Про розщеплення парних функцій

Жук Оксана
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: oksanalakomchak@gmail.com

Войтович Христина
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: khrystyna.huk2711@gmail.com

Галь Юрій
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: yuriyhal@gmail.com

Нехай W^p_σ, $\sigma > 0$, простір Пелі-Вінера цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. Він може бути визначений і як простір цілих функцій, для яких виконується умова

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)], 0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leq p < +\infty$, є простором аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| dr \right\} < +\infty.$$

Винницький Б., Дільний В. та Гіщак Т. розглядали наступну задачу розщеплення.

Задача 1. Чи кожна функція $f \in W^1_\sigma$ допускає розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ та μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$ і $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?

Т. Гіщак запропонувала шукати функцію χ у вигляді

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma \varphi(it) e^{itz} dt, \quad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^0 \varphi(it) e^{itz} dt.$$

Позначимо через $W^1_{\sigma,+}$ підпростір $f \in W^1_\sigma$, що складається з парних функцій.

Теорема 2. *Нехай $f \in W^1_{\sigma,+}$. Тоді функція χ, визначена рівністю (1), є розв'язком вищенаведеої проблеми.*

Доведення базується на наступному твердженні.

Лема 3. *Нехай $(c_k) \in l^2$ і $\sigma \geq 0$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *послідовність (c_k) є парною;*
2) *функція $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}$ є парною;*
3) *функція $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi sin\sigma z}{\sigma z - \pi k}$ є парною.*

Література

[1] Dilnyi V. M. *Splitting of some spaces of analytic functions*, volume 6 of *Ufa Mathematical Journal*. Ufa, 2014.