними*, якщо одна отримується з другої скінченною кількістю застосувань первинних тотожностей (1) (первинно-рівносильні тотожності є рівносильними [4]);
3) *σ-парастрофними*, якщо одна отримується з другої шляхом σ-парастрофних переворень [3];
4) *σ-парастрофно-рівносильними*, якщо вони визначають σ-парастрофні многовиди (σ-парастрофно-рівносильні тотожності визначають σ-парастрофні многовиди [4]);
5) *σ-парастрофно-первинно рівносильні*, якщо одну з ним можна отримати з другої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (1) та σ_1-, σ_2-, …, σ_k-парастрофних перетворень таких, що $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k=\sigma$ для деяких $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 3. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує* 4 *класи узагальнених тотожності від трьох операцій, які визначають* 20 *пучків многовидів квазігруп.*

Білоусов В.Д. [2] описав мінімальні нетривіальні квазігрупові тотожності з точністю до первинної рівносильності. Проте ці тотожності визначають один клас парастрофно-первинно рівносильних узагальнених тотожностей. Стейн [3] знайшов всі парастрофні тотожності для деяких відомих тотожностей, зокрема таких як асоціативність, ідемпотентність, медіальність, комутативність та тотожність Стейна. Білоусов [1] подав результати Стейна у вигляді таблиці, в якій використав парастрофні многовиди.

В Таблиці 3.1 жирним шрифтом виділено тотожності знайдені не автором, див. [1], [2], [3] та інші. В одній довільній комірці розташовано рівносильні тотожності або систему тотожностей. В двох довільних комірках одного рядка знаходяться парастрофні тотожності. В різних стовпцях одного довільного рядка розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок многовидів, де стовпчики показують парастрофні многовиди квазігруп. Між подвійними лініями в таблиці в усіх рядках і стовпцях знаходяться парастрофно-первинно рівносильні тотожності, які визначають один клас узагальнених тотожностей.

Таблиця 3.1. Класифікація всіх тотожностей від трьох операцій за групами симетрій

Многовид	$\mathfrak{A}$	${}^s\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^{sr}\mathfrak{A}$
I з. Білоусова	$\mathbf{x(x\cdot xy) = y}$	$(yx\cdot x)x = y$	$x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx$ $(x \overset{r}{\cdot} yx)y = yx$	$\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$	${}^s\mathfrak{A}$
II з. Білоусова	$\mathbf{y(x\cdot xy) = x}$ $xy(xy{\cdot}x) = y$	$(yx\cdot x)y = x$ $(x{\cdot}yx)yx = y$	$x(yx\cdot y) = yx$ $y(xy\cdot x) = xy$	$x(xy\cdot x) = y$ $x(x\cdot yx) = y$ $(x\cdot xy)x = y$	$(xy\cdot x)x = y$ $x(yx\cdot x) = y$ $(x\cdot yx)x = y$	$(x\cdot yx)y = yx$ $(y\cdot xy)x = xy$
I з. Стейна	$\mathbf{x\cdot xy = yx}$	$\mathbf{yx\cdot x = xy}$	$\mathbf{x(y\cdot yx) = yx}$	$\mathbf{(x\cdot xy)y = x}$ $xy(xy\cdot y) = x$	$\mathbf{y(yx\cdot x) = x}$ $(x\cdot xy)xy = y$	$\mathbf{(xy\cdot y)x = xy}$
II з. Стейна	$\mathbf{xy{\cdot}x = y{\cdot}xy}$	$\mathfrak{A}$	$y(x\cdot yx) = x$	$(xy\cdot x)y = x$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$
III з. Стейна	$\mathbf{yx\cdot xy = x}$	$\mathfrak{A}$	$(xy\cdot x)xy = y$ $y(xy\cdot x) = x$	$xy(y\cdot xy) = x$ $(x\cdot yx)y = x$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$
I з. Шредера	$\mathbf{xy{\cdot}y = x{\cdot}xy}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
II з. Шредера	$\mathbf{xy\cdot yx = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентність	$\mathbf{x^2 = x}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентність комутативність	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy = yx}$	$\mathfrak{A}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{x\cdot xy = y}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy\cdot y = x}$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$
ідемпотентність та косо-симетричність	$x^2 = x \wedge$ $(\mathbf{xy\cdot x = y} \vee$ $\mathbf{x\cdot yx = y})$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$yx^2\cdot y = x$	$y\cdot x^2y = x$	$xy(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$ $(xy \overset{r}{\cdot} y)x = x$	$x(yx\cdot y) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)yx = y$ $x(y \overset{\ell}{\cdot} yx) = x$	$(y\cdot xy)x = x$
	$x\cdot yx^2 = y$	$x^2y\cdot x = y$	$x(yx{\cdot}y) = yx{\cdot}y$	$x(y\cdot xy) = x$	$(y{\cdot}xy)x = y{\cdot}xy$	$(yx\cdot y)x = x$
IP-квазігруп з обор. ел. x^2	$x^2\cdot xy = y$	$yx\cdot x^2 = y$	$xy\cdot yx = yx$	$x\cdot(x \overset{r}{\cdot} x)y = y$ $x(y \overset{\ell}{\cdot} xy) = x$	$xy\cdot yx = xy$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot x = y$ $(yx \overset{r}{\cdot} y)x = x$
	$x^2\cdot x = y^2$	$x\cdot x^2 = y^2$	$(y \overset{\ell}{\cdot} y)x\cdot x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{r}{\cdot} y) = x$	$x\cdot x(y \overset{r}{\cdot} y) = x$	$(y \overset{\ell}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
	$(x^2\cdot x)y = y$	$y(x\cdot x^2) = y$	$(y^2\cdot x)x = x$	$((x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x)y = y$	$x(x\cdot y^2) = x$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x)) = y$
	$(x\cdot x^2)y = y$	$y(x^2\cdot x) = y$	$y^2\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x))y = y$	$(x \overset{r}{\cdot} x)\cdot y^2 = x$	$y((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = y$
одноел.квазігр.	$\mathbf{x = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$x^2\cdot x^2 = x$	$\mathfrak{A}$	$x\cdot(x \overset{r}{\cdot} x)x = x$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot x = x$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$
	$(x^2\cdot x)x = x$	$x(x\cdot x^2) = x$	$\mathfrak{A}$	$((x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x)x = x$ $x(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x)) = x$	${}^s\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$
	$(x\cdot x^2)x = x$	$x(x^2\cdot x) = x$	$x^2\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x))x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)\cdot x^2 = x$	$x((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = x$

Література

[1] Белоусов В.Д. *Системи квазигрупп с обобщёнными тождествами*, *УМН*, XX, 1(121): 75-146, 1965.
[2] Belousov V.D. *Parastrophic-orthogonal quasigroups QRS*, 13(1):25-72, 2005.
[3] Stein S. K. *On the foundation of quasigroups*, volume 85 of *Trans. Amer. Math. Soc.*: 228-256, 1957.
[4] Sokhatsky F.M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, Visnyk DonNU, A: natural Sciences, 2016.