Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій

Михайло Романський
(ДДПУ імені Івана Франка)
E-mail: Romanskiy.miha@ukr.net

Основи асимптотичної топології викладено в статті [2] Дранішнікова. Дранішников також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означує конус, надбудову і джойн.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами. В роботі [2] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$$X \tilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \tilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \tilde{\times} Y \subset X \times Y$.

У статті [2] означено конус CX і надбудову $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору за аналогією: $CX = X \tilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_+(X)$ і $\sum X = X \tilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_\pm(X) = CX / i_- X$ де $i_\pm \colon X \to X \tilde{\times} \mathbb{R}^2_+$ вкладення, означені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, але у статті [5] в лемі 1 доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Аналогічно можна довести, що надбудова $\sum \mathbb{R}$ не ізоморфна простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Лема 1. *Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Теорема 2. *Простори $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентні.*

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна означити букет $X \vee Y$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Формула для метрики Канторовича-Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$ між двома довільними ймовірнісними мірами $\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y$ і $\nu = \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}$ має наступний вигляд

$$d_{KP}(\mu, \nu) = \mid \alpha - \beta \mid (y + y') + \min\{\alpha, \beta\} d(x, x') + (1 - \max\{\alpha, \beta\}) \mid y - y' \mid .$$

Лема 3. *Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

У статті [5] аналогічний результат доведено для γ-слабо опуклих та δ-слабо вгнутих геодезійних просторів.

З лем 1 і 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Джойн $\mathbb{R} * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу $C\mathbb{R}$ в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Лема 5. *Нехай $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу CX в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Для метричного простору (X, ρ) через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n, що задається умовою $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X і позначають $SP^n(X)$.

Теорема 6. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}_+$ *, симетричний степінь* $SP^3 \mathbb{R}_+$ *та простір* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Теорема 7. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}$ *, симетричний степінь* $SP^3 \mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

З теорем 6 і 7 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 8. *Гіперпростори* $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$, *симетричні степені* $SP^3 \mathbb{R}_+$, $SP^3 \mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Конус $\mathrm{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0)$, $x, y \in X$. Якщо (X, d) — метричний простір і $\mathrm{diam}(X) \leq 2$, то метрика $\hat{d}$ на $\mathrm{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\hat{d}((x, t), (y, s)) = \min\{t, s\} d(x, y) + |t - s|.$$

Лема 9. *Якщо компактні метричні простори* (X, d) *і* (Y, ρ) *ліпшицево еквівалентні, то метричні простори* $\mathrm{Cone}(X)$ *і* $\mathrm{Cone}(Y)$ *також ліпшицево еквівалентні.*

Лема 10. *Півсфера* S^n_+ *та куб* I^n *ліпшицево еквівалентні.*

З лем 9 та 10, врахувавши, що $\mathrm{Cone}(\mathrm{S}^n_+) \simeq \mathbb{R}^{n+1}_+$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 11. *Конус* $\mathrm{Cone}(\mathrm{I}^n)$ *та* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Наступну теорему можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [4].

Теорема 12. *Гіперпростір* $\exp_2 \mathbb{R}^m$ *ліпшицево еквівалентний* $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\ (\mathbb{R}P^{m-1})$, *де* $\mathbb{R}P^{m-1}$ *— проєктивний простір.*

Теорема 13. *Простори* $\mathbb{R}^3_+$ *та* $P_2(\mathbb{R})$ *не є грубо еквівалентні.*

Зауваження 14. Аналогічний результат можна довести для суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна визначити як факторпростір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Зауважимо, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3 (див. [1]).

Зауважимо також, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не гомеоморфні.

Література

[1] Заричный М.М. Фундаментальная група суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.

[2] Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.

[3] Romanskyi M. Coarse equivalences of functorial constructions.Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 69–77

[4] Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).

[5] Zarichnyi M., Romanskyi M. Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.