Конформні перетворення ріманових многовидів та збереження тензору Рімана

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський національний університет садівництва, вул.Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаська обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Означення 1. Ріманові многовиди (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$ знаходяться у конформній відповідності, якщо їх метрики пов'язані співвідношенням [1]:

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x),$$

де $\varphi(x)$ — деякий інваріант.

У роботі [3] доведено теорему.

Теорема 2. *Якщо (M^n, g) та $(\overline{M}^n, \overline{g})$, $(n > 3)$ знаходяться у конформній відповідності, так, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ зберігається при відображенні, причому, $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то функція φ, що породжує відображення, має задовольняти системі диференціальних рівнянь:*

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

умови інтегровності якої, мають вигляд:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0.$$

При цьому, тензор Рімана R^h_{ijk}, тензор Річчі R_{ij}, добуток Rg_{ij} також є інваріантними.

Звідси легко випливає, що інваріантність тензору Рімана є необхідною та достатньою умовою інваріантності тензору $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$.

Нами отримано наслідок для локально конформно-келерових многовидів.

Наслідок 3. *Якщо ЛКК-многовиди (M^n, J, g) и $(\overline{M}^n, J, \overline{g})$ знаходяться у конформній відповідності так, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ зберігається при відображенні, причому, $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то тензори:*

$$\begin{aligned}
\overset{*}{P}_{ij} &\overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};\\
\overset{*}{Q}{}^h_{ijk} &\overset{\text{def}}{=} \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) -\\
&\qquad - \delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) +\\
&\qquad + \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big) g_{ik} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big) g_{ij};
\end{aligned}$$

будуть інваріантними.

Тут, літерою ω позначено форму Лі (Lee) ЛКК-многовиду:

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Також, нами доведені теореми.

Теорема 4. *Простори (M^n, g) $(n > 2)$ що є рекурентними(зокрема, симетричними), з тензором кривини тотожно не рівним нулю, а також, простори Ейнштейна, що не є Річчі-плоскими, не дозволять таких конформних відображень що лишають узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ інваріантним.*

Також, стосовно компактних многовидів є справедливою така теорема.

Теорема 5. *Компактні многовиди (M^n, g) $(n > 2)$ не дозволяють таких конформних відображень що лишають узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ інваріантним.*

Зазначимо, стосовно ріманових многовидів, деякі подібні результати були отримані у [2].

Література

[1] Л. П. Эйзенхарт. *Риманова геометрия* М.: ИЛ, 1948.

[2] В. А. Киосак. *Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса.* Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского, 26: 98—104 2011.

[3] Є. В. Черевко Сохранение тензора энергии-импульса при конформных отображениях. *Proc. of the Intern. Geom. Center*, 5(1-2): 51-58 2012.