# Канторвал як множина неелементарних ланцюгових дробів

**М. В. Працьовитий**
(НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України)
*E-mail:* prats4444@gmail.com

**Я. В. Гончаренко**
(НПУ імені М.П. Драгоманова)
*E-mail:* yan_a@ukr.net

**В. О. Дрозденко**
(Білоцерківський національний аграрний університет)
*E-mail:* drozdenko0408@gmail.com

У геометрії числових рядів, яка бере свій початок з роботи Какея [4], однією з основних є задача про тополого-метричні властивості множини неповних сум (підсум) абсолютно збіжного ряду $a_1 + a_2 + ...$, а саме множини

$$E(\{a_n\}) = \{x : x = \sum_{n \in M \subset N} a_n, M \in 2^N\},$$

яка, як відомо, є обмеженою, континуальною, досконалою (замкнена і не має ізольованих точок).

Відносно недавно встановлено, що існує лише три топологічні типи множин неповних сум: 1) відрізок або скінченне об'єднання відрізків; 2) ніде не щільна множина; 3) канторвал.

Останній тип є своєрідною «сумішшю» двох попередніх типів. Перші прикладів рядів з такими множинами неповних сум побудовано не так давно (про це дивись в [1]). Одним з найпростіших з них є ряд

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + ... + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + ....$$

Сьогодні в основному користуються наступним означенням канторвала. Канторвалом називається множина гомеоморфна множині $T \equiv C \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0;1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n}$,

де $C = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \alpha_k \in \{0,1\}\}$ — множина Кантора,
$G_k = \bigcup\limits_{\alpha_1 \in \{0,2\}} ... \bigcup\limits_{\alpha_{k-1} \in \{0,2\}} (\Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(0)}; \Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(2)})$.

Ми пропонуємо альтернативне (еквівалентне) означення канторвала, наведене нижче.

**Означення 1.** *Валом* на числовій прямій називатимемо множину $W$, яка є таким об'єднанням нескінченного числа інтервалів, що
1) інтервали попарно не перетинаються;
2) між кожними двома інтервалами об'єднання лежить принаймні один інтервал цього об'єднання.

Прикладом валу на числовій прямій є об'єднання циліндричних інтервалів трійкового зображення чисел відрізка $[0;1]$ виду $\nabla^3_1, \nabla^3_{c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}1}$, де $c_i \in \{0,2\}$, $k \in N$.

Множиною канторівського типу називається обмежена ніде не щільна, досконала множина.

**Означення 2.** *Канторвалом* називається обмежена досконала множина $K$ числової прямої, яка є об'єднанням множини канторівського типу $C$ і валу $W$, кожен інтервал якого є суміжним з множиною $C$ і при цьому доповнення $\overline{K}$ до $K$ є валом. *Структурою канторвалу* $K$ називається представлення (розклад): $K = C \cup W$.

Канторвали є популярним об'єктом сучасних математичних досліджень, але до цих пір критерія канторвальності множини підсум ряду не знайдено.

Канторвали виникають і у теорії ланцюгових дробів, де спостерігаються аналогічна картина з геометрії числових рядів.

Нагадаємо, що нескінченним ланцюговим дробом називається вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}} \equiv [a_0; a_1, a_2, ...]. \tag{1}$$

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $\mathcal{A} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}\}$ — множина дійсних чисел таких, що $0 < c_0 < c_1 < \ldots < c_{s-1}$, яка називається алфавітом; $L_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A} \times \ldots$ —простір послідовностей елементів алфавіту $\mathcal{A}$. Нас цікавлять тополого-метричні властивості множини $G_{\mathcal{A}}$ значень нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$.

Випадок $s = 2$ заслуговує на окрему увагу, яка приділена йому у роботах [2, 3, 5, 6].

**Теорема 3** ([2])**.** *Якщо $s = 2$, то $G_{\mathcal{A}}$ є відрізком $[a; b]$, де $a = [0; (c_1, c_0)]$, $b = [0; (c_0, c_1)]$, коли $c_0 c_1 \leq \frac{1}{2}$; ніде не щільною множиною, коли $c_0 c_1 > \frac{1}{2}$. При умові $c_0 c_1 > \frac{1}{2}$ кожне число $x \in G_{\mathcal{A}}$ має єдине зображення нескінченним ланцюговим дробом, при $c_0 c_1 = \frac{1}{2}$ числа зліченної щільної у відрізку $[\beta_0; \beta_1]$, де $\beta_0 = [0; (c_1, c_0)], \beta_1 = [0; (c_0, c_1)]$, множини мають два зображення, а решта — мають єдине зображення.*

**Теорема 4.** *Множина $G_{\mathcal{A}}$ значень нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$, є континуальною, досконалою і обмеженою, причому*

$$\min G_{\mathcal{A}} = [0; (c_{s-1}, c_0)] = \frac{\sqrt{c_0 c_{s-1}(c_0 c_{s-1} + 4)} - c_0 c_{s-1}}{2 c_{s-1}} \equiv d_0, \tag{2}$$

$$\max G_{\mathcal{A}} = [0; (c_0, c_{s-1})] = \frac{\sqrt{c_0 c_{s-1}(c_0 c_{s-1} + 4)} - c_0 c_{s-1}}{2 c_0} \equiv d_1. \tag{3}$$

**Наслідок 5.** *Якщо $\mathcal{A} = \{\frac{1}{2}, 1, 8\}$, то $\min G_{\mathcal{A}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{4}$, $\max G_{\mathcal{A}} = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$.*

**Теорема 6.** *Множина всіх ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом $\mathcal{A}$ містить відрізок тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи алфавіту $c_n$ і $c_{n+1}$, що $c_n \cdot c_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.*

**Теорема 7** (Основний результат)**.** *Множина $G_{\mathcal{A}}$ значень ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом $\mathcal{A}$ є обмеженою, континуальною, доскონолаю і належить одному з тих трьох топологічних типів, що й множина неповних сум абсолютно збіжного ряду (є відрізком або скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу, канторвалом).*

## Література


[1] *Виннишин Я.Ф., Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. // Proceedings of the International Geometry Center. — 2019. — Vol.12, no. 2. P. 26–42.

[2] *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове $A_2$–зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009, том 61, № 4. — С.452–463.

[3] *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an $A_2$-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

[4] *Kakey S.* On the set of partial sums of aninfinite series. Tohoku Sci Rep., (4): 159–163, 1914.

[5] *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим $A_2$-дробом з незалежними елементами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2009. — 81. — С. 139-154.

[6] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by $A_2$-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.