# Аналог преобразования Лежандра в идемпотентной математике

**М. В. Куркина, В. В. Славский**
(Югорский государственный университет, ул. Чехова 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия)
*E-mail:* `mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru`

Известна классическая формула для преобразования Лежандра [1]:

$$f^*(p) = \max_{x \in R^n} \left[ (p,x) - f(x) \right], \tag{1}$$

где $R^n$ – евклидово $n$-мерное арифметическое пространство, $(p,x)$ – скалярное произведение $x$, $p \in R^n$, $f(x)$ – выпуклая функция, $f^*(p)$ – двойственная к $f(x)$ или преобразование Лежандра функция $f(x)$. В работе [2] было введено аналогичное понятие для конформно-плоских метрик на единичной $n$-мерной сфере $S^n \subset R^{n+1}$;

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|y-x\|^2}{2f(x)}, \tag{2}$$

здесь $f(x)$ конформно-выпуклая функция на сфере [3], то есть функция для которой конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, $\|y-x\|$ – хордовое расстояние между точками на сфере, $f^*(y)$ $y \in S^n$ функция задающая двойственную или полярную метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$. В работе [5] было предложено назвать это преобразование также преобразованием Лежандра функции $f(x)$ $x \in S^n$. С вычислительной точки зрения формула (2) имеет дискретный вид;

$$f^*(y_j) = \max_{x_i \in S^n} \frac{\|y_j - x_i\|^2}{2f(x_i)}, \tag{3}$$

где $\{x_i\}$ конечная сетка точек на сфере. В данной работе предлагается абстрактное обобщение формулы (3) для идемпотентной математики.

**Определение 1.** Пусть $n > 1$, $R_n^+$ – множество наборов $f = \{f_i\}$, $i = 1, \dots, n$ положительных чисел, $A = \|A_{ji}\|$ $i, j = 1, \dots, n$ симметричная квадратная матрица неотрицательных чисел с нулевой диагональю. Обозначим через $L_A$ – отображение множества $R_n^+$ в себя $L_A : R_n^+ \to R_n^+$ определяемое формулой $L_A\left[\{f_i\}\right] = \{f_j^*\}$, где

$$f_j^* = \max_i \frac{A_{ji}}{f_i}. \tag{4}$$

**Замечание 2.** В формуле (4) участвуют только две операции над неотрицательными числами умножение (деление) и max (min), с помощью функции log это множество чисел можно отождествить с идемпотентным полукольцом $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ см.[6], [4].

**Теорема 3.** *Преобразование (4) полукольца $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ обладает свойствами:*

$$f_i^{**} \le f_i, \quad f_i^{***} = f_i^* \quad i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

*где $\{f_i^*\} = L_A\left[\{f_i\}\right]$, $\{f_i^{**}\} = L_A\left[\{f_i^*\}\right]$, $\{f_i^{***}\} = L_A\left[\{f_i^{**}\}\right]$.*

**Следствие 4.** *В условиях теоремы 3 справедливо неравенство: $f_j^* \cdot f_i \ge A_{ji}$ – аналог неравенства Юнга—Фенхеля.*

**Пример 5.** Рассмотрим как выглядит $L_A$ при $n = 3$, пусть матрица $A$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$ имеют вид:

$$f_1^* = \max\left(\frac{a}{f_2}, \frac{b}{f_3}\right),\ f_2^* = \max\left(\frac{a}{f_1}, \frac{c}{f_3}\right),\ f_2^* = \max\left(\frac{b}{f_1}, \frac{c}{f_2}\right);$$

$$f_1^{**} = \max\left(a\min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b\min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right)\right),$$

$$f_2^{**} = \max\left(c\min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right), a\min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right),$$

$$f_3^{**} = \max\left(c\min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b\min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right).$$

**Замечание 6.** Как показали численные эксперименты если матрица $A$ в теореме **3** не обладает требуемыми свойствами, то теорема не верна.

**Гипотеза 7.** *Теорема 3 справедлива в случае абстрактного полукольца.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

## Литература


[1] В. С. Владимиров. Преобразование Лежандра выпуклых функций. Матем. заметки, 1:6 (1967), 675–682; Math. Notes, 1(6), : 448-–452, 1967.

[2] Е. Д. Родионов, В. В. Славский. Полярное преобразование конформно-плоских метрик. Матем. тр., 20:2 (2017), 120–138; Siberian Adv. Math., 28(2), : 101—114, 2018.

[3] M. V. Kurkina, V. V. Slavsky, E. D. Rodionov. Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature. Докл. АН СССР, 91(3), : 287—289, 2015.

[4] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский. Идемпотентная математика и интервальный анализ. Вычислительные технологии, 6(6), : 47–70, 2001.

[5] М. В. Куркина. Об изменении кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра. Известия алтайского государственного университета, 4(102), : 88–92, 2018.

[6] Serge Sergeev and Hans Schneider. CSR expansions of matrix powers in max algebra. Transactions of the American Mathematical Society, 364(11) : 5969—5994, 2012.