Мультиплікатори в просторах Харді та пов'язаних з ними просторах

Петро Задерей
(Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги, 37, Київ)
E-mail: zadereypv@ukr.net

Микола Гаєвський
(Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, вул. Шевченка,1, Кропивницький)
E-mail: mgaevskij@gmail.com

Нехай m — деяке натуральне число, $\mathbb{C}^m$ — множина впорядкованих наборів комплексних чисел $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Через $D^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1,\ 1 \le j \le m\}$ позначимо одиничний полікруг з кістяком $T^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_j| = 1,\ 1 \le j \le m\}$. Через $H_1(D^m)$ позначимо множину аналітичних в полікрузі D^m функцій f, для яких виконується умова

$$\|f\|_{H_1(D^m)} = \sup_{0<r_j<1, 1\le j\le m} \int_0^{2\pi} dt_1 \ldots \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{it_1}, \ldots, r_m e^{it_m})| dt_m < \infty.$$

Відмітимо, що при $m = 1$ отримаємо звичайні одновимірні класи Харді $H_1(D)$ і в цьому випадку верхній індекс будемо опускати.

За допомогою послідовності комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ кожній $f \in H_1(D^m)$ з рядом Тейлора $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$, $F_\nu(z) = \sum\limits_{k_1+\ldots+k_m=\nu} \mathbf{c_k} z^{\mathbf{k}}$ поставимо у відповідність функцію $\Lambda f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu F_\nu(z)$ та означитимо наступним чином мультиплікатор. Послідовність комплексних чисел Λ називається мультиплікатором, що діє з $H_1(D^m)$ в $H_1(D^m)$, якщо $\|\Lambda f\|_{H_1(D^m)} \le M \|f\|_{H_1(D^m)}$.

З класичними класами Харді тісно пов'язані дійсні класи Харді. Під дійсним класом Харді ReH_1 розуміють простір функцій $F : R \to R$, що є дійсними частинами граничних значень функцій $f \in H_1(D)$ $F(t) = \lim\limits_{r\to 1} Ref(re^{it})$.

Дійсний клас Харді є банаховим простором з нормою $\|F\|_{ReH_1} = \|F\|_{L_1} + \|\overline{F}\|_{L_1}$, де $\overline{F}$ — функція спряжена до F, L_1 — простір сумовних функцій з нормою $\|F\|_{L_1} = \int\limits_0^{2\pi} |F(x)| dx$.

Аналогічно, послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ називається мультиплікатором з ReH_1 в ReH_1, якщо для $F \in ReH_1$ з рядом Фур'є $F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ ряд $\Lambda F(x) \sim \frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ є рядом Фур'є деякої функції $\Lambda F \in ReH_1$, тобто $\|\Lambda F\|_{ReH_1} \le M \|F\|_{ReH_1}$.

Theorem 1. *Для того щоб послідовність комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$ була мультиплікатором з простору $H_1(D)$ в $H_1(D)$, необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність $\mu_k \in \mathbb{C}$ така, що* $\sup\limits_n \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-ikt} + \sum_{k=1}^n \mu_k e^{ikt} \right| dt < \infty$

Theorem 2. *Для того щоб послідовність комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$ була мультиплікатором з простору $H_1(D^m)$ в $H_1(D^m)$, необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність $\mu_k \in \mathbb{C}$, що* $\sup\limits_n \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-ikt} + \sum_{k=1}^n \mu_k e^{ikt} \right| dt < \infty.$

Theorem 3. *Для того щоб послідовність дійсних чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$ була мультиплікатором з простору ReH_1 в ReH_1, необхідно і достатньо, щоб існував такий розклад $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, що* $\sup\limits_n \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right| dx < \infty$