Мінімальні поверхні та їх деформації

Т. Ю. Подоусова
(ОДАБА, Одеса, Україна)
E-mail: tatyana_top@ukr.net

Н. В. Вашпанова
(ОНАХТ, Одеса, Україна)
E-mail: vasha_nina@ukr.net

Вивчення нескінченно малих (н.м.) деформацій поверхонь заключається у виявленні нетривіальних н.м. деформацій (вектор зміщення $\mathbf{y} \neq const$ на всій S). Якщо ж поверхня допускає тільки тривіальні н.м. деформації ($\mathbf{y} = const$), то вона зветься жорсткою по відношенню до цих деформацій.

У E_3-просторі будемо розглядати н.м. деформацію першого порядку однозв'язної поверхні класу C^3, на яку накладені певні обмеження:

1) лінії геодезичного скруту (LGT-лінії) стаціонарні (в головному) [1];

2) повна кривина S ($K \neq 0$) змінюється за умови

$$\delta K = 2K\mu \tag{1}$$

де δK-варіація повної кривини S,$\mu(x^1, x^2)$ - деяка невідома функція класу C^3.
Для мінімальних поверхонь ($H = 0$, H-середня кривина S) математичною моделлю поставленої задачі буде наступна система диференціальних рівнянь з частинними похідними відносно функцій $u^\alpha(x^1, x^2)$ і $\mu(x^1, x^2)$:

$$g^{ij}\left(u^\alpha\right)_{,ji} - \frac{K_s}{K} g^{\beta s} u^\alpha_{,\beta} - K u^\alpha = \mu_i \rho^{i\alpha}. \tag{2}$$

Тут комою позначено коваріантне диференціювання на базі метричного тензора $g_{ij}, \mu_\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial x^\alpha}$, $\rho^{i\alpha} = c^{ij} b^\alpha_j - H c^{i\alpha}, c^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ - дискримінантний тензор S.
Індекси набувають значень 1,2.
Через кожний розв'язок системи рівнянь (2) частинні похідні вектора зміщення даної деформації матимуть наступне представлення

$$\mathbf{y}_i = \mu \mathbf{r}_i + c_{i\alpha} u^\alpha \mathbf{n}, \tag{3}$$

де $\mathbf{r}_\alpha$,$\mathbf{n}$ (орт нормалі S) - базисні вектори.

Очевидно, що тільки у випадку $\mu = 0, u^\alpha = 0$ дана деформація буде тривіальною, а поверхня S-жорсткою. Зокрема, якщо $\mu = 0, u^\alpha \neq 0$, то матимемо А-деформації зі стаціонарними LGT-лініями мінімальних поверхонь, які вивчалися в роботі [2].

Отже, справедлива

Теорема 1. *Кожна мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними LGT-лініями та повною кривиною, що змінюється за умовою (1), частинні похідні вектора зміщення якої при цьому мають вигляд (3), де функції u^α і μ є розв'язком системи рівнянь (2).*

Припустимо, що $\mu(x^1, x^2)$ заздалегідь задана функція точки поверхні класу C^3. Тоді кожне рівняння із (2) в замкненій області $\overline{G}$ задовольняє рівномірній еліптичності $\left(\frac{1}{g} \geq \Delta_0 > 0,\ \Delta_0 = const\right)$. Це означає, що (2) можна привести до наступного канонічного вигляду відносно u^α:

$$u^\alpha_{11} + u^\alpha_{22} + e^1 u^\alpha_1 + e^2 u^\alpha_2 - K u^\alpha = F^\alpha(\mu), \tag{4}$$

де $u_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$, e^1, e^2- відомі функції точок S.

Має місце

Теорема 2. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними лініями геодезичного скруту та повною кривиною, що задовольняє умові (1), вектор зміщення якої виражається через заздалегідь задану функцію $\mu \in C^3(G)$, довільну функцію $\omega(x^1, x^2) \in C^3(\overline{G})$ та функції $u^\alpha(x^1, x^2) \in C^3(G)$, які є розв'язком системи рівнянь (4).*

Припустимо тепер, що в системі рівнянь (2) заздалегідь задані функції u^α. Тоді отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними гіперболічного типу відносно μ, яке набуває канонічного вигляду:

$$\mu_{11} - \mu_{22} + d\mu_1 + e\mu_2 = \Phi(u^1, u^2), \tag{5}$$

де d, e - відомі функції точок поверхні S.
Доведена наступна

Теорема 3. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними лініями геодезичного скруту і повна кривина якої змінюється за умови (1). Вектор зміщення при цьому матиме представлення через заздалегідь задані функції $u^\alpha \in C^3$, дві довільні функції класу C^2, кожна від однієї змінної та функцію $\mu \in C^3$, яка є розв'язком рівняння (5).*

Нехай на площині x^1Ox^2 задана дуга кривої l, яка перетинається не більше ніж в одній точці з прямими, паралельними вісям координат і рівняння якої може бути записано у вигляді $x^2 = g(x^1)$.

Задамо вздовж кривої l значення μ та $\frac{\partial\mu}{\partial x^2}$:

$$\mu|_{x^2=g(x^1)=\omega_0(x^1)}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x^2}|_{x^2=g(x^1)=\omega_1(x^1)} \tag{6}$$

та розглянемо задачу Коші (5), (6), розв'язок якої завжди існує і єдиний [3].
Отже, справедлива

Теорема 4. *Будь-яка мінімальна поверхня при граничній умові (6) допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними LGT-лініями та повною кривиною, що змінюється за умови (1), вектор зміщення якої виражається через дві довільні функції, кожна від однієї змінної та заздалегідь заданих $u^\alpha \in C^3$.*

Слід відзначити, що н.м. деформації першого порядку зі стаціонарними LGT-лініями і повною кривиною мінімальних поверхонь були розглянуті в роботі [4].

Література

[1] Т. Ю. Вашпанова, Л. Л. Безкоровайна. LGT-сітка поверхні та її властивості. *Вісник КНУ імені Т.Г. Шевченка, серія фіз.-мат. науки*, вип.2, с. 7–12, 2010.

[2] Т. Ю. Подоусова. А-деформации минимальной поверхности со стационарной LGT-сетью. *Материалы конф. "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании"*, Тверь, с. 60, 2013.

[3] Н. С. Кошляков и др. Уравнения в частных производных математической физики. *Учебное пособие для мех.-мат.ун-тов*, М., "Высшая школа 712 с., 1970.

[4] Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова. Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь. *Тези доповідей між.конф. "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу"*, Одеса, с. 81, 2018.