До задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на орієнтовних поверхнях

О.А. Кадубовський
(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», м. Слов'янськ, Україна)
E-mail: `kadubovs@ukr.net`

Нехай M_g — замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 0$, а $C_{k,l}(M_g)$ — клас гладких функцій (з трьома критичними значеннями) на M_g, які (окрім k локальних максимумів та l локальних мінімумів) мають єдину (в загальному випадку вироджену) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - k - l$ [6].

Функції f_1, f_2 з класу $C_{k,l}(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \to M_g$ і $h' : R^1 \to R^1$ (h' зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$. Якщо h зберігає орієнтацію, то функції f_1, f_2 називають топологічно спряженими [6].

В роботі [2] встановлено, що для функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ (повним) топологічним інваріантом є двокольорова хордова O-діаграма з $n = 2g + k + l - 1$ хордами, k білими та l чорними циклами. Множину діаграм зазначеного типу, які побудовано на фіксованому двокольоровому $2n$-шаблоні (напр., [2]), позначимо як $\Im^n_{k;l}$. В [2] також показано, що число топологічно неспряжених функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ співпадає з числом неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи C_n) діаграм з множини $\Im^n_{k;l}$. Зауважимо, що задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ повністю розв'язана лише для випадків $g = 0, k, l \in N$ та $g \geq 0, k = l = 1$. З оглядом результатів для інших частинних випадків можна ознайомитися, наприклад, в [3]. В загальному ж випадку, задача й до сьогодні залишається відкритим питанням.

Слід констатувати, що одним зі стримувальних факторів виявилося питання про підрахунок числа діаграм з класу $\Im^n_{k;l}$, $n = 2g + k + l - 1$, яке, в свою чергу, призводить до наступної класичної задачі «про факторизацію перестановок в n-цикли». Дійсно, неважко перевірити, що кожну діаграму з класу $\Im^n_{k;l}$ можна ототожнити: *або* з перестановкою w з S_n (S_n – група перестановок на n елементах), елементи розкладу якої в k ($1 \leq k \leq n$) незалежних циклів — суть номери білих дуг (двокольорового $2n$-шаблону з фіксованою нумерацією його дуг за годинниковою стрілкою — «1-ша чорна, 1-ша біла, 2-га чорна, 2-га біла і т.д.»), які зустрічаються при обході відповідних білих циклів діаграми (наприклад, у напрямку проти руху годинникової стрілки); *або ж* з перестановкою b з S_n, елементи розкладу якої в l незалежних циклів — суть номери чорних дуг, які зустрічаються при обході відповідних чорних циклів діаграми (у тому самому напрямку).

Отже, за перестановкою w однозначно визначається перестановка b і навпаки. Більше того, композиція $b \circ w$ є фіксованим n-циклом, а саме $b \circ w = (n, n-1, ..., 2, 1)$. І тому питання про підрахунок числа діаграм з класу $\Im^n_{k;l}$ є рівносильним до **задачі***: *про підрахунок числа пар* (w, b), $w, b \in S_n$, *таких, що число незалежних циклів перестановок* w *і* b *становить* k *і* l *відповідно, а їх добуток* $b \circ w$ *є фіксованим* n*-циклом.*

Як з'ясувалося ([1] з посиланням на роботу [4]), задача про перерахування **одноклітинкових двокольорових карт** з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами також є еквівалентною до зазначеної вище **задачі***. Всі необхідні відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [4] та роботі [1]. Таким чином, має місце

Лема 1. *Число* $d_{k,l;n}$ *діаграм з класу* $\Im^n_{k;l}$ *співпадає із числом* $\mathbf{B}(k; l; n)$ *одноклітинкових двокольорових карт з* n *ребрами (одне з яких є поміченим),* k *білими та* l *чорними вершинами.*

Теорема 2 (твердження (ii) Теореми 2, [1])**.** *Для довільного натурального n числа $\mathbf{B}(k;l;n)$ задовольняють рекурентному співвідношенню*

$$
\begin{aligned}
(n+1)\cdot \mathbf{B}(k;l;n) = (n-2)(n-1)^2 \cdot \mathbf{B}(k;l;n-2)+ \\
+(2n-1)\big(\mathbf{B}(k-1;l;n-1)+\mathbf{B}(k;l-1;n-1)\big)- \\
-(n-2)\big(\mathbf{B}(k-2;l;n-2)-2\cdot \mathbf{B}(k-1;l-1;n-2)+\mathbf{B}(k;l-2;n-2)\big)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

з граничними умовами $\mathbf{B}(1;1;1)=\mathbf{B}(1;2;2)=\mathbf{B}(2;1;2)=1$*;* $\mathbf{B}(k;l;n)=0$ *якщо* $n+1-k-l<0$.

Зауваження 3. Оскільки $n+1-k-l=2g$, то для величини $\mathbf{B}(k;l;n)$ зручно використовувати позначення $\mathbf{B}_g(k;l)=\mathbf{B}(k;l;2g+k+l-1)$, за допомогою якого одержані в роботах [1] і [5] явні формули для величин $\mathbf{B}_g(k;l)$ $(g=0;1;2;3)$ можна подати у вигляді

$$
\mathbf{B}_0(k;l)=\tfrac{1}{n}C_n^{k-1}C_n^{l-1}, \qquad \mathbf{B}_1(k;l)=\tfrac{1}{3!}C_{n+1}^{2}C_{n-1}^{k-1}C_{n-1}^{l-1}, \tag{2}
$$

$$
\mathbf{B}_2(k;l)=\tfrac{P_2(k;l)}{6\cdot 5!}\cdot C_{n+1}^{2}C_{n-1}^{k-1}C_{n-1}^{l-1}; \qquad \mathbf{B}_3(k;l)=\tfrac{P_3(k;l)}{36\cdot 7!}\cdot C_{n+1}^{2}C_{n-1}^{k-1}C_{n-1}^{l-1}, \tag{3}
$$

де

$$
\begin{aligned}
P_2(k;l) &= 5kl(k+l)+13\left(k^2+l^2\right)+47kl+86(k+l)+129,\\
P_3(k;l) &= 70k^3l^3+35k^2l^2\left(k^2+l^2\right)+1260k^2l^2(k+l)+273kl\left(k^3+l^3\right)+13410k^2l^2+\\
&\quad +6512kl\left(k^2+l^2\right)+502\left(k^4+l^4\right)+54123kl(k+l)+9978\left(k^3+l^3\right)+\\
&\quad +185554kl+71842\left(k^2+l^2\right)+219918(k+l)+238480.
\end{aligned}
$$

Слід також відзначити, що в 2011 р. в роботі [7] (Proposition 4) для зазначених величин $\mathbf{B}_g(k;l)$ встановлено справедливість й наступного рекурентного співвідношення

$$
2g\cdot \mathbf{B}_g(k;l)=\sum_{p=0}^{g-1} C_{2g+k-2p}^{2g+1-2p}\cdot \mathbf{B}_p(2g+k-2p;l)+\sum_{p=0}^{g-1} C_{2g+l-2p}^{2g+1-2p}\cdot \mathbf{B}_p(k;2g+l-2p) \tag{4}
$$

Теорема 4 (основний результат)**.** *Нехай $g\ge 0$, $k,l\in N$, а $n=2g+k+l-1$ — є простим (натуральним числом). Тоді число функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$, які не є топологічно спряженими, можна обчислити за допомогою співвідношення*

$$
d^*_{g,k,l}=\tfrac{1}{n}\big(\mathbf{B}(k;l;n)+(n-1)\cdot\rho(k;l;n)\big), \tag{5}
$$

де $\mathbf{B}(k;l;n)$ *визначаєтьcя за допомогою рекурентного співвідношення* (1) *або ж* (4) *(з урахуванням явних формул* (2)-(3)*), а величина $\rho(k;l;n)$ — за допомогою співвідношення*

$$
\rho(k;l;n)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } g=0 \text{ та } k=1 \text{ або } l=1;\\ n-2, & \text{якщо } g\ge 1 \text{ та } k=l=1;\\ 0, & \text{якщо } g\ge 0 \text{ та } k\ne 1,\ l\ne 1. \end{cases} \tag{6}
$$

Більше того, в якості асимптотичної оцінки для числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ при $n=(2g+k+l-1)\to\infty$ можна використовувати величину

$$
\tfrac{\mathbf{B}(k;l;n)}{2n}=\tfrac{\mathbf{B}(k;l;2g+k+l-1)}{2(2g+k+l-1)}. \tag{7}
$$

Література

[1] Н. М. Адрианов. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.

[2] О. Кадубовський. Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях. *Український математичний журнал*, 58(3) : 343–351, 2006.

[3] О. А. Кадубовський. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.

[4] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[5] A. Goupil, G. Schaeffer. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.

[6] A. O. Prishlyak. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface. *Topology and its Aplications*, 119(3) : 257–267, 2002.

[7] G. Chapuy. A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. *Advances in Applied Mathematics*, 47(4) : 874–893, 2011.