Асимптотика найкращих рівномірних наближень класів згорток періодичних функцій високої гладкості

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: `serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua`

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ та $\|\cdot\|_p$, відповідно.

Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[\Psi_{\bar\beta}](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0. \tag{1}$$

Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, то функція f є неперервною функцією, тобто $C^{\psi}_{\bar\beta,p} \subset C$.

Якщо $f \in C$, через $E_n(f)_C$ позначимо найкраще рівномірне набдиження функції f підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів T_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Якщо $\mathfrak{N}$ — деякий функціональний клас з простору C ($\mathfrak{N} \subset C$), то величину

$$E_n(\mathfrak{N})_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_n(f)_C \tag{2}$$

називають найкращим рівномірним наближенням класу $\mathfrak{N}$ підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів T_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$.

Розглядається задача про знаходження асимптотичних рівностей величин (2) при $n \to \infty$ у випадку, коли у ролі $\mathfrak{N}$ виступають класи $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, а послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля дуже швидко, зокрема коли

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) = o(1)\psi(n). \tag{3}$$

Зазначимо, що у випадку $p = \infty$ асимптотичні рівності і, навіть, точні значення величин $E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C$ при окреслених обмеженнях на $\psi(k)$ відомі (див., наприклад, [2, 3]).

Позначимо через $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C$ величини

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C, \tag{4}$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинна сума Фур'є порядку $n-1$ функції f.

Оскільки

$$E_n(\mathfrak{N})_C \le \mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C, \quad \mathfrak{N} \subset C, \tag{5}$$

то величини (4) природньо використовувати для оцінок зверху найкращих наближень класів $\mathfrak{N}$.

Задача про знаходження сильної асимптотики величин (4) при $n \to \infty$ носить назву задачі Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є. Вона має велику історію, познайомитись з якою можна, наприклад, по монографії [1]. Для швидко спадних $\psi(k)$ асимптотика величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C$ відома при усіх $1 \le p \le \infty$ і $\beta_k \in \mathbb{R}$ (див. [4]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Надалі будемо вимагати, щоб послідовність модулів коефіцієнтів Фур'є твірного ядра $\Psi_{\bar{\beta}}(t)$ задовольняла умову

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) < \psi(n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Для довільних* $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *і* $\psi(k)$, *що задовольняють умову* (6), *виконуються наступні співвідношення*

$$\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\Big(\psi(n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)\Big) \le E_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C \le \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\Big(\psi(n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)\Big). \tag{7}$$

Якщо ж $\psi(k)$ *задовольняє умову* (3), *то мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C & \qquad (8) \\ \\ E_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C & \qquad (9) \end{array}\right\} = \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\psi(n) + \mathcal{O}(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k),$$

в яких $\mathcal{O}(1)$ *є рівномірно обмеженими відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Зазначимо, що асимптотичні рівності (8) і (9) при деяких співвідношеннях між параметрами випливають з робіт [1]-[6].

Література

[1] Степанец А.И. *Классификация и приближение периодических функций.* — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // *Укр. мат. журн.* – 2000. – Т.52, №3. – С.375–395.

[3] Сердюк А.С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості // *Укр. мат. журн.* - 2005. - 57, № 7. - С. 946–971.

[4] Сердюк А. С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // *Укр. мат. журн.* - 2005. - 57, № 8. - С. 1079 – 1096.

[5] Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // *Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР.* - 1980. - 145. - С. 126–151.

[6] Serdyuk, A. S., Sokolenko, I. V. Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness // *Methods of Functional Analysis and Topology.* Vol. 25 (2019), №4, pp. – 381-387.