Орбита семейство конформных векторных полей в Евклидовом пространстве

Э. О. Ражабов
(National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek)
E-mail: `rajabov_2019@bk.ru`

В этой работе изучается геометрия орбит конформных векторных полей в Евклидовом пространстве. Найдены орбиты коразмерности один, семейство некоторых конформных векторных полей.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей через точку x является множеством точек y в M, таких, что существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_k$ в D (где k - произвольное натуральное число), такое что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1})\ldots,)).$$

Известно, что векторное поле X на (M, g) конформно тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X, состоит из конформных преобразований. Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная конформным векторным полем, состоит из гомотетий, если σ является константой, и состоит из изометрий, если $\sigma = 0$.

Напомним, что диффеоморфизм $\phi : M \to M$ называется конформным преобразованием, если $|d|\phi(g) = \lambda g$, где $|d|\phi(g)(u, v) = g(|d|\varphi(u), |d|\varphi(v))$, λ – положительная функция на (M, g), u, v – касательные векторы. Если постоянная λ, то ϕ является преобразованием гомотетии. Если λ тождественно равен 1, то ϕ является изометрией.

Примерами конформных векторных полей являются векторные поля Киллинга. Напомним, что векторное поле на (M, g) называется полем Киллинга, если его поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g), то есть $L_X g = 0$. Геометрия орбиты векторных полей Киллинга изучаются в.

Многочисленным исследованиям посвящено изучение геометрии конформных векторных полей, в частности, в [2] доказано, что если многообразие компактно, то множество неподвижных точек конформного векторного поля является подмногообразием четной коразмерности.

Было показано, что если риманово многообразие (M, g) отличается от евклидова пространства или сферы, то на многообразии (M, g) существует риманова метрика $\tilde{g}$ конформно эквивалентен римановой метрике g такой, что группа конформных преобразований многообразия (M, g) является группой изометрий в $(M, \tilde{g})$. Этот факт показывает, что все конформные векторные поля на многообразиях являются векторными полями Киллинга относительно римановой метрики $\tilde{g}$. Из этого следует, что на многообразиях, отличных от евклидова пространства и от сферы, изучение геометрии конформных векторных полей сводится к изучению векторных полей Киллинга.

Изучению геометрии конформных векторных полей посвящены многочисленные исследования [[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7]].

Рассмотрим семейству конформных векторных полей $D = X, Y$ в пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, где

$$X = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + \left(z^2 - x^2 - y^2\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(y^2 - x^2 - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема 2. *Орбиты семейства конформных векторных полей* $D = \{X, Y\}$ *, являются сферы с выколотой точкой и плоскость с выколотой точкой:*

$$L_c^+ = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = cx : c > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash (0, 0, ..., 0)\right\},$$
$$L_c^- = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = cx : c < 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash (0, 0, ..., 0)\right\},$$
$$L_0 = \{x = 0 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \backslash (0, 0, ..., 0)\}.$$

Литература

[1] Alekseevskii D. V. *Groups of conformal transformations of Riemannian spaces* Math. USSR-Sb 18:2 1972, 285–301.
[2] Blair D. E. *On the zeros of a conformal vector field.* Nagoya Math. Journal 55 (1974) 1–3.
[3] Hermann R. *The differential geometry of foliations II* . J. Math. Mech 11 (1962), 305–315.
[4] Kobayashi. Sh. Nomizu. K. *Foundations of Differential Geometry.* vol 1. Interscience New York-London 1963.
[5] Narmanov A. Ya. Saitova S. S. *On the Geometry of Orbits of Killing Vector Fields* . Differential Equations 6 (2014), 247–258.
[6] Narmanov A. Ya. Rajabov E. O. *On the Geometry of Orbits of Conformal Vector Fields* . J. Geom. Symmetry Phys. 51 (2019), 29–39.
[7] Olver P. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer–Verlag, New York 1993.