Мінливі множини та породжені ними математичні об'єкти

Грушка Я. І.
(Інститут Математики НАН України, м. Київ, вул. Терещенківська, 3)
E-mail: `grushka@imath.kiev.ua`

З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (тобто еволюції). Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження, тобто, залежно від системи відліку.

Кінематичні мінливі (скорочено — кінематичні множини) множини являють собою математичні структури, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними об'єктами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. Дослідження кінематичних множин може мати застосування в астрофізиці, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики можуть бути відмінними від класичних, тобто тих, які діють в околі нашої сонячної системи. Математичну теорію мінливих та кінематичних множин найбільш повно викладено в роботах [1, 2, 3]. В доповіді планується сформулювати математично строгі означення мінливих множин, кінематичних множин та універсальних кінематик, а також обговорити застосування зазначених структур для математичного обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонових узагальнень.

Література

[1] Ya.I. Grushka, *Abstract concept of changeable set.* Preprint arXiv:1207.3751v1, (2012),

[2] Ya.I. Grushka, *Draft Introduction to Abstract Kinematics (Version 2.0).* Preprint viXra:1701.0523v2, (2017),

[3] Я.І. Грушка, *Про часозворотність тахіонових кінематик.* Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **13**, (2), (2016), 125–174,

Варіанти прямокутних зв'язок з приєднаною одиницею

Олександра Десятерик
(Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка)
E-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Розглянемо напівгрупу $(S,\cdot)$. Для довільного але фіксованого елемента $a \in (S,\cdot)$ ми визначимо нову операцію $*_a$, яка задається наступною рівністю

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

де $x, y \in S$. Множина S з цією операцією теж є напівгрупою, ми будемо позначати її $(S, *_a)$ і називатимемо *варіант* напівгрупи S.

Варіанти комутативних зв'язок з нулем уже досліджувалися у [2]. У цій роботі розглянуті варіанти не комутативних зв'язок.

Напівгрупа S називається *прямокутною зв'язкою*, якщо $x \cdot y \cdot x = x$ для всіх $x, y \in S$.

Теорема 1. *(Теорема 1.1.3 з [1]) Нехай S є напівгрупою. Тоді наступні умови еквівалентні:*
(1) S є прямокутною зв'язкою;
(2) кожен елемент з напівгрупи S є ідемпотентом, та $x \cdot y \cdot z = x \cdot z$ для всіх $x, y, z \in S$;
(3) існують напівгрупа лівих нулів L та напівгрупа правих нулів R такі, що $S \simeq L \times R$;
(4) S ізоморфна напівгрупі наступного вигляду $X \times Y$, де X і Y непорожні множини, і множення задається наступним чином

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_2).$$

Теорема 2. *Нехай S прямокутна зв'язка та $(x_i, y_i) \in S$ — довільні елементи. Тоді всі варіанти $(S, *_{(x_i,y_i)})$ ізоморфні початковій прямокутній зв'язці S.*

Прямокутна зв'язка S не має одиниці. Ми розглянемо прямокутну зв'язку з приєднаною одиницею. Ми визначимо

$$1 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 1 = (x_i, y_j) \text{ для всіх } (x_i, y_j) \in S, \text{ та } 1 \cdot 1 = 1.$$

Позначимо S^1 прямокутну зв'язку S з приєднаною одиницею 1.

Твердження 3. *Нехай x_i довільний але фіксований елемент з X, та $y_k, y_v \in Y$ довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(x_i,y_k)})$ та $(S^1, *_{(x_i,y_v)})$ ізоморфні.*

Твердження 4. *Нехай y_i довільний але фіксований елемент з Y, та $x_k, x_v \in X$ довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(x_k,y_i)})$ та $(S^1, *_{(x_v,y_i)})$ ізоморфні.*

Теорема 5. *Усі варіанти прямокутної зв'язки з приеднаною одиинцею ізоморфні.*

Література

[1] John M. Howie. *Fundamentals of semigroup theory, Oxford University Press.* New York, 2003.
[2] Oleksandra Desiateryk. Variants of commutative bands with zero. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4 : 15–20, 2015.

Асимптотика інтегралів Лапласа-Стілтьєса

Добушовський М. С.
(Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна)
E-mail: mdobush19@gmail.com

Шеремета М. М.
(Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна)
E-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

Нехай V - клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0, +\infty)$ функцій F. Будемо говорити, що $F \in V(l)$, якщо $F \in V$ і $F(x) - F(x-0) \leq l < +\infty$ для всіх $x \geq 0$. Для невід'ємної на $[0, +\infty)$ функції f інтеграл

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

називається інтегралом *Лапласа-Стілтьєса.* Будемо говорити, що невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція f має регулярну зміну відносно F, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$

$$\int_{x-a}^{x+b} f(t) dF(t) \geq h f(x).$$

Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а L^0 — клас додатних неперервно диференційовних на $(0, +\infty)$ функцій l таких, що $xl'(x) = O(l(x))$ при $x \to +\infty$.

Якщо $\Phi_1 \in \Omega(A)$, то будемо говорити, що додатна двічі неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функція Φ_2 *підпорядкована* функції Φ_1, якщо

- $\Phi_2''(\sigma) = o(\Phi_1''(\sigma))$,
- $\Phi_2'(\sigma) = o(\sigma \Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$ і
- $\Phi_2'(\Phi_1) \in L^0$.

Крім того, будемо говорити, що Φ_2 є *сильно підпорядкованою* Φ_1, якщо Φ_2 є підпорядкованою Φ_1 і

$$\Phi_j'\left(\sigma + O\left(\frac{\Phi_2'(\sigma)}{\Phi_1''(\sigma)}\right)\right) = (1 + o(1))\Phi_j'(\sigma) \quad (\sigma \to +\infty), \quad j = 1, 2.$$

Метою нашого повідомлення є умови на функцію $F \in V(l)$ і функцію f регулярної зміни відносно F, за яких правильна двочленна асимптотична рівність

$$\ln I(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \tau(1 + o(1))\Phi_2(\sigma), \quad \sigma \uparrow A,$$

де $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Phi_1 \in \Omega(A)$, а функція Φ_2 сильно підпорядкована функції Φ_1.

До задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на орієнтовних поверхнях

О.А. Кадубовський
(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», м. Слов'янськ, Україна)
E-mail: `kadubovs@ukr.net`

Нехай M_g — замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 0$, а $C_{k,l}(M_g)$ — клас гладких функцій (з трьома критичними значеннями) на M_g, які (окрім k локальних максимумів та l локальних мінімумів) мають єдину (в загальному випадку вироджену) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - k - l$ [6].

Функції f_1, f_2 з класу $C_{k,l}(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \to M_g$ і $h' : R^1 \to R^1$ (h' зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$. Якщо h зберігає орієнтацію, то функції f_1, f_2 називають топологічно спряженими [6].

В роботі [2] встановлено, що для функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ (повним) топологічним інваріантом є двокольорова хордова O-діаграма з $n = 2g + k + l - 1$ хордами, k білими та l чорними циклами. Множину діаграм зазначеного типу, які побудовано на фіксованому двокольоровому $2n$-шаблоні (напр., [2]), позначимо як $\Im^n_{k;l}$. В [2] також показано, що число топологічно неспряжених функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ співпадає з числом неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи C_n) діаграм з множини $\Im^n_{k;l}$. Зауважимо, що задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ повністю розв'язана лише для випадків $g = 0, k, l \in N$ та $g \geq 0, k = l = 1$. З оглядом результатів для інших частинних випадків можна ознайомитися, наприклад, в [3]. В загальному ж випадку, задача й до сьогодні залишається відкритим питанням.

Слід констатувати, що одним зі стримувальних факторів виявилося питання про підрахунок числа діаграм з класу $\Im^n_{k;l}$, $n = 2g + k + l - 1$, яке, в свою чергу, призводить до наступної класичної задачі «про факторизацію перестановок в n-цикли». Дійсно, неважко перевірити, що кожну діаграму з класу $\Im^n_{k;l}$ можна ототожнити: *або* з перестановкою w з S_n (S_n – група перестановок на n елементах), елементи розкладу якої в k ($1 \leq k \leq n$) незалежних циклів — суть номери білих дуг (двокольорового $2n$-шаблону з фіксованою нумерацією його дуг за годинниковою стрілкою — «1-ша чорна, 1-ша біла, 2-га чорна, 2-га біла і т.д.»), які зустрічаються при обході відповідних білих циклів діаграми (наприклад, у напрямку проти руху годинникової стрілки); *або ж* з перестановкою b з S_n, елементи розкладу якої в l незалежних циклів — суть номери чорних дуг, які зустрічаються при обході відповідних чорних циклів діаграми (у тому самому напрямку).

Отже, за перестановкою w однозначно визначається перестановка b і навпаки. Більше того, композиція $b \circ w$ є фіксованим n-циклом, а саме $b \circ w = (n, n-1, ..., 2, 1)$. І тому питання про підрахунок числа діаграм з класу $\Im^n_{k;l}$ є рівносильним до **задачі***: *про підрахунок числа пар (w, b), $w, b \in S_n$, таких, що число незалежних циклів перестановок w і b становить k і l відповідно, а їх добуток $b \circ w$ є фіксованим n-циклом.*

Як з'ясувалося ([1] з посиланням на роботу [4]), задача про перерахування **одноклітинкових двокольорових карт** з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами також є еквівалентною до зазначеної вище **задачі***. Всі необхідні відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [4] та роботі [1]. Таким чином, має місце

Лема 1. *Число $d_{k,l;n}$ діаграм з класу $\Im^n_{k;l}$ співпадає із числом $\mathbf{B}(k; l; n)$ одноклітинкових двокольорових карт з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами.*

Теорема 2 (твердження (ii) Теореми 2, [1])**.** *Для довільного натурального n числа $\mathbf{B}(k; l; n)$ задовольняють рекурентному співвідношенню*

$$
\begin{aligned}
(n+1) \cdot \mathbf{B}(k; l; n) = {} & (n-2)(n-1)^2 \cdot \mathbf{B}(k; l; n-2) + \\
& + (2n-1)\big(\mathbf{B}(k-1; l; n-1) + \mathbf{B}(k; l-1; n-1)\big) - \\
& - (n-2)\big(\mathbf{B}(k-2; l; n-2) - 2 \cdot \mathbf{B}(k-1; l-1; n-2) + \mathbf{B}(k; l-2; n-2)\big)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

з граничними умовами $\mathbf{B}(1;1;1) = \mathbf{B}(1;2;2) = \mathbf{B}(2;1;2) = 1$*;* $\mathbf{B}(k;l;n) = 0$ *якщо* $n+1-k-l<0$.

Зауваження 3. Оскільки $n+1-k-l=2g$, то для величини $\mathbf{B}(k;l;n)$ зручно використовувати позначення $\mathbf{B}_g(k;l) = \mathbf{B}(k;l;2g+k+l-1)$, за допомогою якого одержані в роботах [1] і [5] явні формули для величин $\mathbf{B}_g(k;l)$ $(g=0;1;2;3)$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{B}_0(k;l) = \tfrac{1}{n} C_n^{k-1} C_n^{l-1}, \qquad \mathbf{B}_1(k;l) = \tfrac{1}{3!} C_{n+1}^2 C_{n-1}^{k-1} C_{n-1}^{l-1}, \tag{2}$$

$$\mathbf{B}_2(k;l) = \tfrac{P_2(k;l)}{6\cdot 5!} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{k-1} C_{n-1}^{l-1}; \qquad \mathbf{B}_3(k;l) = \tfrac{P_3(k;l)}{36\cdot 7!} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{k-1} C_{n-1}^{l-1}, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
P_2(k;l) &= 5kl(k+l) + 13\left(k^2+l^2\right) + 47kl + 86(k+l) + 129,\\
P_3(k;l) &= 70k^3l^3 + 35k^2l^2\left(k^2+l^2\right) + 1260k^2l^2(k+l) + 273kl\left(k^3+l^3\right) + 13410k^2l^2+\\
&\quad + 6512kl\left(k^2+l^2\right) + 502\left(k^4+l^4\right) + 54123kl(k+l) + 9978\left(k^3+l^3\right)+\\
&\quad + 185554kl + 71842\left(k^2+l^2\right) + 219918(k+l) + 238480.
\end{aligned}$$

Слід також відзначити, що в 2011 р. в роботі [7] (Proposition 4) для зазначених величин $\mathbf{B}_g(k;l)$ встановлено справедливість й наступного рекурентного співвідношення

$$2g\cdot\mathbf{B}_g(k;l) = \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g+k-2p}^{2g+1-2p}\cdot\mathbf{B}_p(2g+k-2p;l) + \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g+l-2p}^{2g+1-2p}\cdot\mathbf{B}_p(k;2g+l-2p) \tag{4}$$

Теорема 4 (основний результат)**.** *Нехай* $g \geq 0$*,* $k,l \in N$*, а* $n = 2g+k+l-1$ *— є (натуральним числом). Тоді число функцій з класу* $C_{k,l}(M_g)$*, які не є топологічно спряженими, можна обчислити за допомогою співвідношення*

$$d^*_{g,k,l} = \tfrac{1}{n}\big(\mathbf{B}(k;l;n) + (n-1)\cdot\rho(k;l;n)\big), \tag{5}$$

де $\mathbf{B}(k;l;n)$ *визначається за допомогою рекурентного співвідношення* (1) *або ж* (4) *(з урахуванням явних формул* (2)*-*(3)*), а величина* $\rho(k;l;n)$ *— за допомогою співвідношення*

$$\rho(k;l;n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } g=0 \text{ та } k=1 \text{ або } l=1;\\ n-2, & \text{якщо } g\geq 1 \text{ та } k=l=1;\\ 0, & \text{якщо } g\geq 0 \text{ та } k\neq 1,\ l\neq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Більше того, в якості асимптотичної оцінки для числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ при $n = (2g+k+l-1) \to \infty$ можна використовувати величину

$$\frac{\mathbf{B}(k;l;n)}{2n} = \frac{\mathbf{B}(k;l;2g+k+l-1)}{2(2g+k+l-1)}. \tag{7}$$

Література

[1] Н. М. Адрианов. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.

[2] О. Кадубовський. Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях. *Український математичний журнал*, 58(3) : 343–351, 2006.

[3] О. А. Кадубовський. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.

[4] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[5] A. Goupil, G. Schaeffer. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.

[6] A. O. Prishlyak. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface. *Topology and its Aplications*, 119(3) : 257–267, 2002.

[7] G. Chapuy. A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. *Advances in Applied Mathematics*, 47(4) : 874–893, 2011.

Майже сильно нульвимірні простори

Олена Карлова
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна)
E-mail: maslenizza.ua@gmail.com

Курс лекцій базується на роботах [1]–[3] і буде присвячений обговоренню таких питань.

(1) Задачі класифікації аналогів неперервних відображень, які приводять до поняття майже сильно нульвимірного простору.
(2) C-множини і простори Ердьоша.
(3) Властивості майже сильно нульвимірних просторів і відкриті питання.

Література

[1] M. Abry. On almost n-dimensional spaces, *Thomas Stieltjes Institute for mathematics*, 2007.
[2] J. J. Dijkstra, J. van Mill. Erdős Space and Homeomorphism Groups of Manifolds, *Memoirs of the AMS.* 208 (979), 2010.
[3] O. Karlova. On Baire one mappings with zero-dimensional domains, *Colloq. Math.* 147 (1) : 129–142, 2017.

Про різні класифікації тотожностей на квазігрупах

Г. В. Крайнічук
(Донецький національний університет ім. В. Стуса, Вінниця, Україна)
E-mail: kraynichuk@ukr.net

Алгебра $(Q;\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$ називається *квазігрупою* [1], якщо виконуються тотожності

$$(x\cdot y)\overset{\ell}{\cdot}y=x,\quad (x\overset{\ell}{\cdot}y)\cdot y=x,\quad x\overset{r}{\cdot}(x\cdot y)=y,\quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot}y)=y. \tag{1}$$

Операцію $(\cdot)$ називаємо *головною. Парастрофи* операції $(\cdot)$ визначаються співвідношеннями:

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot}x_{2\sigma}=x_{3\sigma}:\Leftrightarrow\ x_1\cdot x_2=x_3$$

де $\sigma\in S_3:=\{\iota,\ell,r,s,s\ell,sr\}$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$, $s:=(12)$. Очевидно, що $\overset{\sigma}{(}\overset{\tau}{\cdot})=(\overset{\sigma\tau}{\cdot})$ $\forall\sigma,\tau\in S_3$. З цієї рівності випливає, що відображення $(\sigma;(\cdot))\ \mapsto\ (\overset{\sigma}{\cdot})$ є дією групи S_3 на множині всіх квазігрупових операцій множини Q. Стабілізатор $\mathrm{Ps}(\cdot)$ цієї дії називається *парастрофною симетрією* операції $(\cdot)$ [4], тому $6/|\mathrm{Ps}(\cdot)|$ є кількістю різних парастрофів операції $(\cdot)$. Оскільки $\mathrm{Ps}(\cdot)$ є підгрупою симетричної групи S_3, то існує шість класів квазігруп. Аналогічно вводиться парастрофна симетрія для многовидів квазігруп [4]. Многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із многовида $\mathfrak{A}$ називається *σ-парастрофом многовида* $\mathfrak{A}$. Пучком многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів.

Тотожності, які визначають квазігрупу, називаються *первинними*, наприклад (1).

Означення 1. *Парастрофним (σ-парастрофним)* називається перетворення, коли тотожність ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ отримується з тотожності $\mathfrak{id}$ заміною головної опрації на її σ^{-1}-парастроф.

Означення 2. Дві тотожності називаються:

1) *рівносильними*, якщо вони визначають один і той самий многовид;
2) *первинно-рівносильними*, якщо одна отримується з другої скінченною кількістю застосувань первинних тотожностей (1) (первинно-рівносильні тотожності є рівносильними [4]);
3) *σ-парастрофними*, якщо одна отримується з другої шляхом σ-парастрофних переворень [3];
4) *σ-парастрофно-рівносильними*, якщо вони визначають σ-парастрофні многовиди (σ-парастрофно-рівносильні тотожності визначають σ-парастрофні многовиди [4]);
5) *σ-парастрофно-первинно рівносильні*, якщо одну з ним можна отримати з другої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (1) та σ_1-, σ_2-, …, σ_k-парастрофних перетворень таких, що $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k=\sigma$ для деяких $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 3. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує* 4 *класи узагальнених тотожності від трьох операцій, які визначають* 20 *пучків многовидів квазігруп.*

Білоусов В.Д. [2] описав мінімальні нетривіальні квазігрупові тотожності з точністю до первинної рівносильності. Проте ці тотожності визначають один клас парастрофно-первинно рівносильних узагальнених тотожностей. Стейн [3] знайшов всі парастрофні тотожності для деяких відомих тотожностей, зокрема таких як асоціативність, ідемпотентність, медіальність, комутативність та тотожність Стейна. Білоусов [1] подав результати Стейна у вигляді таблиці, в якій використав парастрофні многовиди.

В Таблиці 3.1 жирним шрифтом виділено тотожності знайдені не автором, див. [1], [2], [3] та інші. В одній довільній комірці розташовано рівносильні тотожності або систему тотожностей. В двох довільних комірках одного рядка знаходяться парастрофні тотожності. В різних стовпцях одного довільного рядка розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок многовидів, де стовпчики показують парастрофні многовиди квазігруп. Між подвійними лініями в таблиці в усіх рядках і стовпцях знаходяться парастрофно-первинно рівносильні тотожності, які визначають один клас узагальнених тотожностей.

Таблиця 3.1. Класифікація всіх тотожностей від трьох операцій за групами симетрій

Многовид	$\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^{sr}\mathfrak{A}$
I з. Білоусова	$\mathbf{x(x \cdot xy) = y}$	$(yx \cdot x)x = y$	$x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx$ $(x \overset{r}{\cdot} yx)y = yx$	$\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$
II з. Білоусова	$\mathbf{y(x \cdot xy) = x}$ $xy(xy{\cdot}x) = y$	$(yx \cdot x)y = x$ $(x{\cdot}yx)yx = y$	$x(yx \cdot y) = yx$ $y(xy \cdot x) = xy$	$x(xy \cdot x) = y$ $x(x \cdot yx) = y$ $(x \cdot xy)x = y$	$(xy \cdot x)x = y$ $x(yx \cdot x) = y$ $(x \cdot yx)x = y$	$(x \cdot yx)y = yx$ $(y \cdot xy)x = xy$
I з. Стейна	$\mathbf{x \cdot xy = yx}$	$\mathbf{yx \cdot x = xy}$	$\mathbf{x(y \cdot yx) = yx}$	$\mathbf{(x \cdot xy)y = x}$ $xy(xy \cdot y) = x$	$\mathbf{y(yx \cdot x) = x}$ $(x \cdot xy)xy = y$	$\mathbf{(xy \cdot y)x = xy}$
II з. Стейна	$\mathbf{xy{\cdot}x = y{\cdot}xy}$	$\mathfrak{A}$	$y(x \cdot yx) = x$	$(xy \cdot x)y = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
III з. Стейна	$\mathbf{yx \cdot xy = x}$	$\mathfrak{A}$	$(xy \cdot x)xy = y$ $y(xy \cdot x) = x$	$xy(y \cdot xy) = x$ $(x \cdot yx)y = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
I з. Шредера	$\mathbf{xy{\cdot}y = x{\cdot}xy}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
II з. Шредера	$\mathbf{xy \cdot yx = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентність	$\mathbf{x^2 = x}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентність комутативність	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy = yx}$	$\mathfrak{A}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{x \cdot xy = y}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy \cdot y = x}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
ідемпотентність та косо-симетричність	$x^2 = x \wedge$ $(\mathbf{xy \cdot x = y} \vee$ $\mathbf{x \cdot yx = y})$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$yx^2 \cdot y = x$	$y \cdot x^2y = x$	$xy(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$ $(xy \overset{r}{\cdot} y)x = x$	$x(yx \cdot y) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)yx = y$ $x(y \overset{\ell}{\cdot} yx) = x$	$(y \cdot xy)x = x$
	$x \cdot yx^2 = y$	$x^2y \cdot x = y$	$x(yx{\cdot}y) = yx{\cdot}y$	$x(y \cdot xy) = x$	$(y{\cdot}xy)x = y{\cdot}xy$	$(yx \cdot y)x = x$
IP-квазігруп з обор. ел. x^2	$x^2 \cdot xy = y$	$yx \cdot x^2 = y$	$xy \cdot yx = yx$	$x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)y = y$ $x(y \overset{\ell}{\cdot} xy) = x$	$xy \cdot yx = xy$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = y$ $(yx \overset{r}{\cdot} y)x = x$
	$x^2 \cdot x = y^2$	$x \cdot x^2 = y^2$	$(y \overset{\ell}{\cdot} y)x \cdot x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{r}{\cdot} y) = x$	$x \cdot x(y \overset{r}{\cdot} y) = x$	$(y \overset{\ell}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
	$(x^2 \cdot x)y = y$	$y(x \cdot x^2) = y$	$(y^2 \cdot x)x = x$	$((x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x)y = y$	$x(x \cdot y^2) = x$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x)) = y$
	$(x \cdot x^2)y = y$	$y(x^2 \cdot x) = y$	$y^2 \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x))y = y$	$(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot y^2 = x$	$y((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = y$
одноел.квазігр.	$\mathbf{x = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$x^2 \cdot x^2 = x$	$\mathfrak{A}$	$x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)x = x$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
	$(x^2 \cdot x)x = x$	$x(x \cdot x^2) = x$	$\mathfrak{A}$	$((x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x)x = x$ $x(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x)) = x$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$
	$(x \cdot x^2)x = x$	$x(x^2 \cdot x) = x$	$x^2 \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x))x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x^2 = x$	$x((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = x$

Література

[1] Белоусов В.Д. *Системи квазигрупп с обобщёнными тождествами*, *УМН*, XX, 1(121): 75-146, 1965.
[2] Belousov V.D. *Parastrophic-orthogonal quasigroups QRS*, 13(1):25-72, 2005.
[3] Stein S. K. *On the foundation of quasigroups*, volume 85 of *Trans. Amer. Math. Soc.*: 228-256, 1957.
[4] Sokhatsky F.M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, Visnyk DonNU, A: natural Sciences, 2016.

Квазі-еліптичні функції

Луківська Дзвенислава Володимирівна
(Львівський національний університет ім. І.Франка, вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна.)
E-mail: d.lukivska@gmail.com

Христіянин Андрій Ярославович
(Львівський національний університет ім. І.Франка, вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна.)
E-mail: khrystiyanyn@ukr.net

Означення 1. Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де α, $\beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція g називається **квазі-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u+\omega_1) = pg(u), \;\; g(u+\omega_2) = qg(u).$$

Клас квазі-еліптичних функцій позначатимемо $\mathcal{QE}$.

Теорема 2. *Кожна голоморфна квазі-еліптична функція є сталою.*

Візьмемо довільну точку u_0 і побудуємо паралелограм з вершинами u_0, $u_0+\omega_1$, $u_0+\omega_1+\omega_2$, $u_0+\omega_2$. Цей паралелограм ми будемо називати паралелограмом періодів u_0, побудованим на періодах ω_1 і ω_2 і позначати $\prod(u_0)$ [2]. Точками паралелограма періодів $\prod(u_0)$ є точки вигляду $u_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \quad (0 \le r_1 < 1,\, 0 \le r_2 < 1)$.

Теорема 3. *Нехай $f \in \mathcal{QE}$. Тоді кількість нулів функції f дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному паралелограмі періодів $\prod(u_0)$.*

Розглянемо функцію

$$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)e^{i(m\alpha+n\beta)}, \tag{1}$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Нехай K — компактна підмножина $\mathbb{C}$. Оскільки [1], [2]

$$\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{|\omega|^3} < +\infty,$$

то ряд в правій частині (1) або принаймні його залишок, є рівномірно збіжний на множині K. Таким чином $G_{\alpha\beta}$ мероморфна в $\mathbb{C}$.

Означення 4. Функція

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta} = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)e^{i(m\alpha+n\beta)} + C_{\alpha\beta},$$

де

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha}G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha}-1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta}G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta}-1}$$

називається **узагальненою $\wp$-функцією Вейєрштрасса.**

Для повноти, зауважимо, якщо $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, ми визначимо $C_{00} = 0$. Тоді $\wp_{00} = \wp$ (тобто $\wp_{00}$ співпадає з класичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса).

Твердження 5. *Функція $\wp_{\alpha\beta} \in \mathcal{QE}$.*

Отже, так побудована функція $\wp_{\alpha\beta}$ є своєрідним квазі-еліптичним аналогом класичної $\wp$ функції Вейєрштрасса.

Твердження 6. *Функція $\wp_{\alpha\beta}$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$\wp_{\alpha\beta}'^2(u) - 4\wp_{\alpha\beta}^3(u) + 12C_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}^2(u) + (g_2e^{i(m\alpha+n\beta)} - 12C_{\alpha\beta}^2)\wp_{\alpha\beta}(u) = -4C_{\alpha\beta}^3 - (g_3 - C_{\alpha\beta}g_2)e^{i(m\alpha+n\beta)},$$

де

$$g_2 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}.$$

Варто зазначити, що підставляючи $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, і $C_{00} = 0$ у це рівняння, ми отримаємо класичне диференціальне рівняння для функції $\wp$.

Дане рівняння дає змогу виразити всі похідні функції $\wp_{\alpha\beta}$ через $\wp_{\alpha\beta}$ і $\wp'_{\alpha\beta}$. Зокрема,

$$\wp''_{\alpha\beta}(u) = 6\wp_{\alpha\beta}^2(u) - 12C_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}(u) - \frac{1}{2}(g_2e^{i(m\alpha+n\beta)} - 12C_{\alpha\beta}^2),$$
$$\wp'''_{\alpha\beta}(u) = 12\wp_{\alpha\beta}(u)\wp'_{\alpha\beta}(u) - 12C_{\alpha\beta}\wp'_{\alpha\beta}(u).$$

Література

[1] Hellegouarch Y. *Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles.* Academic Press, 2002.
[2] A. Hurwitz, R. Courant, *Function theory*, Moscow: Nauka. 1968. 648 pp.(in Russian).

Гомотопійні алгебри і нескінченність-категорії

Володимир Любашенко
(Інститут математики НАНУ,вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01004)
E-mail: lub@imath.kiev.ua

H-простори Сташефа. A_n-простори.

A_∞-алгебри.

Операди, dg-операди, кооперади, dg-кооперади. Стандартні відомості з теорії категорій. Бар-конструкція для операд, кобар-конструкція для кооперад.

Резольвенти операд і гомотопійні алгебри за Марклом. L_∞-алгебри. Гомотопійні алгебри над операдою за Ленстером.

Симпліціальні множини. ∞-категорії за Лурі та Жуаялем.

Підсумки.

Критичні точки диференційовних відображень

Сергій Максименко
(Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна)
E-mail: maks@imath.kiev.ua

Добре відомо, що критичні точки диференційовних відображень між многовидами часто дають інформацію про топологічні властивості як відображень так і самих многовидів. Яскравим прикладом є так звана лема Морса яка говорить, що для гладкої функції $f : M \to \mathbb{R}$ на компактному m-вимірному многовиді без краю, яка має лише так звані *невироджені* критичні точки (такі функції називають *функціями Морса*), має місце таке співвідношення:

$$\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^m c_m,$$

де c_i — число критичних точок індексу i, а $\chi(M)$ — Ейлерова характеристика многовиду. Більш того, мають місце нерівності Морса

$$\mathrm{rank} H_i(M, \mathbb{R}) \leq c_i.$$

Іншими словами, ранги груп гомологій многовиду обмежують знизу числа критичних точок відповідних індексів довільної функції Морса на M. Зокрема, якщо група гомологій $H_i(M, \mathbb{R})$ нетривіальна, то кожна функція Морса $f : M \to \mathbb{R}$ матиме хоча б одну критичну точку індексу i.

Мета цих лекцій розповісти про деякі базові результати про класифікації критичних точок та розглянути їх застосування до вивчення топології многовидів. Ось список питань, про які йтиметься в мова.

(1) Диференційовні многовиди та їх відображення. Простори джетів (струменів). Що таке h-принцип.
(2) Дифеоморфізми многовидів та їх дії на просторах гладких відображень. Нормальні форми критичних точок. Класифікація особливостей. Лема Морса. Прості особливості. Особливості Уітні відображень поверхонь. Поняття корозмірності (кратності) критичних точок. Теорема Тужрона про достатність струменів.
(3) Підготовчі теореми Вейєрштраса та Мальгранжа. Застосування до класифікації критичних точок. Стійкі особливості.

Література

[1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений, 1*, Мир, 1982.
[2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений, 2*, Мир, 1984.
[3] М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, 1977.
[4] М. Громов, *Дифференцальные соотношения с частными производными.* - М.: Мир. 1990.
[5] Н. М. Мишачев, Я. М. Элиашберг, *Введение в h-принцип.* - М.: Московский центр непрерывного математического образования, 2004.

Аналог теореми Гана для диференційовних за Фреше функцій

В.К. Маслюченко
(м. Чернівці, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)
E-mail: v.maslyuchenko@chnu.edu.ua

В.С. Мельник
(м. Чернівці, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)
E-mail: windchange7@gmail.com

Австрійський математик Г. Ган у своїй статті 1917 року [1] довів таку теорему: для метричного простору X, напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ і напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Ж. Д'єдонне [2] переніс теорему Гана на паракомпактні простори, а Г. Тонґ [3] і М. Катетов [4] показали, що ця теорема є характеристичною для нормальності в класі T_1-просторів. Окрім того, теорема Гана має застосування в теорії наближень.

В останній час з'явилися нові аналоги та модифікації теореми Гана про проміжну функцію, зокрема, ті з них, що стосуються існування нескінченно диференційовних проміжних функцій на замкнених паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$ чи на сепарабельних гільбертових просторах [5]. Тут ми продовжимо дані дослідження, розглянувши властивість диференційовності за Фреше.

Нагадаємо деякі означення:

Означення 1. Відображення $f : X \to Y$ називається *диференційовним за Фреше у точці* x з X, якщо існує такий оператор A з $L(X, Y)$, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} = 0.$$

Такий оператор визначається однозначно, він називається *похідною Фреше* відображення f у точці x і позначається символом $f'(x)$.

Означення 2. Дійсний банаховий простір X називається *асплундовим* [17, с. 27], якщо для довільного його сепарабельного підпростору L спряжений з ним простір L^* теж сепарабельний.

Використовуючи результат про те, що існування в сепарабельному банаховому просторі диференційовної за Фреше при $x \neq 0$ еквівалентної до вихідної норми еквівалентне його асплундовості (результат з [6]) ми доводимо наступні результати.

Лема 3. *Нехай $(X, ||\cdot||)$ — дійсний банаховий простір з диференційовною при $x \neq 0$ нормою $||\cdot||$, $x_0 \in X$ і $0 < r < R$. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 1$ на $B[x_0, r]$, $suppf = B(x_0, R)$ і $||f'(x)|| \le \frac{M}{R-r}$ на X.*

Тут $I = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{t^2-1}} dt$ і $M = \frac{2}{eI}$.

Використовуючи сепарабельність простору X, для довільної обмеженої множини $G \subset X$ можна побудувати диференційовну за Фреше функцію f з носієм $\mathrm{supp} f = G$. З цих результатів, використовуючи розбиття одиниці, отримаємо наступне:

Теорема 4. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір, $g : X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервна зверху, а $h : X \to \mathbb{R}$ — знизу, такі, що $g(x) < h(x)$ на X. Тоді існує така диференційовна за Фреше функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) < f(x) < h(x)$.*

Література

[1] Hahn H. Uber halbstetige und unstetige Functionen *Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa.*, 126 : 91–110, 1917.
[2] Dieudonne J. Une généralisation des espaces compacts *J. de Math. Pyres et Appl.*, 23 : 65–76, 1944.
[3] Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces *Duke Math.J.*, 19 : 282–292, 1952.

[4] Katetov M. Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' *Fund.Math.*, 40 : 203–205, 1953.
[5] Маслюченко В.К., Мельник В.С. Про побудову проміжних диференційовних функцій *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта 22-25 лютого 2017 р.): Тези доповідей*, 105–106, 2017.
[6] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. *Longman Scientific & Technical*, 1993, 359 p.

Топологія функцій та їх деформацій на поверхнях з межею

Олександр Пришляк
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)
E-mail: `prishlyak@yahoo.com`

Ми розглядаємо гладкі функції на компактних орієнтованих поверхнях з непорожньою межею. Серед таких функцій прості m-функції утворюють відкриту скрізь щільну множину. Вони також є структурно стійкими. Для них ми будуємо як локальні інваріанти (прості або складності 0 атоми), а також глобальний інваріант (граф Ріба). Будуть описані їх топологічні властивості. Також будуть побудовані всі орієнтовані атоми складності 1.

Розглядаються деформації загального положення, що є шляхами у просторі гладких функцій. Кожна така деформація за виключенням скінченого числа значень параметра (що відповідають особливостям) складається з m-функцій. Особливості деформації бувають трьох типів:

1) вироджена внутрішня або гранична точка,
2) невироджена критична точка не межі,
3) деформація атома складності 1 до простої m-функції.

Для кожної такої деформації буде описана перебудова графа Ріба.

Література

[1] G. Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique, *C.R.A.S.*, Paris 222, 1946, 847–849.

[2] A. S. Kronrod. Functions of two variables (Russian), *Succes of mathematician sciences*, Vol. 5, 1950, 24–134.

[3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. *Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т.* — Ижевськ: Изд.Дом "Удмурський университет 1999. — Т.1.

[4] A. Jankowski, R. Rubinsztein. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary, *Comment. Math. Prace Mat.* 16, 1972, 99-112.

[5] Б. І. Гладиш, О. О. Пришляк. Функції з невиродженими критичними точками на межі поверхні, *Укр.мат.журн.*, 68 (1), 2016, 28–37.

[6] M. Borodzik, A. Nemethi, A. Ranicki. *Morse theory for manifolds with boundary*, (2014), (arXiv: 1207.3066v4[math.GT]).

Про нові матричні представлення алгебри Кліффорда та алгебри SO(8), корисні у квантовій теорії поля

Симулик Володимир Михайлович
(Інститут електронної фізики НАН України, вул. Університетська 21, 88000 м. Ужгород, Україна)
E-mail: vsimulik@gmail.com

Матричні представлення алгебри Кліффорда (про алгебру Кліффорда див., наприклад, [1, 2]) мають важливі прикладні застосування у сучасній теоретичній фізиці. Перш за все у релятивістській квантовій механіці та квантовій теорії поля.

Нагадаємо, що одним із основних об'єктів цих важливих сучасних моделей фізичної реальності є рівняння Дірака (про рівняння Дірака та спінорне поле див., наприклад, [3]), яке описує дублет частинка-античастинка спінів $s = (1/2, 1/2)$ або, іншими словами, дублет ферміон-антиферміон зі спінами одна друга.

Найбільш відомою і корисною (а також історично першою) є форма запису цього матрично-диференціального рівняння першого порядку за допомогою гамма-матриць Дірака γ^μ, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, які реалізують 16-вимірне матричне представлення алгебри Кліффорда Cl (1,3) над полем комплексних чисел. У роботах [4, 5] 16 елементів представлення Кліффорда-Дірака алгебри Cl (1,3) зв'язані з ортами алгебри SO(3,3), а у наших роботах [6–10] – з ортами алгебр SO(1,5) та SO(6). Таким чином, доведено, що одні і ті ж самі 15 неодиничних елементів задають як представлення алгебри Cl (1,3), так і представлення алгебри SO(1,5) (аналогічно для SO(6)).

Представлення оператора рівняння $D \equiv i\gamma^\mu\partial_\mu - m$, а також багатьох інших операторів квантованого спінорного поля, у термінах гамма-матриць Дірака дозволяє безпосередньо використовувати антикомутаційні співвідношення між операторами алгебри Кліффорда-Дірака для знаходження симетрій, розв'язків, законів збереження (інтегралів руху), виконання процедури канонічного квантування та розрахунків процесів взаємодій у квантово-польових моделях. Важливо, що використання алгебри Кліффорда суттєво спрощує розрахунки.

Окрім рівняння Дірака, гамма-матричні представлення алгебри Кліффорда-Дірака широко використовуються у діракоподібних рівняннях для полів довільних спінів Баба [11], Баргмана-Вігнера [12], Раріти-Швінгера (для поля, що відповідає спіну 3/2 [13]), для рівняння Іваненко-Ландау-Дірака-Кейлера, див., наприклад, [14], яке описує як ферміони спіну 1/2, так і бозони спіну 1, а також у нових рівняннях для полів довільних спінів, запроваджених у розгляд нещодавно [15–17]. Таким чином, як бачимо, використання алгебри Кліффорда у квантовій теорії поля значно ширше, ніж аналіз добре відомого рівняння Дірака та відповідного йому 4-компонентного спінорного поля.

Очевидно, що актуальною є задача пошуку більш широких ніж 16-вимірна Cl (1,3) та 15-вимірна SO(1,5) алгебри, матричні предсталення яких у термінах гамма-матриць могли би мати використання як у відомих моделях квантової теорії поля, так і для побудови принципово нових моделей. Така задача ставилась і вирішувалась у наших роботах [6–10], де були знайдені нові 64-вимірні матричні представлення алгебри Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0,6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4,2)$, а також 28-вимірне представлення алгебри SO(8), над полем дійсних чисел. На відміну від відомого матричного представлення алгебри SO(1,5), 15 елементів якого з точністю до коефіцієнта 1/2 співпадають з 15 неодиничними елементами представлення алгебри Кліффорда Cl (1,3) і задають також і 16-вимірне представлення цієї алгебри Кліффорда, знайдені нами 64-вимірні матричні представлення алгебр Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0,6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4,2)$ не співпадають суттєво з 28-вимірним представленням алгебри SO(8). Орти (28 неодиничних елементів) алгебри SO(8) не утворюють алгебру Кліффорда навіть якщо додати одиничний елемент. Для того, щоб орти знайденого нами представлення алгебри SO(8) реалізували те чи інше представлення алгебри Кліффорда, їх необхідно принципово доповнити новими елементами. Таким чином, приходимо до 64-вимірних матричних представлень алгебр Кліффорда $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0,6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4,2)$ над полем дійсних чисел, що були знайдені нами раніше, див. [6–10].

На основі нових представлень згаданих алгебр у роботах [6–10] доведено наявність у стандартного рівняння Дірака не лише ферміонних, але і бозонних симетрій, розв'язків та законів збереження.

Тобто доведено Фермі-Бозе дуалізм цього рівняння. Далі, у роботах [15–17] вказано на Фермі-Бозе дуалізм також і діракоподібних рівнянь для вищих спінів.

У лекції, яка пропонується, дається авторський розгляд нових представлень алгебри Кліффорда та алгебри SO(8), історії та основних принципів їх знаходження, а також їх практичного застосування до актуальних задач релятивістської квантової механіки та квантової теорії поля.

Математичний формалізм та явний вигляд реалізацій $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0,6)$ та $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(4,2)$ представлень алгебр Кліффорда над полем дійсних чисел, а також детальний опис представлення алгебри SO(8), легко знайти у роботах [6–10, 15–17]. Відносно наступних застосувань певний інтерес викликає аналогічний розгляд супер-алгебри Кліффорда в суперпросторі Мінковського.

Тут, для наочності, лише коротко нагадаємо, що 7 γ^{μ} матриць

$$\left\{\gamma^1,\, \gamma^2,\, \gamma^3,\, \gamma^4=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\, \gamma^5=\gamma^1\gamma^3\widehat{C},\, \gamma^6=i\gamma^1\gamma^3\widehat{C},\, \gamma^7=i\gamma^0\right\}, \tag{1}$$

де $\widehat{C}$ – оператор комплексного спряження, задовольняють антикомутаційним співвідношенням

$$\gamma^{\mathrm{A}}\gamma^{\mathrm{B}}+\gamma^{\mathrm{B}}\gamma^{\mathrm{A}}=-2\delta^{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{A,B}=\overline{1,7}. \tag{2}$$

для генераторів алгебри Кліффорда. Оскільки лінійно незалежними є лише 6 із них, $\gamma^4=-i\gamma^7\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, то маємо представлення $\mathrm{Cl}^{\mathrm{R}}(0,6)$ розмірності $2^6=64$.

Оператори (1) породжують також 28 ортів

$$s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}}=\{s^{\mathrm{AB}}=\frac{1}{4}[\gamma^{\mathrm{A}},\gamma^{\mathrm{B}}],\, s^{\mathrm{A}8}=-s^{8\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{A}}\}, \quad \bar{\mathrm{A}},\bar{\mathrm{B}}=\overline{1,8}, \tag{3}$$

які задовольняють комутаційним співвідношенням алгебри SO(8)

$$[s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}},s^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{D}}}]=\delta^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{C}}}s^{\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{D}}}+\delta^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}}s^{\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{A}}}+\delta^{\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{D}}}s^{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{C}}}+\delta^{\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{A}}}s^{\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}}. \tag{4}$$

Зрозуміло, що таке представлення SO(8) є алгеброю над полем дійсних чисел. Зрозуміло також, що 28 елементів SO(8) не утворюють алгебру Кліффорда і не являються підалгеброю жодної алгебри Кліффорда.

У наших роботах [6–10] інтерпретація даного представлення алгебри SO(8) не була досконалою, однак цей недолік виправлено у [15–17], особливо у [18, 19] і тут, у цьому короткому повідомленні.

Автор щиро вдячний проф. А.К. Прикарпатському за корисні зауваження щодо класифікації алгебр Кліффорда над полем дійсних чисел у минулому та слушні пропозиції щодо подальшого застосування розробленого математичного апарату на майбутнє.

Література

[1] P. Lounesto. *Clifford algebras and spinors*, 2-nd edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

[2] Д.С. Широков. *Алгебры Клиффорда и спиноры.* Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова, 2011.

[3] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей*, изд. 4-е, испр. Москва : Наука, 1984.

[4] W.A. Hepner. The inhomogeneous Lorentz group and the conformal group. *Nuov. Cim.*, 26(2) : 351–368, 1962.

[5] M. Petras. The SO(3,3) group as a common basis for Dirac's and Proca's equations *Czech. J. Phys.*, 46(6) : 455–464, 1995.

[6] В.М. Симулик, І.Ю. Кривський. Про розширену дійсну алгебру Кліффорда-Дірака та нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою. *Доповіді НАН України*, 5 : 82–88, 2010.

[7] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky. Bosonic symmetries of the Dirac equation. *Phys. Lett. A.*, 375(25) : 2479–2483, 2011.

[8] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Some statistical aspects of the spinor field Fermi–Bose duality. *Cond. Matt. Phys.*, 15(4) : 43101 (1–10), 2012.

[9] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Application of the generalized Clifford–Dirac algebra to the proof of the Dirac equation Fermi–Bose duality. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 3(1) : 46–61, 2013.

[10] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Bosonic symmetries, solutions and conservation laws for the Dirac equation with nonzero mass. *Ukr. J. Phys.*, 58(6) : 523–533, 2013.

[11] H.J. Bhabha. Relativistic wave equations for the elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 17(2-3) : 200–216, 1945.

[12] V. Bargman, E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 34 : 211–223, 1948.

[13] W. Rarita, J. Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Phys. Rev.*, 60(1) : 61, 1941.

[14] И.Ю. Кривский, Р.Р. Ломпей, В.М. Симулик. О симметриях комплексного уравнения Дирака-Кейлера. *ТМФ*, 143(1) : 64–82, 2005.

[15] V.M. Simulik. Derivation of the Dirac and Dirac-like equations of arbitrary spin from the corresponding relativistic canonical quantum mechanics. *Ukr. J. Phys.*, 60(10) : 985–1006, 2015.
[16] V.M. Simulik. Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory. *J. Phys: Conf. Ser.*, 670 : 012047(1–16), 2016.
[17] V.M. Simulik. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin s=2. *J. Phys: Conf. Ser.*, 804 : 012040(1–10), 2017.
[18] V.M. Simulik. General form of the covariant field equations of arbitrary spin and the relativistic canonical quantum mechanics. *arXiv: 1509.0463v1 [quant-ph, hep-th]*, 12 Sep. 2015. 42 p.
[19] V.M. Simulik. Relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin. *Proceedings of 9-th International Conference "Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics (BGL-9)"*, Minsk, Belarus. October 27-30 2015. P. 396–409.

Наближення класів згорток періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і $L_p,\ 1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_2^0 = \{\varphi \in L_2 :\ \|\varphi\|_2 \le 1,\ \varphi \perp 1\}, \tag{1}$$

з фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar\beta} \in L_2$, ряд Фур'є якого має вигляд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right)$, де $\psi = \psi(k)$ і $\bar\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — послідовності довільних дійсних чисел. Якщо $\psi(k) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$, то функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar\beta)$-похідною функції f і позначають $f^{\psi}_{\bar\beta}(x)$. Поняття $(\psi, \bar\beta)$-похідної належить О. І. Степанцю [1]. При $\beta_k \equiv \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$, класи $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ позначатимемо через $C^{\psi}_{\beta,2}$. Якщо $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta_k \equiv r,\ r \in \mathbb{N}$, то класи $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ є відомими класами диференційовних функцій W_2^r. Якщо $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, то класи $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ будемо позначати $C^{q}_{\bar\beta,2}$. При $\beta_k \equiv \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$, $C^{q}_{\bar\beta,2}$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C^{q}_{\beta,2}$. Зрозуміло, що умова включення $\Psi_{\bar\beta} \in L_2$ еквівалентна наступній умові:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f \in C$ і $\widetilde{S}_n(f;x)$ — тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}\cos kx + b_k^{(n)}\sin kx),$$

де $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ — коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f (див.[2, с. 128-129]).

Розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar\beta,2}} |f(x) - \widetilde{S}_n(f;x)|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Теорема 1 ([3]). *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2). Тоді для довільної послідовності $\bar\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2\frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)\right)^{1/2}.$$

Поряд з $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x)$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar\beta,2}} \|f(\cdot) - \widetilde{S}_n(f;\cdot)\|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Теорема 2 ([4]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2) і така, що послідовність $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є опуклою донизу. Тоді для довільної $\bar{\beta} = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 3. Із означень (3) і (4) випливають очевидні співвідношення

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; x) \leq \max_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; x) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C.$$

Як випливає з теореми 2, опуклість донизу послідовності $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є достатньою умовою того, що величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; x)$ (3) досягають значень $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C$ рівно посередині між вузлами інтерполяції, тобто при $x = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2j\pi}{2n+1}$, $j \in \mathbb{Z}$. Неважко переконатись, що при достатньо великих n умову опуклості послідовності α_m задовольняють $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$. Утім, наступне твердження показує, що для зазначених $\psi(k)$ рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C, \tag{5}$$

мають місце при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 ([4]). *Нехай $q \in (0,1)$, $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})}}.$$

Наступне твердження показує, що (5) має місце і для $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$.

Теорема 5 ([4]). *Нехай $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$, $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(W^{r}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(W^{r}_{\bar{\beta},2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}(2n+1)^r} \left(\int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)} \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1+\rho)} d\rho \right)^{1/2},$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція.

Література

[1] А.И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 1.

[2] А.И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 2.

[3] А.С. Сердюк, І.В.Соколенко. Наближення класів $(\boldsymbol{\psi}, \bar{\boldsymbol{\beta}})-$диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами. *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, **13**, № 1 : 289–299, 2016.

[4] А.С. Сердюк, І.В.Соколенко. Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа. *Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, **14**, № 1 : 238–248, 2017.

2-КНФ булевих функцій, які задають самодвоїсті топології на скінченних множинах

Скрябіна А.В.
(Запорізький національний університет)
E-mail: `anna_29_95@mail.ru`

Стєганцева П.Г.
(Запорізький національний університет)
E-mail: `steg_pol@mail.ru`

Розглянемо деяку топологію τ на скінченній множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Сукупність доповнень до елементів топології τ позначимо символом $C\tau$ і назвемо доповненням топології τ. Очевидно, що $C\tau$ також є топологією на X.

Топологію τ на скінченній множині X можна задавати за допомогою булевої функції, а кожна така булева функція має 2-КНФ вигляду $(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_2})(x_{j_1} \vee \bar{x}_{j_2})...(x_{k_1} \vee \bar{x}_{k_2})$ [1]. Отже, задачу дослідження топологій можна звести до задачі дослідження 2-КНФ булевих функцій.

Твердження 1. Якщо деяка 2-КНФ задає топологію τ, то 2-КНФ, отримана з неї заміною $x_i^\sigma \to x_i^{\bar{\sigma}}$, задає топологію $C\tau$.

Будемо позначати символами f_τ і $f_{C\tau}$ 2-КНФ топології τ та її доповнення $C\tau$ відповідно.

Означення 1. 2-КНФ φ_1 та φ_2, які задають топології на множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, називаються *еквівалентними*, якщо існує така бієкція $f : X \to X$, що $f(\varphi_1) = \varphi_2$.

Означення 2. Топології τ і $C\tau$, а також відповідні їм 2-КНФ f_τ та $f_{C\tau}$ будемо називати *взаємно двоїстими.* Якщо після переходу від f_τ до $f_{C\tau}$ виявиться, що f_τ та $f_{C\tau}$ еквівалентні, то кожну з них будемо називати *самодвоїстою* 2-КНФ, а відповідні їм гомеоморфні топології – *самодвоїстими.*

Означення 3. *Максимальною* 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію на множині X, називається така 2-КНФ, в яку з будь-якою парою диз'юнкцій $x_i \vee \bar{x}_j$ та $x_j \vee \bar{x}_k$ входить і диз'юнкція $x_i \vee \bar{x}_k$, де $i, j, k = \overline{1, n}$.

Твердження 2. Топології τ_1 і τ_2 гомеоморфні тоді і лише тоді, коли відповідні їм максимальні 2-КНФ еквівалентні.

Означення 4. *Кратністю* змінної x_i в топології на X назвемо число, яке дорівнює кількості входжень цієї змінної в 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію. Будемо позначати кратність змінної x_i символом r_i. Аналогічно $\bar{r_i}$ – кратність $\bar{x}_i$ в 2-КНФ.

З'ясуємо, коли 2-КНФ і відповідна їй топологія є самодвоїстими.

Твердження 3. Нехай f_τ – максимальна 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію τ. Множину змінних можна розбити на пари $x_i, \bar{x}_j$ так, що їх кратності однакові, тобто $r_i = \bar{r_j}$, тоді і лише тоді, коли τ – самодвоїста топологія.

Істотні та неістотні (фіктивні) змінні булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задає топологію τ на множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, будемо називати істотними та неістотними змінними топологічного простору (X, τ). Наступне твердження пов'язує ці поняття з поняттям гомеоморфних топологій.

Твердження 4. Якщо топології τ_1 і τ_2 гомеоморфні, то вони мають однакову кількість істотних змінних.

Зрозуміло, що одну з еквівалентних 2-КНФ булевої функції, що задає топологію, можна сконструювати з диз'юнкцій виду $x_i \vee \bar{x}_j$, де $i < j$, $i, j = \overline{1, n}$. Загальна кількість таких диз'юнкцій дорівнює C_n^2. Задання топологій на скінченних множинах булевими функціями дозволяє виділяти класи топологій за такими ознаками, як кількість істотних змінних, визначена кількість диз'юнкцій в 2-КНФ та ін.

Твердження 5. Мінімальна кількість диз'юнкцій в 2-КНФ булевої функції від $n \geq 2$ змінних, що задає топологію на n-елементній множині і має n істотних змінних, обчислюється за формулою $D(n) = [\frac{1}{2}(n + 1)]$.

Наприклад, при $n = 3$ така 2-КНФ має вигляд $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$, а самодвоїстими 2-КНФ із вказаною властивістю є $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)$ при $n = 4$ або $(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_5 \vee \bar{x}_6)$ при $n = 6$.

Література

[1] Н.П.Башова, Е.В.Стеганцев. 2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве. *Вестник ХН-ТУ*, 3(54) : 16-20, 2015.

m-опуклі множини та задача про тінь

Марія Стефанчук
(м. Київ)
E-mail: mariast@imath.kiev.ua

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Справедливе твердження, що перетин довільної кількості m-опуклих множин є m-опуклою множиною. Тому для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить E, і називати її m-опуклою оболонкою множини E.

Означення 2. m-опуклий перетин всіх m-опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-опуклою оболонкою множини E.

Частковим випадком належності точки 1-опуклій оболонці об'єднання деякого набору куль є задача про тінь, поставлена Г. Худайбергановим у 1982 році [4].

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

Іншими словами цю задачу можна сформулювати так: *яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

При $n = 2$ ця задача була розв'язана Г. Худайбергановим. Він показав, що для кола на площині двох кругів необхідно і достатньо для створення тіні в центрі кола.

Теорема 3. *Для того щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Означення 4. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-напівопуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна півплощина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Оскільки перетин довільної кількості m-напівопуклих множин є m-напівопуклою множиною, то для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ завжди знайдеться мінімальна m-напівопукла множина, яка є перетином всіх m-напівопуклих множин, які містять E.

Означення 5. m-напівопуклий перетин всіх m-напівопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-напівопуклою оболонкою множини E.

Розглянемо аналог задачі про тінь для напівопуклості, яка є частковим випадком належності точки 1-напівопуклій оболонці деякої сім'ї куль.

Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Наступна теорема дає розв'язок цієї задачі для випадку $n = 2$.

Теорема 6. *Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Наступна теорема дає достатні умови належності центра сфери 1-півопуклій оболонці сім'ї куль з центрами на цій сфері.

Теорема 7. *Для того, щоб центр двовимірної сфери в тривимірному евклідовому просторі належав* 1*-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Розглянемо аналоги m-опуклих множин в комплексному та гіперкомплексному просторах.

Означення 8. Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E (x \in \mathbb{H}^n \setminus E)$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Аналогічно дійсному випадку для довільної множини $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить E і називати її m-комплексною (m-гіперкомплексною) оболонкою множини E.

Ю. Б. Зелінським [1] була сформульована задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах. Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)? І встановлено, що в комплексному (гіперкомплексному) просторі при $n = 2$ для створення тіні необхідно і достатньо дві кулі.

Теорема 9. *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, *належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) *та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо* $2n$ $(4n-2)$ *куль.*

Література

[1] Ю. Б. Зелинский. Задача о тени для семейства множеств. *Збірник праць Ін-ту матем. НАН України*, 12(4) : 197 – 204, 2015.

[2] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени. *Укр. мат. журн*, 67(12) : 1658 – 1666, 2015.

[3] Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук. Узагальнення задачі про тінь. *Укр. мат. журн*, 68(6) : 757 – 762, 2016.

[4] Г. Худайберганов. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. *Рукопись деп. в ВИНИТИ*, № 1772, 85 Деп, 21.02.1982 г.

Про класифікацію бінарно-тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини три

А. В. Тарасевич
(Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна)
E-mail: allatarasevych@gmail.com

Нехай Q — довільна множина. *Двомісною оборотною функцією (бінарною квазігрупою або 2-квазігрупою)* [1], яка визначена на Q, називають відображення $f: Q^2 \to Q$, для якого існують бінарні функції f_1 і f_2, такі, що для всіх $x, y \in Q$ виконуються первинні тотожності:

$$f(f_1(x,y),y) = x, \quad f_1(f(x,y),y) = x, \qquad f(x, f_2(x,y)) = y, \quad f_2(x, f(x,y)) = y. \tag{1}$$

Тримісною оборотною функцією (тернарною квазігрупою або 3-квазігрупою) [5], яка визначена на Q, називають відображення $g: Q^3 \to Q$, для якого існують тернарні функції g_1, g_2, g_3, такі, що для всіх x, y, z із Q виконуються первинні тотожності:

$$\begin{array}{lll} g(g_1(x,y,z),y,z) = x, & g(x,g_2(x,y,z),z) = y, & g(x,y,g_3(x,y,z)) = z, \\ g_1(g(x,y,z),y,z) = x, & g_2(x,g(x,y,z),z) = y, & g_3(x,y,g(x,y,z)) = z. \end{array} \tag{2}$$

Під *функційним рівнянням* (див. [4]) розуміємо рівність двох термів, яка містить функційні і предметні змінні, до того ж усі предметні змінні зв'язані кванторами загальності. Функційні рівняння, які розглядаються, не містять ні функційних, ні предметних сталих. Функційне рівняння називається:

- *узагальненим*, в якому усі функційні змінні попарно різні;
- *квазігруповим*, якщо його розв'язки розглядаються на множині оборотних функцій;
- *тривіальним*, якщо його розв'язки спричинюють одноелементність базової множини;
- *бінарно-тернарним*, якщо серед його функційних змінних є і бінарні, і тернарні;
- *квадратичним*, якщо його кожна предметна змінна має точно дві появи у рівнянні.

Функційною довжиною [2] функційного рівняння називаємо кількість появ функційних змінних у рівнянні. *Предметним типом* функційного рівняння від n предметних змінних називають набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де a_i — кількість появ у рівнянні i-тої предметної змінної при лексикографічному порядку, а n — кількість різних незалежних предметних змінних. Загальна кількість всіх появ предметних змінних у рівнянні залежить від арності функційної змінної та функційної довжини рівняння. Оскільки ми розглядаємо узагальнені квазігрупові бінарно-тернарні функційні рівняння довжини три, то такі рівняння можуть мати:

1) дві бінарних та одну тернарну;
2) одну бінарну та дві тернарних функційних змінних.

В першому випадку загальна кількість появ предметних змінних – 6, а в другому випадку – 7. Оскільки розглядаються нетривіальні функційні рівняння, то, в залежності від кількості появ різних незалежних предметних змінних, в цих випадках можливі такі предметні типи рівнянь:

1) $(6,0,0)$, $(4,2,0)$, $(3,3,0)$, $(2,2,2)$;
2) $(7,0,0)$, $(5,2,0)$, $(4,3,0)$, $(3,2,2)$.

Функційні рівняння називають *парастрофно-первинно рівносильними* [2], [6], якщо від одного рівняння до іншого можна перейти за скінчену кількість застосувань первинних тотожностей (1) і (2). Множини розв'язків парастрофно-первинно рівносильних рівнянь мають залежність між собою, тобто маючи множину розв'язків одного рівняння можна легко виписати множину розв'язків парастрофно-первинно рівносильного до нього рівняння [3]. Враховуючи цю залежність, дано класифікацію відповідних функційних рівнянь на множині Q з точністю до відношення парастрофно-первинної рівносильності.

Лема 1. *Кожне узагальнене нетривіальне квадратичне бінарно-тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких трьох* *функційних рівнянь:*

$$F_1(F_2(x,x),y) = G(y,z,z), \quad (3)$$
$$F_1(F_2(x,y),x) = G(y,z,z), \quad (4)$$
$$F_1(F_2(x,y),z) = G(x,y,z). \quad (5)$$

Лема 2. *Кожне узагальнене нетривіальне бінарно-тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три предметного типу* $(2,2,3)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких 12-ти функційних рівнянь:*

$$F(x,x) = G_1(G_2(y,y,z),z,z), \quad (6) \qquad F(x,y) = G_1(G_2(x,y,z),z,z), \quad (7)$$
$$F(x,y) = G_1(G_2(y,z,z),x,z), \quad (8) \qquad F(x,z) = G_1(G_2(x,y,y),z,z), \quad (9)$$
$$F(x,z) = G_1(G_2(x,y,z),y,z), \quad (10) \qquad F(x,z) = G_1(G_2(y,y,z),x,z), \quad (11)$$
$$F(x,x) = G_1(G_2(z,z,z),y,y), \quad (12) \qquad F(x,y) = G_1(G_2(z,z,z),x,y), \quad (13)$$
$$F(x,x) = G_1(G_2(y,z,z),y,z), \quad (14) \qquad F(x,z) = G_1(G_2(x,z,z),y,y), \quad (15)$$
$$F(z,z) = G_1(G_2(x,y,y),x,z), \quad (16) \qquad F(z,z) = G_1(G_2(x,y,z),x,y). \quad (17)$$

Нехай $(Q;+)$ — абелева група, α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2, δ_3 — автоморфізми цієї групи; 0 — її нейтральний елемент, бінарні функції f_1, f_2 та тернарні функції g_1,g_2 лінійні над групою $(Q;+)$:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = \alpha_1 x + a + \beta_1 y, & f_2(x,y) = \alpha_2 x + b + \beta_2 y, \\ g_1(x,y,z) = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, & g_2(x,y,z) = \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + d. \end{array} \quad (18)$$

Теорема 3. *Трійка функцій* (f_1, f_2, g_1)*, які лінійні над групою* $(Q;+)$ *та визначені рівностями (18), є розв'язком функційного рівняння:*

(3) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = -\beta_2$*;*
(4) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\gamma_1 = \alpha_1\beta_2$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\alpha_1\alpha_2 = -\beta_1$*;*
(5) *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1 b = c - a$, $\beta_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \alpha_1\beta_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \gamma_1$.

Теорема 4. *Трійка функцій* (f_1, g_1, g_2)*, які лінійні над групою* $(Q;+)$ *та визначені рівностями (18), є розв'язком функційного рівняння:*

(6) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_1\delta_3 = -\gamma_2 - \gamma_3$, $\delta_1 = -\delta_2$, $\alpha_1 = -\beta_1$*;*
(7) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_2 = -\gamma_3 - \gamma_1\delta_3$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_2$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$*;*
(8) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2 - \gamma_1\delta_3$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_1$, $\alpha_1 = \gamma_2$*;*
(9) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_2 + \gamma_3$, $\delta_2 = -\delta_3$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$*;*
(10) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_3 + \gamma_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_2, \alpha_1 = \gamma_1\delta_1$*;*
(11) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_3 + \gamma_3$, $\delta_1 = -\delta_2$, $\alpha_1 = \gamma_2$*;*
(12) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\delta_1 = -\delta_2 - \delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_3$, $\alpha_1 = -\beta_1$*;*
(13) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\delta_1 = -\delta_2 - \delta_3$, $\beta_1 = \gamma_3$, $\alpha_1 = \gamma_2$*;*
(14) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2 - \gamma_1\delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$, $\alpha_1 = -\beta_1$*;*
(15) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\beta_1 = \gamma_1\delta_2 + \gamma_1\delta_3$, $\gamma_3 = -\gamma_2$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_1$*;*
(16) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\alpha_1 = \gamma_3 - \beta_1$, $\delta_2 = -\delta_3$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$*;*
(17) *тоді і тільки тоді, коли* $a = \gamma_1 d + c$, $\alpha_1 = \gamma_1\delta_3 - \beta_1$, $\gamma_3 = -\gamma_1\delta_2$, $\gamma_2 = -\gamma_1\delta_1$.

Література

[1] В. Д. Белоусов. *Основы теории квазигрупп и луп.* М.: Наука, 1967.

[2] Г.В. Крайнічук. *Classification of quasigroup functional equations of the type (3;3;0)*, Вісник ДонНу, А: природничі науки, 2016.

[3] Ф. М. Сохацький. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах. УМН*, 56(9) : 1259–1266, 2004.

[4] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications.* Academic press, New York, London, 1966.

[5] Lijun Ji, R. Wei. *The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugate invariant subgroups*, volume 18 of *Journal of Combinatorial Designs.* 292 – 304, 2010.

[6] F.M.Sokhatsky.*Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, Visnyk DonNU, À: natural Sciences, 2016.

Симетричні F-зв'язності локально конформно-келерових многовидів

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

О. Є. Чепурна
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: chepurna67@gmail.com

Означення 1. Ермітовий многовид M_n, має назву *локально конформно-келерового многовиду* (коротше, ЛКК-многовиду), якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система

$$\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$$

гладких функцій таких, що $\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури*. Функція σ має назву *визначальною функцією* конформного перетворення[2].

На ЛКК-многовиді глобально визначено форма Лі(Lee):

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Для ЛКК-многовиду симетричною F-зв'язністю є, очевидно, зв'язність Вейля, компоненти якої можна обчислити за формулою:

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\big(\delta^k_i\omega_j + \delta^k_j\omega_i - \omega^k g_{ij}\big).$$

Тут символом Γ^k_{ij} позначено компоненти зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою g_{ij}. Але, зв'язність Вейля $\hat{\Gamma}$ не є єдиною F-зв'язністю ЛКК-многовиду. Наприклад, симетричну F-зв'язність, можна побудувати таким чином[1]:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P^k_{ij},$$

де P^k_{ij} – тензор афіної деформації:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}(\nabla_j J^u_i + \nabla_i J^u_j)J^k_u + \frac{1}{4}(\nabla_j J^k_u - \nabla_u J^k_j)J^u_i. \tag{1}$$

Символом ∇ позначено коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою. Враховуючи, що на ЛКК-многовиді

$$\nabla_j J^k_i = \frac{1}{2}\big(\delta^k_j J^t_i\omega_t - \omega^h J_{ij} - J^k_j\omega_i + J^k_t\omega^t g_{ij}\big),$$

з (1) отримуємо:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}\big(\delta^k_j\omega_i + \delta^k_j\omega_j + J^k_j J^t_i\omega_t + J^k_i J^t_j\omega_t - 2\omega^k g_{ij}\big). \tag{2}$$

Тензори Рімана зв'язності Леві-Чівіта Γ^k_{ij} та отриманої F-зв'язності $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ пов'язані наступним чином:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \nabla_j P^k_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} + P^t_{ik}P^h_{tj} - P^t_{ij}P^h_{tk},$$

де P^h_{ij} визначено формулою (2). Метрику $\overline{g}_{ij}$, з якою э узгоджена отримана F-зв'язність, можна отримати, розв'язавши систему диференціальних рівнянь:

$$\nabla_k\overline{g}_{ij} = -\frac{1}{4}\big(2\omega_k\overline{g}_{ij} + \omega_j\overline{g}_{ik} + \omega_i\overline{g}_{kj} + J^t_j\omega_t J^t_k\overline{g}_{ti} + J^t_i\omega_t J^t_k\overline{g}_{tj} - 2\omega^t g_{kj}\overline{g}_{ti} - 2\omega^t g_{ki}\overline{g}_{tj}\big). \tag{3}$$

При виконанні умов додатної визначеності $\overline{g}_{ij}$, та ермітовості

$$\overline{g}_{ts}J_i^t J_j^s = \overline{g}_{ij},$$

розв'язок лінійної системи (3) є локально келеровою метрикою. Умови інтегровності системи (3) мають вигляд:

$$\overline{g}_{ti}\overline{R}_{jkl}^{t} + \overline{g}_{tj}\overline{R}_{ikl}^{t} = 0.$$

Література

[1] Yano K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* New York: Pergamon Press Book – New York: 326p. 1965.

[2] *В. Ф. Кириченко.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия *Матем. сб.*, Т. 51(5), 57–-66 1992.

Конформні перетворення ріманових многовидів та збереження тензору Рімана

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський національний університет садівництва, вул.Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаська обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Означення 1. Ріманові многовиди (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$ знаходяться у конформній відповідності, якщо їх метрики пов'язані співвідношенням [1]:

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x),$$

де $\varphi(x)$ — деякий інваріант.

У роботі [3] доведено теорему.

Теорема 2. *Якщо (M^n, g) та $(\overline{M}^n, \overline{g})$, $(n > 3)$ знаходяться у конформній відповідності, так, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ зберігається при відображенні, причому, $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то функція φ, що породжує відображення, має задовольняти системі диференціальних рівнянь:*

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

умови інтегровності якої, мають вигляд:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0.$$

При цьому, тензор Рімана R^h_{ijk}, тензор Річчі R_{ij}, добуток Rg_{ij} також є інваріантними.

Звідси легко випливає, що інваріантність тензору Рімана є необхідною та достатньою умовою інваріантності тензору $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$.

Нами отримано наслідок для локально конформно-келерових многовидів.

Наслідок 3. *Якщо ЛКК-многовиди (M^n, J, g) и $(\overline{M}^n, J, \overline{g})$ знаходяться у конформній відповідності так, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ зберігається при відображенні, причому, $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то тензори:*

$$\begin{aligned}
\overset{*}{P}_{ij} &\overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};\\
\overset{*}{Q}{}^h_{ijk} &\overset{\text{def}}{=} \delta^h_j\Big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\Big) - \\
&\quad - \delta^h_k\Big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\Big) + \\
&\quad + \Big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\Big) g_{ik} - \Big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\Big) g_{ij};
\end{aligned}$$

будуть інваріантними.

Тут, літерою ω позначено форму Лі (Lee) ЛКК-многовиду:

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Також, нами доведені теореми.

Теорема 4. *Простори* (M^n, g) $(n > 2)$ *що є рекурентними(зокрема, симетричними), з тензором кривини тотожно не рівним нулю, а також, простори Ейнштейна, що не є Річчі-плоскими, не дозволять таких конформних відображень що лишають узагальнений тензор Ейнштейна* $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ *інваріантним.*

Також, стосовно компактних многовидів є справедливою така теорема.

Теорема 5. *Компактні многовиди* (M^n, g) $(n > 2)$ *не дозволяють таких конформних відображень що лишають узагальнений тензор Ейнштейна* $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ *інваріантним.*

Зазначимо, стосовно ріманових многовидів, деякі подібні результати були отримані у [2].

Література

[1] Л. П. Эйзенхарт. *Риманова геометрия* М.: ИЛ, 1948.

[2] В. А. Киосак. *Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса.* Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского, 26: 98—104 2011.

[3] Є. В. Черевко Сохранение тензора энергии-импульса при конформных отображениях. *Proc. of the Intern. Geom. Center*, 5(1-2): 51-58 2012.

О классах Соболева с критическим показателем

Е.С. Афанасьева
(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск)
E-mail: afanasieva@nas.gov.ua

В.И. Рязанов
(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск)
E-mail: vl.ryazanov1@gmail.com

Р.Р. Салимов
(Институт математики НАН Украины, Киев)
E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что *внутренней дилатацией* отображения $f : D \to D'$, имеющей все первые частные производные в точке x, называется величина

$$K_I(x,f) = \begin{cases} \frac{|J_f(x)|}{l(f'(x))^n} & J_f(x) \neq 0, \\ 1 & f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в остальных точках}, \end{cases} \tag{1}$$

где $J_f(x)$ — якобиан отображения f, $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x)h|$.

Функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{D}$ если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{m(D(x_0,\varepsilon))} \int_{D(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x)\ <\ \infty,$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon\ = \frac{1}{m(D(x_0,\varepsilon))} \int_{D(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)\ =\ \frac{1}{|D(x_0,\varepsilon)|} \int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по $D(x_0,\varepsilon) = D \bigcap B(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}$ с $K_I \in L^1_{\rm loc}(D)$. Если $K_I(x,f)$ имеет конечное среднее колебание в каждой граничной точке области D, то f имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Определение слабо плоской границы см. в [1] стр. 74.

Литература

[1] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Moduli in Modern Mapping Theory* New York: Springer, 2009. – 367 p.

Устойчивость неподвижных точек квазилинейных каскадов в пространстве $convR^n$

И.В. Атамась
(Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького)
E-mail: atamas_v@ukr.net

В.И. Слынько
(Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ)
E-mail: vitstab@ukr.net

Динамические системы (потоки и каскады) в метрическом пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ естественным образом возникают в теории управления, теории дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями, теории устойчивости систем с неточными значениями параметров. В работе [1] рассматривались вопросы устойчивости разностных уравнений с разностным оператором Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$. В частности, там установлены общие теоремы метода сравнения и прямого метода Ляпунова применительно к этому классу уравнений. В работах [2, 3] исследован вопрос об устойчивости по двум мерам дискретных динамических систем в пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$.

В пространстве $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ рассмотрим дискретную динамическую систему

$$\overline{X} = \mathbf{A}X + \psi(V[X])B, \tag{1}$$

где $X \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $B \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$. Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^q = \beta\mathbf{I}$ при некоторых натуральном q и положительном β. Пусть существует изолированная неподвижная точка $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ ДДС (1), которая определяется из уравнения

$$X^* = \mathbf{A}X^* + \psi(V[X^*])B.$$

Определение 2.1. Неподвижная точка $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ дискретной динамической системы (1) называется:

(1) устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $d_H(X_0, X^*) < \delta$ следует, что $\sup\limits_{p \in \mathbb{Z}_+} d_H(X_p, X^*) < \varepsilon$;

(2) асимптотически устойчивой по Ляпунову, если она устойчива и существует положительное число ρ такое, что при всех $X_0 \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$, $d_H(X_0, X^*) < \rho$ выполняется равенство $d_H(X_p, X^*) \to 0$ при $p \to \infty$.

Пусть

$$\delta\overline{X} = h_{\overline{X}} - h_{X^*} \in C(S^{n-1}), \quad \delta X = h_X - h_{X^*} \in C(S^{n-1}).$$

Используя результаты работы А.Д. Александрова [4] доказано, что уравнение в вариациях в окрестности неподвижной точки $X^* \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ является разностным уравнением в банаховом пространстве $C(S^{n-1})$ и имеет вид

$$\delta\overline{X} = \mathcal{Z}\delta X + o(\|\delta X\|_{C(S^{n-1})}), \quad \|\delta X\|_{C(S^{n-1})} \to 0. \tag{2}$$

Здесь действие оператора $\mathcal{Z}$ на функции $f \in C(S^{n-1})$ определяется следующим образом

$$(\mathcal{Z}f)(x) = \mathfrak{A}f(x) + \psi'_V(V[X^*])h_B(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)F[X^*; d\omega(p)], \quad x \in S^{n-1},$$

а $\mathfrak{A}$ — расширение оператора $\mathbf{A}$ на пространство $C(S^{n-1})$ определяется так

$$(\mathfrak{A}f)(p) = \|\mathbf{A}^*p\| f\Big(\frac{\mathbf{A}^*p}{\|\mathbf{A}^*p\|}\Big), \quad f \in C(S^{n-1}), \quad p \in S^{n-1}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}^*$ — линейный оператор, сопряженный к $\mathbf{A}$.

Для формулировки теоремы об условиях асимптотической устойчивости неподвижной точки X^* ДДС (1), определим функции

$$\mathrm{A}_{mk} \in C(S^{n-1}), \quad \mathrm{B}_{mk} \in (C(S^{n-1}))^*, \quad k = \overline{1, q}, \quad 1 \le m \le k$$

из рекуррентных соотношений

$$\mathrm{A}_{m,k+1} = \mathrm{A}_{mk}, m = \overline{1,k}, \quad \mathrm{A}_{k+1,k+1} = \psi'_V(V[X^*])\mathfrak{A}^k h_B \tag{4}$$

$$\mathrm{B}_{m,k+1}[d\omega] = \mathfrak{A}^*\mathrm{B}_{mk}[d\omega] + F[X^*;d\omega]\psi'_V(V[X^*]) \int\limits_{S^{n-1}} h_B(\xi)\mathrm{B}_{mk}[d\omega(\xi)], m = \overline{1,k},$$
$$\mathrm{B}_{k+1,k+1}[d\omega] = F[X^*;d\omega], \tag{5}$$

где $\mathfrak{A}^* \in L((C(S^{n-1}))^*)$ — сопряженный оператор к оператору $\mathfrak{A}$, с начальными условиями

$$\mathrm{A}_{11} = h_B, \quad \mathrm{B}_{11}[d\omega] = F[X^*;d\omega]. \tag{6}$$

Введем матрицу

$$d_{lm} = \int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{A}_{mq}(x)\mathrm{B}_{lq}[d\omega(x)], \quad D = [d_{lm}]_{l,m=1}^q, \tag{7}$$

и ее характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = \det[d_{lm} - \lambda\delta_{lm}]_{l,m=1}^q.$$

Теорема 3.1. Предположим, что все корни алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda - \beta) = 0$$

лежат внутри открытого единичного круга $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ и $\beta < 1$.

Тогда неподвижная точка $X = X^*$ ДДС (1) асимптотически устойчива по Ляпунову.

Литература

[1] *Gnana Bhaskar, T. and Shaw, M.* Stability results for Set Difference Equations // Dynamical Systems and Applications. – **13**, 2004. – 479-485.

[2] Slyn'ko V.I. The stability of fixed points of discrete dynamical systems in the space conv$\mathbb{R}^n$ // Functional Analysis and Its Applications, – April 2016, Volume 50, Issue 2, pp 163-165.

[3] Slyn'ko V.I. Stability in terms of two measures for set difference equations in space conv$\mathbb{R}^n$ // Applicable Analysis. 2017. – **96**, №2, p. 278-292.

[4] Александров А.Д. *К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел* // Матем. сб., **2(44)**, (1937), №5, 947-972.

Topological graph inverse semigroups

Serhii Bardyla
(Faculty of Mathematics, National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine)
E-mail: sbardyla@yahoo.com

We investigate a topologization of graph inverse semigroups and polycyclic monoids. In particular, we characterise graph inverse semigroups which admit only discrete locally compact semigroup topology. This characterization provide a complete answer on the question of Z. Mesyan, J. D. Mitchell, M. Morayne and Y. H. Péresse posed in [2].

We shall say that a graph inverse semigroup $G(E)$ satisfies the condition $(\star)$ if for each countable subset $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Path}(E)$ there exists an infinite subset $B = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ and an element $\mu \in G(E)$ such that $\mu \cdot x_{n_k} \in \mathrm{Path}(E)$ and $|\mu \cdot x_{n_k}| > |x_{n_k}|$, for each $k \in \mathbb{N}$. Each graph inverse semigroup $G(E)$ over a finite graph E satisfies the condition $(\star)$ (see [2, Lemma 9]).

Theorem 1. *Discrete topology is the only locally compact semigroup topology on the graph inverse semigroup $G(E)$ if and only if $G(E)$ satisfies the condition $(\star)$.*

Rerefences

[1] Serhii Bardyla. On a locally compact topological graph inverse semigroups. preprint (http://arxiv.org/abs/1706.08594), 2017.

[2] Mesyan-Mitchell-Morayne-Peresse-2013. Topological graph inverse semigroups. *Topology and its Applications*, 208, 106–126, 2016.

Around compact (semi)topological semigroups

Oleg Gutik
(National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine)
E-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, ovgutik@yahoo.com

In my lectures I plan to make a survey on compact (and compact-like) topological and semitopological semigroups. This course based on classical books on the theory of topological semigroups [1, 2, 4], the surveys [3, 5] and new results on this direction.

My lectures will be devoted to the following topics:

- topologization of semigroups;
- the structure of the kernel of a compact topological semigroup;
- embedding of semigroups into compact topological semigroups;
- simple and 0-simple compact and compact-like topological semigroups;
- the structure of some classes of a compact and compact-like topological semigroup;
- the continuity of inversion in compact-like topological semigroups.

Also we shall present some new results on the topics of the lectures.

Rerefences

[1] J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The Theory of Topological Semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.

[2] K. H. Hofmann, and P. S. Mostert, *Elements of Compact Semigroups*, Charles E. Merril Books, Inc., Columbus, Ohio, 1966.

[3] P. S. Mostert, *The structure of topological semigroups – revisited*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 601–618.

[4] A. B. Paalman-de Miranda, *Topological Semigroups*, Mathematical Centre Tracts, 11 Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

[5] A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95–-112.

Topological invariants of quadratic mappings

Giorgi Khimshiashvili
(3/5, K.Cholokashvili Avenue, Tbilisi, Georgia)
E-mail: giorgi.khimshiashvili@iliauni.edu.ge

Various topological problems concerned with quadratic mappings between real vector spaces play important role in non-linear analysis, optimization theory and theory of integrable systems, to name only a few topics (see, e.g., [1], [2]). In this talk, we present a number of recent results in the spirit of approach suggested in [1], which have been obtained using our results on topological invariants of real polynomial mappings [3], [4]. The leading idea is to elaborate upon certain known results in the natural and practically important context of stable quadratic mappings. For our purposes, it is convenient to use the notion of stability in the sense of singularity theory, i.e., with respect to the right-left (RL) equivalence in C^∞-category. Along these lines, we discuss topological invariants of two classes of quadratic mappings: stable quadratic endomorphisms and proper homogeneous quadratic mappings with fibres of positive dimension. In the latter case we assume that restrictions of such mappings onto the unit sphere S^{n-1} in the source space $\mathbb{R}^n$ are stable in the above sense.

The first main result is concerned with stable quadratic endomorphisms. Recall that in this case the mapping degree $\mathrm{Deg}F$ is defined and its absolute value is a topological invariant [4].

Theorem 1. *The topological degree of stable quadratic endomorphism F of $\mathbb{R}^n$ is equal to the topological degree of its homogeneous part. Moreover,* $\mathrm{Deg}F$ *vanishes for odd n and does not exceed $\frac{(3k-1)!}{k!(2k-1)!}$ for even dimension $n = 2k$.*

Let now $F = (f_1, \dots f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a homogeneous quadratic mapping which is non-degenerate, i.e., has an isolated zero at the origin. In this case, certain topological information can be obtained by considering the origin O_n as an isolated singular point of mapping F. It is well known and easy to verify that components of such a mapping form a system of parameters in the local ring of the origin. In other words, in this case the origin is an isolated singular point of complete intersection. Thus its Milnor number at the origin is defined and one can calculate it using results of [5], which gives our second main result.

Theorem 2. *The Milnor number of non-degenerate homogeneous quadratic mapping*

$$F = (f_1, \dots f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad n > m$$

is equal to $\sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p \, 2^p \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

This result has some immediate topological corollaries.

Corollary 3. *Mapping F is not stable with respect to RL-equivalence.*

Indeed, the value of Milnor number given above is always bigger than $2n$ which according to well known results of J.Mather is the maximal possible value of Milnor number of RL-stable singularity for these dimensions. Having in mind applications to the numerical range mapping of square matrix discussed in the sequel, we present a special case of this result concerned with mappings into the plane.

Corollary 4. *The Milnor number of homogeneous quadratic mapping of $\mathbb{R}^n$ into the plane is equal to $2n - 1$.*

Since a homogeneous quadratic mapping is not stable it is natural to wonder if its restriction to the unit sphere in the source space can be stable in some cases. Simple examples show that this is not always so but it turns out that generically this is the case.

Proposition 5. *For a generic proper homogeneous quadratic mapping, its restriction F_s to the unit sphere is RL-stable.*

In this case, using results of [1], [4] one can obtain an estimate for the Euler characteristics of the projectivized fibres of F defined as the fibres of F_s.

Theorem 6. *The absolute value of the Euler characteristic of projectivized fibres of stable quadratic mapping F does not exceed $\frac{(4n+3)!}{(3n+3)!n!}$.*

As a concrete application of our approach we present some results about numerical range mappings of complex matrices. Let A be a complex $n \times n$ matrix and $W_A : S^{2n-1} \to \mathbb{C}$ be its numerical range mapping. This mapping is a classical object of study in linear algebra. In particular, the famous Hausdorff-Toeplitz theorem states that its image is convex. It is also known that its discriminant consists of $n-1$ closed curves inside the convex domain $\operatorname{im} W$. However not much seems to be known about the topology of its fibres. We clarify the latter issue for $n = 2$ and $n = 3$. Namely, the results presented above combined with results from [2] yield the following conclusion.

Proposition 7. *For $n = 2$, any regular fibre of W_A is diffeomorphic to the circle and any regular fibre of V consists of a single point. Any singular reduced fibre of W_A is homeomorphic to wedge of two circles.*

For $n = 3$, we can describe topology of all regular fibres.

Proposition 8. *For $n = 3$, the regular fibres of W_A are diffeomorphic to the three-torus or the unit tangent bundle of 2-sphere.*

Rerefences

[1] Andrei Agrachev. Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps. *J. Sov. Math.*, 49(3) : 990-1013, 1990.

[2] Andrei Agrachev. Quadratic cohomology. *Arnold Math. J.*, 1(1) : 37–58, 2015.

[3] Giorgi Khimshiashvili. On the local degree of smooth mapping. *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe*, 85(2) : 309–312, 1977.

[4] Giorgi Khimshiashvili. Algebraic formulae for topological invariants. *Proc. A.Razmadze Math. Inst.*, 125, 1–121, 2001.

[5] Le Dung Trang. Calculation of the Milnor number of isolated singularity of complete intersection *Func. Anal. Appl.*, 8(1) : 127–131, 1974.

Problem with integral conditions for system of evolution equations

Grzegorz Kuduk
(Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow, Poland, Graduate of University of Rzeszow, Poland)
E-mail: gkuduk@onet.eu

Let H be a linear space, and A be linear operator acting in it $A : H \to H$. Denote be $x(\lambda)$ to be an eigenvector of the operator A, which corresponds to an eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C}$.

We consider problem for system of equations

$$\frac{dU_i}{dt} + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(A)U_j(t) = 0, \tag{1}$$

satisfies integral conditions

$$\int_0^T U_i(t)dt = \varphi_i, \tag{2}$$

where $a_{ij}(A)$ are abstract operators, white entire symbols $a_{ij}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $T > 0$, $U : (0, T) \to H$,

Let be $\eta(\lambda) = \int_0^T W'(t, \lambda)dt$ is a certain function, $W(t, \lambda)$ is a solution of the equation

$$L\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) W(t, \lambda) = 0$$

satisfies conditions

$$W'(t, \lambda)\Big|_{t=0} = 1, \qquad W(t, \lambda)\Big|_{t=0} = 0.$$

Denote by

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\}. \tag{3}$$

Definition 1. We shall say that vector φ from H belongs $L \subseteq H$, if on $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ there exist depending on φ linear operator $R_\varphi(\lambda) : H \to H$, $\lambda \in \Lambda$, and measure $\mu_\varphi(\lambda)$ such that

$$\varphi = \int_\Lambda R_\varphi(\lambda)x(\lambda)d\mu_\varphi(\lambda)$$

Theorem 2. *Let in the conditions (2) the vectors φ_i, belong to L i.e.φ_i, can be represented in the form $\varphi_i = \int_\Lambda R_{\varphi_i}(\lambda)x(\lambda)d\mu_{\varphi_i}(\lambda)$, $i = \{1, 2\}$ where $\lambda \in \Lambda \setminus P$, where P is set (3). Then the formula*

$$U_i(t) = \int_\Lambda R_{\varphi_i}(\lambda)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}\Big(W'(t, \lambda) - a_{3-i,3-i}(\lambda)W(t, \lambda)\Big)x(\lambda)\right\}d\mu_{\varphi_i}(\lambda)+$$

$$+\int_\Lambda R_{\varphi_i}(\lambda)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}\Big(a_{i,3-i}(\lambda)W(t, \lambda)x(\lambda)\right\}d\mu_{\varphi_{3-i}}$$

defines formal solution of the problem (1), (2).

By means of the differential symbol method [2] we construct a solution of the problem (1), (2). This problem is a continuos works [1]

Rerefences

[1] P.I. Kalenyuk, G. Kuduk, I.V. Kohut and Z.M. Nytrebych. *Problem with integral conditiond for differential-operator equation*, J. Math. Sci., 208 (3) (2015), 267–276.

[2] P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych. *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method.* Publishing House of Lviv Polytechnic Natyonaly University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

Invariant idempotent measures

Natalia Mazurenko
(Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Shevchenka str. 57, Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine)
E-mail: mnatali@ukr.net

Mykhailo Zarichnyi
(Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszow, 35-001, Rzeszow, Poland)
E-mail: zarichnyi@yahoo.com

The notion of invariant (self-similar) measure for an iterated function system (IFS) of contractions on a complete metric space is introduced in [1]. The existence of invariant measures is proved by using the Banach contraction principle for suitable metrization of the set of probability measures on a metric space. The invariant measures impose an additional structure on the invariant set for the given IFS.

The aim of the talk is to introduce the invariant idempotent measures for given IFS. Recall that an idempotent measure on a compact Hausdorff space X is a functional $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ that preserves constants, the maximum operation (usually denoted by $\oplus$) and is weakly additive (i.e., preserves sums in which at least one summand is a constant function; we use $\odot$ for these sums) [3]. Given an arbitrary metric space X, we denote by $I(X)$ the set of idempotent measures of compact supports on X. In the case of idempotent measure, we use the weak* convergence for proving the existence of invariant element. This approach seems to be fairly general and we anticipate new results in this direction. Note also that the invariant idempotent measures on ultrametric spaces are introduced and investigated in [2].

Let X be a complete metric space and let $f_1, f_2, \dots, f_n$ be an IFS on X. We assume that all f_i are contractions. Let also $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ be such that $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

By $\exp X$ we denote the hyperspace of the space X endowed with the Hausdorff metric. Let Ψ_0 denote the identity map of $\exp X$ and, for $i > 0$, define $\Psi_i\colon \exp X \to \exp X$ inductively:

$$\Psi_i(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_{j-1}(\Psi_{i-1}(A)).$$

Let $\Phi_0\colon I(X) \to I(X)$ be the identity map. For $i > 0$, define $\Phi_i\colon I(X) \to I(X)$ inductively: $\Phi_i(\mu) = \bigoplus_{j=1}^n \alpha_j \odot I(f_j)(\Phi_{i-1}(\mu))$. Thus, $\Phi_i = \Phi_1\Phi_1 \cdots \Phi_1$ (i times). It is easy to check that the maps Φ_i are well-defined.

In this case, we say that $\mu \in I(X)$ is an *invariant idempotent measure* if $\Phi_i(\mu) = \mu$ for every $i = 0, 1, \dots$ (equivalently, $\Phi_1(\mu) = \mu$).

Theorem 1. *There exists a unique invariant idempotent measure for the IFS $f_1, f_2, \dots, f_n$ and $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ with $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$. This invariant measure is the limit of the sequence $(\Phi_i(\mu))_{i=1}^\infty$, for arbitrary $\mu \in I(X)$.*

Rerefences

[1] J. E. Hutchinson, Fractals and self-similaruty. *Indiana University Mathematics Journal*, 30 : 713–747, 1981.
[2] N. Mazurenko, M. Zarichnyi, Idempotent ultrametric fractals. *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. ath.*, Issue 79 : 111–118, 2014.
[3] M. Zarichnyi, Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics*, 74:3 : 481–499, 2010.

The distributions of random incomplete sums of a series with essential overlaps of cylindrical intervals

V.P.Markitan
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine)
E-mail: v.p.markitan@npu.edu.ua

I.O.Savchenko
(National Pedagogical Dragomanov University)
E-mail: igorsav4enko@ukr.net

Properties of infinite Bernoulli convolutions are being studied for almost a century. The interest to them due to various reasons has increased considerably in recent years [3]. In the theory of infinite Bernoulli convolutions, there are many complicated problems of probabilistic nature. One of these problems is to extend a theorem due to Jessen and Wintner telling that the distribution of the sum of a random series with independent discrete terms is pure, that is it is either purely discrete, or continuous, or singular. The Jessen–Wintner theorem does not tell us when each of these three cases occur. Another problem is related to the topological, metric, and fractal properties of the spectrum of the distribution, that is to the set of growth of a distribution function.The third one deals with the behavior at infinity of the absolute value of a characteristic function. None of these problems has a solution in the general case but partial solutions are known for several particular cases. One of these particular cases is considered in the current paper, namely we study the random variable

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n, \tag{1}$$

where

$$1) \quad r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{2^{n-1}} + \widetilde{r}_n - \tag{2}$$

is a convergent series with positive terms satisfying the following conditions:

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} = n+1 = \frac{d_m}{r_m}, \quad m = 2^k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\ , \tag{3}$$

$$\widetilde{r}_m = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} d_k = \underbrace{c_{n+1} + \ldots + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + \ldots + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + \ldots =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + \ldots\ ,$$

$$c_n = d_{2^{n-1}} = d_{2^{n-1}+1} = d_{2^{n-1}+2} = \ldots = d_{2^n-1}.$$

2) (ξ_n) — is a sequence of independent random variables with the distributions:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geq 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geq 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

The properties of the distribution of the random variable ξ are uniquely determined by the sequence of terms (d_n) and by the stochastic matrix $\|p_{in}\|$.

Lemma 1. *The terms and the remainder of a series* (2) *satisfy the following conditions:*

$$c_n = (n+1) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}, \quad \widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}.$$

Definition 2. If M is a subset of the set of positive integer numbers $\mathbb{N}$, then $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}} d_n$ is called *a sub-series of series* (2) and its sum $x = x(M)$ is called *an incomplete sum of series* (2). The set of all incomplete sums of series (2) is denoted by $E\{d_n\}$.

Definition 3. [6] *The spectrum* S_ξ of the distribution of the random variable ξ is called the set of points of growth of the distribution function $F_\xi(x)$ (alternatively, S_ξ is called the minimal closed support), that is

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) = P\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0, \forall \varepsilon > 0\}.$$

Lemma 4. *If* $p_{in} > 0$ *for all* $i \in \{0,1\}$ *and all* $n \in \mathbb{N}$*, then the spectrum* S_ξ *of the distribution of the random variable* ξ *coincides with the set* $E\{d_n\}$ *of all incomplete sums of series* (2)*, that is*

$$S_\xi = E\{d_n\} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Definition 5. A Lebesgue null-set of the space $\mathbb{R}^1$ whose Hausdorff–Besicovitch dimension equals 1 is called *superfractal*, while a continuum whose Hausdorff–Besicovitch dimension equals zero is called *anomalous fractal.*

Theorem 6. *The set of all incomplete sums of series* (2) *satisfying homogeneity condition* (3) *is a superfractal.*

Corollary 7. *The spectrum* S_ξ *of the distribution of the random variable* ξ *is a superfractal set.*

Theorem 8. *In the continuous case, that is if* ($L = 0$) *the distribution of the random variable* ξ *is a singular Cantor type distribution with a superfractal spectrum.*

Definition 9. A characteristic function $f_\xi(t)$ of the random variable ξ is called a mathematical expectation of the complex-valued random variable $e^{it\xi}$, that is $f_\xi(t) = \mathbf{M}e^{it\xi}$.

The apparatus of characteristic functions is convenient for studying the structure and properties of distributions of really significant random variables. In particular, it is known [5] that the value $L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$ is equal

1) 1, if ξ has a discrete distribution;
2) 0, if ξ has an absolutely continuous distribution.

For singular distributions L_ξ can take all values from $[0,1]$. Singular distributions with $L_\xi = 1$ are close to discrete ones, while singular distributions with $L_\xi = 0$ are close to absolutely continuous ones.

Theorem 10. *The following equality holds* $L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 1.$

Rerefences

[1] B. Jessen and A. Wintner, *Distribution function and the Riemann Zeta-function*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), №1, 48–88.

[2] P. Lévy, *Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes*, Studia Math. **3** (1931), 119–155.

[3] Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, *Sixty year of Bernoulli convolutions*, Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probobility. **46** (2000), 39–65.

[4] О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування*, "Наукова Думка", Київ, 2013.

[5] Лукач Е. *Характеристические функции.* — М.: Наука, 1979. — 424 с.

[6] М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, 1998.

Weak and strong nilpotentizability of vector distributions

Piotr Mormul
(Institute of Mathematics, University of Warsaw, 2 Banach str., 02-097 Warsaw, Poland)
E-mail: mormul@mimuw.edu.pl

1. Cartan prolongation of vector distributions, classical and generalized.

Examples. Local polynomial normal forms.

Goursat flags as the outcomes of series of classical Cartan prolongations.

Special multi-flags as the outcomes of series of generalized Cartan prolongations.

Rich trees of singularities emerging in these constructions: from the length three (so-called *modèle exceptionnel* of Kumpera & Ruiz of 1978) onwards in the case of Goursat flags, and from the length two in the case of special multi-flags.

2. Nilpotent Approximation procedure. Examples.

Definition of strong nilpotentizability. Examples of not strongly nilpotent points in the Goursat Monster Tower (GMT) from the length four onwards.

Definition of weak nilpotentizability (= the classical nilpotentizability in geometric control theory).

Strong implies weak. Are both equivalent?!

3. Theorem (2000) that the entirety of the GMT is weakly nilpotent.

Formulas for the nilpotency orders (or: steps) of the emerging nilpotent Lie algebras.

Open question concerning strong nilpotentizability in the GMT.

Theorem (2004) on the weak nilpotentizability of the special multi-flags.

The nilpotency orders of the respective emerging nilpotent Lie algebras.

Open questions in the Special Multi-Flags Monsters.

Rerefences

[1] André Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. *The Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics **144**, Birkhäuser 1996, 1 – 78.

[2] Antonio Kumpera & Jacques Rubin. Multi-flag systems and ordinary differential equations. *Nagoya Mathematical Journal* **166** (2002), 1 – 27.

[3] Richard Montgomery & Michail Zhitomirskii. Points and Curves in the Monster Tower. *Memoirs of the American Mathematical Society* **956** (2010).

[4] Piotr Mormul. Goursat distributions not strongly nilpotent in dimensions not exceeding seven. Volume **281** (2003) of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 249 – 261.

[5] Piotr Mormul. Multi-dimensional Cartan prolongation and special k-flags. Volume **65** (2004) of *Banach Center Publications*, 157 – 178.

[6] Piotr Mormul. Singularity classes of special 2-flags. *SIGMA* **5** (2009), 102, 22 pages (electronic).

A categorical approach to physics beyond the Standard Model

Obikhod T.V.
(Institute for Nuclear Research, National Academy of Science of Ukraine 47, prosp. Nauki, Kiev, 03028, Ukraine)
E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

A modern version of the unified theory of fundamental interactions is the theory of superstrings and D-branes, which combines quantum field theory and the general theory of relativity into a unified field theory [1]. The ten-dimensional space on which the theory of superstrings is defined can be represented as a direct product of 4-dimensional and 6-dimensional spaces:

$$M_{10} = M_4 \times K_6 \ ,$$

where the manifold M_4 is a four-dimensional space-time, and K is the space of extra dimensions. To obtain acceptable solutions consistent with the Standard model $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, restrictions on compactification are introduced [2]. Therefore, we usually deal with Calabi-Yau manifolds or orbifolds as spaces of extra dimensions. To describe such a space, we use the notion of a topological space, X as a set, in which a system of open sets is distinguished with the following properties:

1) the union of any number of open sets is open;
2) the intersection of a finite number of open sets is open.

On the topological space we can introduce the structure of a ring, $\mathcal{O}_X$. The sheaf of rings of smooth functions on the topological space X consists of the following data:

1) on each open set $U \subset X$ the ring of smooth functions $\mathcal{O}(U)$ is defined;
2) a set of restriction maps $r_V^U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ satisfying the following conditions is defined: $r_U^U = 1_U,\ r_W^V r_V^U = r_W^U$ for $W \subset V \subset U$;
3) for any open covering $U = \bigcup_i U_i$ there exists an exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}(U) \to \prod_i \mathcal{O}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$$

Locally free sheaf is determined as:

$$E_X : \ 0 \to E_X|_U \to \mathcal{O}_X^{\oplus p}|_U \to 0.$$

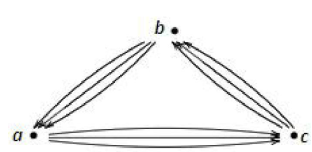
Coherent sheaf is determined as:

$$B_X : \ 0 \to B_X|_U \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_1}|_U \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_2}|_U \to \ldots \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_i}|_U \to 0.$$

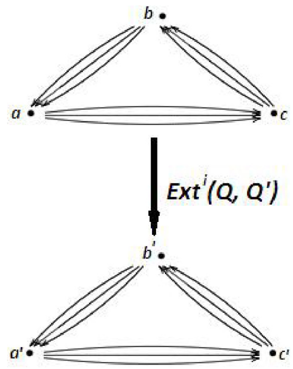
In physics D-branes are associated with coherent sheaves [3]. For physical applications associated with phase transitions from one D-brane to another, the concept of a category is used. In this case we are dealing with a complex of sheaves,

$$B^\bullet : \ldots \overset{d^{i-2}}{\to} B^{i-1} \overset{d^{i-1}}{\to} B^i \overset{d^i}{\to} B^{i+1} \overset{d^{i+1}}{\to} \ldots, d^i d^{i-1} = 0 \ .$$

The categories of coherent sheaves are abelian ie are characterized by the existence of the exact sequences. Using McKay correspondence, we have the equivalence of the abelian category of coherent sheaves and the abelian category of quivers, whose vertices are complex Euclidean spaces, and the edges are mappings of these spaces



Morphisms between quivers or phase transitions between D-branes are described by Ext groups



Substitution of orbifold charges $a = b = c = a^{'} = b^{'} = c^{'} = 4$ in groups

$$Ext^0(Q, Q^{'}) = C^{aa^{'}+bb^{'}+cc^{'}} \ ,$$
$$Ext^1(Q, Q^{'}) = C^{3ab+3bc+3ca} \ .$$

together with the Langlands hypothesis [4], gives the realization of the moduli space of superstring in terms of $SU(5)$ multiplets

$$3 \times (24 + 5_H + \overline{5}_H + 5_M + \overline{5}_M + 10_M + \overline{10}_M) \ .$$

Using this result makes it possible to construct a gauge-invariant superpotential of the MSSM model

$$W_{SU(5)} = \lambda^d_{ij} \cdot \overline{5}_H \times \overline{5}^{(i)}_M \times 10^{(j)}_M + \lambda^u_{ij} \cdot 5_H \times 10^{(i)}_M \times 10^{(j)}_M + \mu \cdot 5_H \times \overline{5}_H$$

The application of this superpotential together with five parameters determined from the experiment makes it possible to calculate the masses, the decay widths, and production cross sections of the superparticles of the supersymmetric theory - the theory of physics beyond the Standard Model connected with experiment at the Large Hadron Collider [5].

Rerefences

[1] Clifford V. Johnson. *D-branes*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics & Cambridge University Press, 2006.

[2] Michio Kaku. *Introduction to Superstrings and M-Theory*. Springer-Verlag New York, 1999.

[3] Paul S. Aspinwall et al. *Dirichlet Branes and Mirror Symmetry*. Clay Mathematics Monographs, V.4. American Mathematical Society, Clay Mathematics Institute, 2009.

[4] W. Schmid. Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 69 : 56–59, 1968.

[5] Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod. Stringy approach to the Minimal Supersymmetric Standard Model. *Prob. of atomic science and techn.*, Series: Nuclear Physics Investigations (55), N3: 10–13, 2011.

Normal high order elements in cyclotomic finite field extensions

Roman Popovych
(Polytechnic National University, Lviv, Ukraine)
E-mail: `rombp07@gmail.com`

Ruslan Skuratovskii
(Kiev, MAUP)
E-mail: `ruslcomp@mail.ru`

Let q be a power of a prime number p, and F_q be a finite field with q elements. For any integer m, a normal basis of F_{q^m} over F_q is a basis of the form $\{\alpha, \alpha^q, ..., \alpha^{q^{m-1}}\}$ for some $\alpha \in F_{q^m}$ [1]. In this case the element $\alpha \in F_{q^m}$ is called normal over F_q [1, 3].

Let $r = 2n + 1$ be a prime number coprime with q. Let q be a primitive root modulo r, that is the multiplicative order of q modulo r equals to $r - 1$. Set $F_q(\theta) = F_{q^{r-1}} = F_q[x]/\Phi_r(x)$, where $\Phi_r(x) = x^{r-1} + ... + x + 1$ is the r-th cyclotomic polynomial and $\theta \equiv x \ (\mathrm{mod}\, \Phi_r(x))$. It is clear that the equality $\theta^r = 1$ holds. We have the following tower of finite fields: $F_q \subset F_{q^n} \subset F_{q^{2n}}$.

Theorem 1. *Let b be such element of the field F_q that $2nb \neq 1(\mathrm{mod} p)$. Then the following statements are true:*
(a) element $\theta + b \in F_{q^{2n}}$ is normal over F_q;
(b) element $\theta + \theta^{-1} + 2b \in F_{q^n}$ is normal over F_q.

Note that for $b = 0$ the order of θ equals only to r. But for $b \neq 0$ the element $\theta + b \in F_{q^{2n}}$ has high order according to [3, Theorem 1 (a), (d)]. Also if $2b = (a^2 + 1)a^{-1}$ and $b \neq 0$, then the element $\theta + \theta^{-1} + 2b = (\theta^{-f} + a)(\theta^f + a)$ has high order according to [3].

Rerefences

[1] Lidl R., Niederreiter H. *Finite Fields.* – Cambridge: Cambridge University Press, 755 p., 1997.
[2] Mullen G. L., Panario D. *Handbook of finite fields.* – Boca Raton: CRC Press, 1068 p., 2013.
[3] Popovych R. *Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/\Phi_r(x)$.* Vol. 18, *Finite Fields Appl.*, P.700-710., 2012.
[4] Skuratovskii R. V. *Finding normal basis of finite field during deterministic polynomial time.* Vol. 25. *Visnuk of Kiev's National University. Mechanics and mathematics.* pp. 49 - 54, 2011.
[5] R. V. Skuratovskii *Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups.* Source: https://arxiv.org/pdf/1702.05784.pdf, 2017.

On the co-adjont orbits in Grassmann algebras and their applications

Anatolij K. Prykarpatski
(The Ivan Franko State pedagogical University of Drohobych, Lviv region, Ukraine,
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland)
E-mail: pryk.anat@cybergal.com

In the classical works [2, 3, 4] still in 1928 the French mathematician M. A. Buhl posed the problem of classifying all infinitesimal symmetries of a given linear vector field equation

$$A\psi = 0, \tag{1}$$

where the function $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, and

$$A := \sum_{j=\overline{1,n}} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2}$$

is a vector field operator on $\mathbb{R}^n$ with coefficients $a_j \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $j = \overline{1,n}$. It is easy to show that the problem under regard is reduced [10] to describing all possible vector fields

$$A^{(k)} := \sum_{j=\overline{1,n}} a_j^{(k)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3}$$

with coefficients $a_j^{(k)} \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}), j,k = \overline{1,n}$, satisfying the Lax type commutator condition

$$[A, A^{(k)}] = 0 \tag{4}$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $k = \overline{1,n}$. The M.A. Buhl problem above was completely solved in 1931 by the Ukrainian mathematician G. Pfeiffer in the works [7, 8, 9, 10, 11, 12], where he has constructed explicitly the searched set of independent vector fields (3)), having made use effectively of the full set of invariants for the vector field (2) and the related solution set structure of the Jacobi-Mayer system of equations, naturally following from (4)). Some results, yet not complete, were also obtained by C. Popovici in [14].

Some years ago the M.A. Buhl type equivalent problem was independently reanalyzed once more by Japanese mathematicians K. Takasaki and T. Takebe [18, 19] and later by L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma and S. V. Manakov for a very special case when the vector field operator (2) depends analytically on a "spectral" parameter $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{A} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=\overline{1,n}} a_j(t,x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} + a_0(t,x;\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}. \tag{5}$$

Based on the before developed Sato theory [16, 17], the authors mentioned above have shown for some special kinds of vector fields (5) that there exists an infinite hierarchy of the symmetry vector fields

$$\tilde{A}^{(k)} := \frac{\partial}{\partial \tau_k} + \sum_{j=\overline{1,n}} a_j^{(k)}(\tau,x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} + a_0^{(k)}(\tau,x;\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}, \tag{6}$$

where $\tau = (t;\tau_1,\tau_2,...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}, k \in \mathbb{Z}_+$, satisfying the Lax-Sato type compatible commutator conditions

$$[\tilde{A}, \tilde{A}^{(k)}] = 0 = [\tilde{A}^{(j)}, \tilde{A}^{(k)}] \tag{7}$$

for all $k,j \in \mathbb{Z}_+$. Moreover, in the cases under regard, the compatibility conditions (7) proved to be equivalent to some very important for applications heavenly type dispersionless equations in partial derivatives.

In the present work we investigate the Lax–Sato compatible systems, the related Lie-algebraic structures and complete integrability properties of an interesting class of nonlinear dynamical systems called the heavenly type equations, which were introduced by Plebański [13] and analyzed in a series of articles

[18, 19]. In our work, having employed the AKS-algebraic and related $\mathcal{R}$-structure schemes [1, 20], applied to the holomorphic loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ of vector fields on torus $\mathbb{T}^n, n \in \mathbb{Z}_+$, the orbits of the corresponding coadjoint actions on $\tilde{\mathcal{G}}^*$, closely related to the classical Lie-Poisson type structures, were reanalyzed and studied in detail. By constructing two commuting flows on the coadjoint space $\tilde{\mathcal{G}}^*$, generated by a chosen root element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ and some Casimir invariants, we have successively demonstrated that their compatibility condition coincides exactly with the corresponding heavenly equations under consideration.

As a by-product of the construction, devised in the work [15], we prove that all the heavenly equations have a similar origin and can be represented as a Lax compatibility condition for special loop vector fields on the torus $\mathbb{T}^n$. We analyze the structure of the infinite hierarchy of conservations laws, related to the heavenly equations, and demonstrate their analytical structure connected with the Casimir invariants is generated by the Lie–Poisson structure on $\tilde{\mathcal{G}}^*$. Moreover, we have extended the initial Lie-algebraic structure for the case when the the basic Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} = \widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ is replaced by the adjacent holomorphic Lie algebra $\bar{\mathcal{G}} := diff_{hol}(\ \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n) \subset diff(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$ of vector fields on $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. Typical examples are presented for all cases of the heavenly equations and it is shown in detail and their integrability is demonstrated using the scheme devised here. This scheme makes it possible to construct a very natural derivation of well known Lax-Sato representation for an infinite hierarchy of heavenly equations, related to the canonical Lie-Poisson structure on the adjoint space $\bar{\mathcal{G}}^*$. We also briefly discuss the Lagrangian representation of these equations following from their Hamiltonicity with respect to both intimately related commuting evolutionary flows, and the related bi-Hamiltonian structure as well as the Bäcklund transformations. As a matter of fact, there are only a few examples of multi-dimensional integrable systems for which such a detailed description of their mathematical structure has been given. As was already aptly mentioned, the heavenly equations comprise an important class of such integrable systems. This is due in part to the fact that some of them are obtained by a reduction of the Einstein equations with Euclidean (and neutral) signature for (anti-) self-dual gravity, which includes the theory of gravitational instantons. This and other cases of important applications of multi-dimensional integrable equations strongly motivated us to study this class of equations and the related mathematical structures. As a very interesting aspect of our approach to describing integrability of the heavenly dynamical systems, there is a very interesting Lagrange-d'Alembert type mechanical interpretation. We need to underline here that the main motivating idea behind this work was based both on the paper by Kulish, devoted to studying the super-conformal Korteweg-de-Vries equation as an integrable Hamiltonian flow on the adjoint space to the holomorphic loop Lie superalgebra of super-conformal vector fields on the circle, and on the insightful investigation by Mikhalev, which studied Hamiltonian structures on the adjoint space to the holomorphic loop Lie algebra of smooth vector fields on the circle. We were also impressed by deep technical results [18, 19] of Takasaki and Takebe, who fully realized the vector field scheme of the Lax-Sato theory. Additionally, we were strongly influenced both by the works of Konopelchenko [5, 6], as well as by the work of Ferapontov and Moss, in which they devised new effective differential-geometric and analytical methods for studying an integrable degenerate multi-dimensional dispersionless heavenly type hierarchy of equations, the mathematical importance of which is still far from being properly appreciated.

Rerefences

[1] D. Blackmore, A.K. Prykarpatsky and V.H. Samoylenko, Nonlinear dynamical systems of mathematical physics, World Scientific Publisher, NJ, USA, 2011

[2] M.A. Buhl, Surles operateurs differentieles permutables ou non, Bull. des Sc.Math.,1928, S.2, t. LII, p. 353-361

[3] M.A. Buhl, Apercus modernes sur la theorie des groupes continue et finis, Mem. des Sc. Math., fasc. XXXIII, Paris, 1928

[4] M.A. Buhl, Apercus modernes sur la theorie des groupes continue et finis, Mem. des Sc. Math., fasc. XXXIII, Paris, 1928

[5] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko, On the heavenly equation and its reductions, J. Phys. A, Math. Gen. 39 (2006), 11793-11802

[6] B.G. Konopelchenko, Grassmanians $Gr(N-1, N+1)$, closed differential $N-1$ forms and N-dimensional integrable systems. arXiv:1208.6129v2 [nlin.SI] 5 Mar 2013

[7] G. Pfeiffer, Generalisation de la methode de Jacobi pour l'integration des systems complets des equations lineaires et homogenes, Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1930, t. 190, p. 405-409

[8] M. G. Pfeiffer, Sur la operateurs d'un systeme complet d'equations lineaires et homogenes aux derivees partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1930, t. 190, p. 909–911
[9] M. G. Pfeiffer, La generalization de methode de Jacobi-Mayer, Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1930, t. 191, p. 1107-1109
[10] M. G. Pfeiffer, Sur la permutation des solutions s'une equation lineaire aux derivees partielles du premier ordre, Bull. des Sc. Math., 1928, S.2,t.LII, p. 353-361
[11] M. G. Pfeiffer, Quelgues additions au probleme de M. Buhl, Atti dei Congresso Internationale dei Matematici, Bologna, 1928, t.III, p. 45-46
[12] M. G. Pfeiffer, La construction des operateurs d'une equation lineaire, homogene aux derivees partielles premier ordre, Journal du Cycle Mathematique, Academie des Sciences d'Ukraine, Kyiv, N1, 1931, p. 37-72 (in Ukrainian)
[13] J.F. Plebański, Some solutions of complex Einstein equations, J. Math. Phys. 16 (1975), Issue 12, 2395-2402
[14] C. Popovici, Sur les fonctions adjointes de M. Buhl, Comptes Rendus, t.145 (1907), p. 749
[15] Ya.A. Prykarpatsky and A.K. Prykarpatski, The integrable heavenly type equations and their Lie-algebraic structure, arXiv:1785057 [nlin.SI] 24 Jan 2017
[16] M. Sato, Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, in Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science; Proceedings of the U.S.-Japan Seminar, Tokyo, 1982, Lect. Notes in Num. Anal. 5 (1982), 259–271.
[17] M. Sato, and M. Noumi, Soliton equations and the universal Grassmann manifolds, Sophia University Kokyuroku in Math. 18 (1984) (in Japanese).
[18] K. Takasaki and T. Takebe, SDiff(2) Toda equation – Hierarchy, Tau function, and symmetries, Letters in Mathematical Physics 23(3), 205–214 (1991)
[19] K. Takasaki and T. Takebe, Integrable Hierarchies and Dispersionless Limit, Reviews in Mathematical Physics 7(05), 743–808 (1995)
[20] L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev, Hamiltonian Approach in Soliton Theory, Springer, Berlin-Heidelberg, 1987

Asymptotic estimates of approximations by Fourier sums of generalized Poisson integrals in integral metrics

A. S. Serdyuk
(Institute of Mathematics of NASU)
E-mail: sanatolii@ukr.net

T. A. Stepaniuk
(Graz University of Technology)
E-mail: tania_stepaniuk@ukr.net

Denote by $C^{\alpha,r}_{\beta,1}$, $\alpha, r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, the set of all 2π–periodic functions, representable for all $x \in \mathbb{R}$ as convolutions of the form (see, e.g., [1])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ ||\varphi||_1 \leq 1, \varphi \perp 1,$$

with generalized Poisson kernels of the form

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big).$$

Functions f of such form are called generalized Poisson integrals of the functions φ.

We consider the problem of finding asymptotically unimprovable estimates of quantities

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_s = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_s, \quad 1 < s \leq \infty,$$

where $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $S_{n-1}(f;\cdot)$ are the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f.

Theorem 1. *Let $0 < r < 1$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\alpha > 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$. Then for $n \to \infty$ the following estimate is true*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_s = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{s'}} \times$$
$$\times \left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+\frac{1}{s}}(\alpha r)^{\frac{1}{s'}}} F^{\frac{1}{s}}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3-s}{2}; \tfrac{3}{2}; 1\right) + \frac{O(1)}{n^{\min\{\frac{1-r}{s'}, r\}}} \right).$$

Theorem 2. *Let $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$. Then for $n \to \infty$ the following estimate is true*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_\infty = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \frac{O(1)}{n^{\min\{(1-r), r\}}} \right).$$

Rerefences

[1] A.I. Stepanets, *Methods of Approximation Theory*, VSP: Leiden, Boston, 2005)

Modernized Dijkstra's algorithm and mathematical model for geographic information system

Ruslan Skuratovskii
(Kiev, MAUP)
E-mail: ruslcomp@mail.ru

Pavlo Radchuk
(Kiev, NTUU "KPI")
E-mail: pradchuk@ukr.net

For modeling of a domain of the Earth there are usually used a cartographic projection. The goal of our investigation is method of finding of optimal path between adjacent control points that are in some vertices of graph. The tusk of line orienteering is to find optimal path between adjacent control points in some vertices of graph. The goal of our investigation is to construct such method of finding path through all control points in determed sequence. We can choose optimal path between every pair of control points (c.p.).

For this goal we develop modified Dijkstra's algorithm that has complexity $O(\frac{V^2}{4}+\frac{VlnV}{4})$ instead of usual complexity $O(V^2+V\log_2 V)$. Also our algorithm permits a parallel realizing. As a result of a parallel implementation complexity of algorithm decrease in $|4(|V_o|-1)|$ times, where $|V_o|$ is number of c.p. Coefficient of speedup of an the algorithm of parallel search is

$$\kappa_1=\frac{(V^2+V\log_2 V)\cdot|4(|V_o|-1)|}{V^2+V\log_2 V}=\frac{|4(|V_o|-1)|}{1}.$$

Let n is number of nods. And coefficient of extension by parallelling

$$\kappa_2=\frac{\kappa_1}{n}$$

We propouse to find an optimal path between two vertices using a opposition search method. This method are based on parallel opposition search of shortest path by Dijkstra's algorithm from two vertices A and B which are c.p. on oriented graph. First vertex with minimal distance to both vertices A and B is enclose vertex of a path from A to B.

Model for a sequential search of path was constructed. Let e_{ij} is an edge between vertices v_i and v_j that has length d_{ij}. We consider a resistance r_{ij} of e_{ij} and determine new length of labeled graph edge as $\widetilde{d_{ij}}=r_{ij}d_{ij}$. The model for n competitor of sport orienteering has weighted sum objective function

$$\mathbb{F}\left(v_0,v_n,k\right)=\sum\nolimits_{s=i}^{j} d_{ij}r_{ij}s_{ij}^{-1}\to\min,$$

with inequality restriction $r_{ij}<R(k)$, where $R(k)$ is value of a critical load of k-th competitor of orienteering search, s_{ij} – speed of moving by e_{ij} [1, 2].

Let S – set of all c.p. If we can chose set S, then we use method of mask dynamic of search for solution of the problem

$$\min_{2\le j\le n}\left(dp\left(\{1,2,\ldots,n\},j\right)+m\left[j,i\right]\right),$$
$$dp\left(S,i\right)=\min_{j\in S\setminus\{i\}}\left(dp\left(S\setminus[i],j\right)+m\left[j,i\right]\right).$$

Where $dp\left(S,i\right)$ is shortest path, which starts in v_1 and going by all vertices from $S\setminus\{v_i\}$, ending up in vertex v_j.

Rerefences

[1] R. V. Skuratovskii *Generilized Euler's constant.* Vol. 10, *Mathematical visnuk of NTSh.* pp. 163-168., 2013.
[2] R. V. Skuratovskii *Modernized Pohlig-Hellman and Shanks algorithm.* Vol. 1 *Visnuk of KNU. Cybernetics.* pp. 56., 2015.

Structure of commutant and centralizer, minimal generating sets of Sylow 2-subgroups Syl_2A_n of alternating and symmetric groups

Ruslan Skuratovskii
(Kiev, MAUP)
E-mail: ruslcomp@mail.ru

Let $Syl_2A_{2^k}$ and Syl_2A_n be Sylow 2-subgroups of corresponding alternating groups A_{2^k} and A_n. We find a least generating set and a structure for such subgroups $Syl_2A_{2^k}$ and Syl_2A_n. The aim of this investigation is to research the structure of a commutant and a centralizer of Syl_2A_n and Syl_2S_n and find numbers of minimal generating sets for $Syl_2S_{2^k}$ and Syl_2A_n. Let us denote by $X^{[k]}$ a regular truncated binary rooted tree with number of levels from 0 to k, where $X = \{0,1\}$. The set $X^n \subset X^*$ is called the n-th level of the tree X^* and $X^0 = \{v_0\}$. For every automorphism $g \in AutX^*$ and every word $v \in X^*$ define the section (state) $g_{(v)} \in AutX^*$ of g at v by the rule: $g_{(v)}(x) = y$ for $x, y \in X^*$ if and only if $g(vx) = g(v)y$. The restriction of the action of an automorphism $g \in AutX^*$ to the subtree $X^{[l]}$ is denoted by $g_{(v)}|_{X^{[l]}}$. A restriction $g_{(v)}|_{X^{[1]}}$ is called the vertex permutation (v.p.) of g in a vertex v. The vertex of X^j having the number i we denote by $v_{j,i}$ also we denote by $v_{j,i}X^{[k-j]}$ the subtree of $X^{[k]}$ with a root in $v_{j,i}$. Let β belongs to full automorphism group $AutX^{[k]}$ of $X^{[k]}$.

Definition 1. Let us call the index of an automorphism β on X^l a number of no trivial v.p. of β on X^l.

Definition 2. Define a element of type T as an automorphism $\tau_{i_0,\dots,i_{2^{k-1}};j_{2^{k-1}},\dots,j_{2^k}}$, that has even index at X^{k-1} and it has exactly m active states, $m < 2^{k-2}$, in vertexes $v_{k-1,j}$ with number $1 \le j \le 2^{k-2}$ and m active states in vertices $v_{k-1,j}$, $2^{k-2} < j \le 2^{k-1}$. Set of such elements is denoted by T.

Let $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_m}$, where $0 \le k_0 < k_1 < \dots < k_m$ and $m \ge 0$. Also recall that $Syl_2S_n = Syl_2S_{2^{k_0}} \times \dots \times Syl_2S_{2^{k_m}}$.

Theorem 3. ***A maximal 2-subgroup*** *of $AutX^{[k]}$ acting by even permutations on X^k has the structure of the semidirect product $G_k \simeq \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k-1} C_2 \ltimes C_2^{2^{k-1}-1}$ and isomorphic to $Syl_2A_{2^k}$.*

An automorphisms group of the subgroup $C_2^{2^{k-1}-1}$ is based on permutations of copies of C_2. Orders of $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k-1} C_2$ and $C_2^{2^{k-1}-1}$ are equals. A homomorphism from $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k-1} C_2$ into $Aut(C_2^{2^{k-1}-1})$ is injective because a kernel of action $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k-1} C_2$ on $C_2^{2^{k-1}-1}$ is trivial. The group G_k is a proper subgroup of index 2 in the group $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} C_2$ [6].

Theorem 4. *The centralizer of $Syl_2S_{2^{k_i}}$ with $k_i > 2$, in Syl_2S_n is isomorphic to ${}^{Syl_2Syl_2S_n}/_{Syl_2S_{2^{k_i}}} \times Z(Syl_2S_{2^{k_i}})$.*

Theorem 5. *The centralizer of $Syl_2A_{2^{k_i}}$ with $k_i > 2$, in Syl_2A_n is isomorphic to ${}^{Syl_2A_n}/_{Syl_2A_{2^{k_i}}} \times Z(Syl_2A_{2^{k_i}})$.*

We will call ***diagonal base*** [1], [2] (S_d) for $Syl_2S_{2^k} \simeq AutX^{[k]}$ a generating set where every j-th generator has odd number of non trivial v.p. on X^j and it has only trivial v.p. on other levels. A number of such tuple with odd number of no trivial v.p. that can be on X^j equals to 2^{2^j-1}.

There is minimum one permutation of type T [1] in S_d for $Syl_2A_{2^k}$. It can be chosen in $(2^{n-2})^2$ ways. Thus, general cardinality of S_d for $Syl_2A_{2^k}$ is $2^{2^{k-1}-k-2}(2^{n-2})^2$. Hence, it can be applied [3]. As a result, we have $2^{k(2^k-k-1)} \cdot (2^k-1)(2^k-2)(2^k-2^2)\dots(2^k-2^{k-1})$ bases for $Syl_2S_{2^k}$.

Lemma 6. *Commutators of all elements from $Syl_2 A_{2^k}$ have all possible even indexes on X^l, $l < k-1$ of $X^{[k]}$ and on X^{k-2} of subtrees $v_{11}X^{[k-1]}$ and $v_{12}X^{[k-1]}$.*

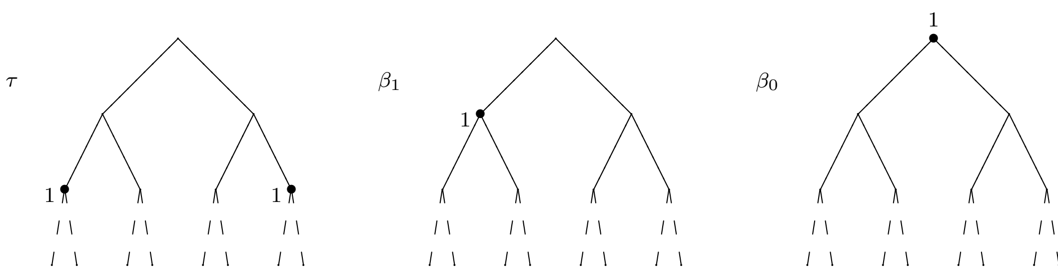
Theorem 7. *The set of all commutators K of Sylow 2-subgroup $Syl_2 A_{2^k}$ of the alternating group A_n is the commutant of $Syl_2 A_{2^k}$.*

Proposition 8. *Frattini subgroup $\phi(G_k)$ acts by all even permutations on X^l, $1 \le l \le k-1$ and any element of $\phi(G_k)$ has arbitrary even indexes on X^{k-2} of subtrees $v_{11}X^{[k-1]}$ and $v_{12}X^{[k-1]}$ [1]. Also $\phi(G_k) = (G_k)'$.*

Lemma 9. *A quotient group ${}^{G_k}/_{G_k^2 G_k'}$ is isomorphic to $\underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{k}$.*

Theorem 10. *A minimal generating set for a group $Syl_2 A_{2^k}$ consists of k elements.*

Example 11. For example, a minimal set of generators for $Syl_2(A_8)$ may be constructed by following way, for convenience let us consider the next set:



Let $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_m}$, where $0 \le k_0 < k_1 < \ldots < k_m$ and $m \ge 0$.

Theorem 12. *Any minimal set of generators for $Syl_2 A_n$ has $\sum\limits_{i=0}^{m} k_i - 1$ generators, if $m > 0$, and it has k_0 generators, if $m = 0$. For instance if $n = 4k+2$, then $Syl_2 A_n$ has $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ generators.*

Example 13. Minimal generating set for $Syl_2 A_{28}$ has 8 elements: $(25,27)(26,28)$, $(23,24)(25,26)$, $(17,21)(18,22)(19,23)(20,24)$, $(17,19)(18,20)$, $(15,16)(17,18)$, $(1,9)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,3)(2,4)$.

Rerefences

[1] R. V. Skuratovskii *Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups.* Source: https://arxiv.org/pdf/1702.05784.pdf, 2017.

[2] B. Pawlik, *The action of Sylow 2-subgroups of symmetric groups on the set of bases and the problem of isomorphism of their Cayley graphs.* Vol. 21 of *Algebra and Discrete Mathematics.* N. 2, pp. 264-281., 2016.

[3] A.G. Myasnikov, V. Shpilrain, A. Ushakov, A practical attack on some braid group based cryptographic protocols, *Crypto Springer Lect., Notes Comp.* Sc. 3621, pp. 86-96, 2005.

[4] Skuratovskii R. V. Corepresentation of a Sylow p-subgroup of a group S_n. *Cybernetics and systems analysis*, volume 1, (2009), pp. 27-41.

[5] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. Generators and relations for wreath products. vol. 60., of Ukr. Math. J., No. 7, pp. 1168-1171. 2008.

[6] Skuratovskii R. V. Generators and relations of Sylow p-subgroups of symmetric groups S_n. *Naukovi visti KPI*, pp. 93-101. 2014.

On locally nilpotent Lie algebras of derivations of small rank

Kateryna Sysak
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
E-mail: sysakkya@gmail.com

Let $\mathbb{K}$ be an arbitrary field of characteristic zero. Let A be an integral domain over $\mathbb{K}$ and R the fraction field over A. Denote by $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ and $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}R$ the Lie algebras of $\mathbb{K}$-derivations of A and R, respectively. Any derivation $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ can be uniquely extended to a derivation of R. If $r \in R$ and $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$, then one can define a $\mathbb{K}$-derivation $rD \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}R$ by setting $rD(x) = r \cdot D(x)$ for all $x \in R$. We denote by $W(A)$ the subalgebra $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A = \mathbb{K}\langle rD \mid r \in R, D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A\rangle$ of the Lie algebra $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}R$. For each subalgebra L of $W(A)$, we define the rank $\mathrm{rk}_R\, L$ of L over R as the dimension of the vector space $RL = \mathbb{K}\langle rD \mid r \in R, D \in L\rangle$ over R.

The structure of nilpotent subalgebras of finite rank over R from $W(A)$ was given in [2], [3], [4]. The results obtained there can be used to characterize locally nilpotent Lie algebras of derivations. A Lie algebra is called locally nilpotent if every its finitely generated subalgebra is nilpotent. As an example of such Lie algebras of derivations, one may consider the Lie algebras $u_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, of triangular polynomial derivations (see, [1]).

Theorem 1. *Let L be a nonzero locally nilpotent subalgebra of finite rank over R from the Lie algebra $W(A)$. Let I be a proper ideal of L such that $I = RI \cap L$. Then the center $Z(L/I)$ of the Lie algebra L/I is nontrivial.*

In particular, we get the following result:

Corollary 2. *If L is a nonzero locally nilpotent subalgebra of finite rank over R from the Lie algebra $W(A)$, then the center $Z(L)$ of L is nonzero.*

Let L be a subalgebra of $W(A)$. Then the field of constants $F = F(L)$ for L consists of all $r \in R$ such that $D(r) = 0$ for all $D \in L$. In [2] it was proved that $FL = \mathbb{K}\langle fD | f \in F, D \in L\rangle$ is a Lie algebra over F. Moreover, if L is nilpotent and $\mathrm{rk}_R\, L < \infty$, then the Lie algebra FL is finite dimensional over F. In the case of a locally nilpotent L, FL is also locally nilpotent and the following theorem holds.

Theorem 3. *Let L be a locally nilpotent subalgebra of the Lie algebra $W(A)$. Let F be the field of constants for L. Then:*

1. *If $\mathrm{rk}_R\, L = 1$, then L is abelian and $\dim_F FL = 1$;*
2. *If $\mathrm{rk}_R\, L = 2$, then either FL is a nilpotent finite dimensional Lie algebra over F, or there exist $D_1,\ D_2 \in L$ and $a \in R$ such that*

$$FL = F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_k, \ldots\rangle,$$

where $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = 1$, and FL is infinite dimensional over F.

Rerefences

[1] Bavula V. V. Lie algebras of triangular derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 77: 3–44, 2013.

[2] Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A. P. On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. *Journal of Algebra*, 401: 245–257, 2014.

[3] Petravchuk A. P. On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields. *Algebra Discrete Math.*, 22: 116–128, 2016.

[4] Sysak K. Ya. On nilpotent Lie algebras of derivations with large center. *Algebra Discrete Math.*, 21: 153–162, 2016.

Expand-contract plasticity of unit balls and related results

Olesia Zavarzina
(Kharkiv V.N. Karazin National University, Ukraine)
E-mail: olesia.zavarzina@yahoo.com

The talk deals with results received by author and her scientific advisor V.M. Kadets. These results has become the base for two papers (see [2] and [4]).

A metric space M is called *expand-contract plastic* (or simply, an EC-space) if every non-expansive bijection from M onto itself is an isometry. The EC-plasticity of totally bounded metric spaces and the unit balls of strictly convex Banach spaces has been proved in [3, Theorem 1.1] and [1, Theorem 2.6] respectively. In particular, the unit balls of all finite-dimensional Banach and of all Hilbert spaces are plastic. On the other hand, there are bounded closed convex sets in an infinite-dimensional Hilbert space that are not EC-spaces [1, Example 2.7]. It is an open question whether unit balls of all Banach spaces are EC-spaces. We have answered this question in the positive for concrete space ℓ_1, which is not strictly convex.

Theorem 1. *The unit ball of ℓ_1, is an EC-space.*

There is another problem connected with the previous one. For which pairs (E, M) of Banach spaces every bijective non-expansive map $F\colon B_E \to B_M$ is an isometry? Unfortunately, we are not able to answer this question in full generality. However, the following results in this direction have been received.

Theorem 2. *Let $F\colon B_E \to B_M$ be a bijective non-expansive map. If M is strictly convex, then F is an isometry.*

Theorem 3. *Let $F\colon B_E \to B_{\ell_1}$ be a bijective non-expansive map. Then F is an isometry.*

Theorem 4. *Let M be a finite-dimensional Banach space, $F\colon B_E \to B_M$ be a bijective non-expansive map. Then F is an isometry.*

Rerefences

[1] B. Cascales, V. Kadets, J. Orihuela, E.J. Wingler. Plasticity of the unit ball of a strictly convex Banach space. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 110 (2) : 723–727, 2016.

[2] V. Kadets, O. Zavarzina. Plasticity of the unit ball of ℓ_1, *Visn. Hark. nac. univ. im. V.N. Karazina, Ser.: Mat. prikl. mat. meh.* 83 : 4–9, 2017.

[3] S.A. Naimpally, Z. Piotrowski, E.J. Wingler. Plasticity in metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 313 : 38–48, 2006.

[4] O. Zavarzina. Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces. To appear in Annals of Functional Analysis.

Зміст