Тождества кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу

Вадим Федорович Кириченко
(МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: `highgeom@yandex.ru`

Алигаджи Рабаданович Рустанов
(ИФО, НИУ МГСУ, Москва, Россия)
E-mail: `aligadzhi@yandex.ru`

Светлана Владимировна Харитонова
(ОГУ, Оренбург, Россия)
E-mail: `hcb@yandex.ru`

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти контактное метрическое многообразие.

Определение 1. ([1], [2]). Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y$; $X, Y \in X(M)$, называется обобщенными многообразиями Кенмоцу (короче, GK-многообразиями).

Определение 2. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_1, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству $R(\xi, X)\xi = 0$; $\forall X \in X(M)$.

Теорема 3. *GK-многообразие класса R_1 является пятимерным почти контактным метрическим многообразием, получаемым из точнейше косимплектического многообразия каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры размерности 5.*

Теорема 4. *Тензор римановой кривизны GK-многообразия удовлетворяет следующим тождествам:*
1) $R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi = R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0$;
2) $R(X, Y)\xi = \eta(X)F^2(Y) - \eta(Y)F^2(X) + \eta(Y)X - \eta(X)Y$;
3) $R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0$;
4) $R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = \eta(Y)F^2(X) - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi; \forall X, Y \in X(M)$.

Назовем тождество $R(\xi, \Phi^2 X)\xi = F^2(\Phi^2 X) + \Phi^2 X$; $\forall X \in X(M)$ ***первым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия***. А тождество

$$R(\xi, \Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 2\langle F(X), F(Y)\rangle - \langle X, Y\rangle + \eta(X)\eta(Y)\xi\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$, назовем ***вторым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия***.

Определение 5. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_2, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\xi, \Phi^2 X)(\Psi^2 Y) + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 6. *GK-многообразие является многообразием класса R_2 тогда и только тогда, когда оно является многообразием класса R_1.*

Определение 7. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_3, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 8. *GK-многообразие является многообразием класса R_3 тогда и только тогда, когда оно является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода, для которого $C_{abcd} = 0$.*

Назовем тождество

$$R(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z + R(\Phi^2X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2Z =$$
$$= -4A(Z, X, Y) + \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi^2X) - \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi Z, \Phi X) + \nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi X) +$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi Z, \Phi^2X) - 2\Phi^2X\langle\Phi Y, \Phi Z\rangle - 2\Phi X\langle Y, \Phi Z\rangle; \forall X, Y, Z \in X(M)$$

четвертым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия.

Определение 9. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_4, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z + R(\Phi^2X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2Z = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 10. *GK-многообразие является многообразием класса R_4 тогда и только тогда, когда*

$$A(Z, X, Y) = \frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi^2X) - \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi Z, \Phi X) +$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi X) + \nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi Z, \Phi^2X) - 2\Phi^2X\langle\Phi Y, \Phi Z\rangle - 2\Phi X\langle Y, \Phi Z\rangle\}$$

$\forall X, Y, Z \in X(M)$.

Теорема 11. *GK-многообразие класса R_4 является SGK-многообразием II рода.*

Литература

[1] С. В. Умнова. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2002. – 88 с.

[2] B. Najafi, N. H. Kashani *On nearly Kenmotsu manifolds*, volume 37 of *Turkish Journal of Mathematics*, 2013. p.1040 – 1047, http://journals.tubitak.gov.tr/ma th/.