О геометрии орбит векторных полей

Шамсиев Жахонгир
(Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан)
E-mail: jahongirshamsiyev455@gmail.com

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $V(M)$ – множество всех гладких векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^{∞}.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от поля X, и от начальной точки x.

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1 X_2, \ldots, X_k$ из D (где $k-$ произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots)).$$

Изучению структуры множества достижимости и орбиты систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений([1]-[3]).

В работах [2], [3] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \geq 1$) с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M.

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением [2].

Если размерности всех орбит одинаковы, то разбиение M на орбиты D является регулярным слоением. Известно, что для размерности орбиты имеет место $dim A_x(D) \leq dim L(x)$, где $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ подпространство касательного пространства $T_x M$ [3].

Пусть $M = R^3(x_1, x_2, x_3)$, где (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты. Рассмотрим семейство D, состоящее из следующих векторных полей

$$X_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1}$$

Теорема 2. *Орбиты семейства D, порождают двумерное слоение, слоями которого являются поверхности неотрицательной кривызни.*

Литература

[1] Азамов А.А.,Нарманов А. Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, №2, С. 257-260.

[2] Stefan P. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. Proc. London Mathematical Society. 1974, v. 29, p. 694-713.

[3] Sussmann. H. Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.