Конечномерные динамики и точные решения уравнения возникновения молний

И. В. Жеребятников
(Московский Государственный Университет М. В. Ломоносова, Москва, Россия)
E-mail: `zherebiatnikov.iv16@physics.msu.ru`

В работе [1] была предложена математическая модель для объяснения возникающих в облаках скачков напряжённости электрического поля, приводящих к возникновению молний. В основе этого подхода лежит предположение о том, что заряженную часть облака можно описать с помощью основных уравнений гидродинамики заряженной среды, движущейся под действием внешних сил (потоки ветра, конвекция и т. д.). Там же приведено нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля для одномерного движения заряженного газа:

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - (u(\xi,\tau)-\alpha)\,\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi}, \tag{1}$$

где $u(\xi,\tau)$ – безразмерная напряжённость электрического поля, ξ,τ – безразмерные пространственная и временная координаты, α – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1) с использованием теории конечномерных динамик [2]. Правая часть этого уравнения порождает функцию

$$\varphi\,(y_0,y_1,y_2) = y_2 - (y_0-\alpha)\,y_1 \tag{2}$$

на пространстве джетов $J^2(\mathbb{R})$ с каноническими координатами x, y_0, y_1, y_2. Эту функцию мы рассматриваем как производящую функцию симметрий для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (так называемой *динамики*) [4]. Будем искать такое ОДУ в виде:

$$F := y_1 - h(y_0) = 0. \tag{3}$$

Применяя стандартную технику (см. [2, 3]), находим, что функция h имеет вид квадратичной функции

$$h(y_0) = \frac{1}{2}y_0^2 + ay_0 + b,$$

где a, b – произвольные постоянные. Решая уравнение (3), находим

$$y(\xi) = -a - \operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}\sqrt{a^2-2b}\right)\sqrt{a^2-2b}, \tag{4}$$

где a, b, c – произвольные постоянные. Соответствующее эволюционное векторное поле, которое является инфитезимальной симметрией для уравнения (1), имеет вид

$$S = (a+\alpha)\left(\frac{1}{2}y_0^2 + ay_0 + b\right)\frac{\partial}{\partial y_0}. \tag{5}$$

Преобразование сдвига Φ_τ, отвечающее этому полю, имеет вид

$$\xi \longmapsto \xi,$$

$$y_0 \longmapsto -a - \operatorname{th}\left[\frac{a+\alpha}{2}\tau\sqrt{a^2-2b} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-2b}-a-y_0}{\sqrt{a^2-2b}+a+y_0}\right]\sqrt{a^2-2b},$$

где τ – параметр сдвига вдоль траектории. Применяя обратное преобразование Φ_τ^{-1} к решению уравнения (3), приходим к точному решению уравнения (1):

$$u(\xi,\tau) = (\Phi_\tau^{-1})^*(y(\xi)) = \frac{(a+d)\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]\mathrm{e}^{\tau(a+\alpha)d} + (a-d)\left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}{\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]\mathrm{e}^{\tau(a+\alpha)d} + \left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}, \tag{6}$$

где $d = \sqrt{a^2-2b}$. Здесь произвольные постоянные выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $a^2-2b>0$. На рис. 0.1 представлен график решения уравнения (1). На нем выделена область,

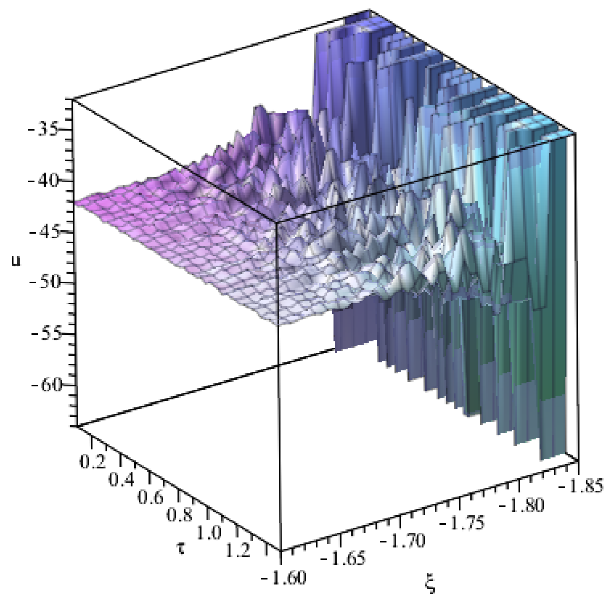

Рис. 0.1. График напряжённости электрического поля $u(\xi,\tau)$ при $a=22$, $b=42$, $c=0$, $\alpha=1$.

в которой наблюдаются резкие скачки напряжённости электрического поля в облаке, что может привести к возникновению разряда.

Литература

[1] V.I. Pustovojt. About the mechanism of lightning. Radio engineering and electronics, 2006. Vol. 51(8). P. 996-1002.

[2] Kruglikov B. S., Lychagina O. V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 19: 13–28, 2005.

[3] Kushner A. G., Matviichuk R.I. Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics. Journal of Geometry and Physics 151, 2020.

[4] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.