Про квазі-геодезичні відображення узагальнено-рекурентних просторів

М. І. Пiструiл
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

І. М. Курбатова
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Розглянемо (псевдо-)рiмановий простiр (V_n, g_{ij}, F_i^h), в якому iснує афiнор F_i^h, що задовольняє умовам

$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\phi_{j)} = p_{(i}\delta^h_{j)} + q_{(i}F^h_{j)},$$

i

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i,$$

де $e = -1, +1$ або 0; p_i, q_i - деякi ковектори, а "," - знак коварiантної похiдної вiдносно зв'язностi Γ в V_n.

Будемо називати таку афiнорну структуру *узагальнено-рекурентною* (елiптичного, гiперболiчного або параболiчного типу залежно вiд значення $e = -1, +1$ або 0.), а сам простiр V_n - *узагальнено-рекурентним* вiдповiдного типу. Афiнорнi структури з такими умовами виникли в [2] при дослiдженнi певного типу вiдображень афiннозв'язних просторiв.

Розглянуто властивостi узагальнено-рекурентної структури параболiчного типу. Зокрема, доведено, що коли афiнорна структура F_i^h узагальнено-рекурентного простору параболiчного типу (V_n, g_{ij}, F_j^h) узгоджена з метричним тензором g_{ij} наступним чином:

$$g_{i\alpha}F^\alpha_j = -g_{j\alpha}F^\alpha_i,$$

то її диференцiальнi рiвняння набувають вигляду

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}.$$

Ми називаємо вектор q_i в цих рiвняннях *вектором узагальненої рекурентностi* структури F_i^h. Далi, доведено, що тензор Рiмана узагальнено-рекурентного простору параболiчного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) задовольняє спiввiдношенням

$$3(R_{\overline{h}jki} + R_{h\overline{j}ki} + R_{hj\overline{k}i} + R_{hjk\overline{i}}) = 2Q_{jhki} + Q_{jkhi} - Q_{hkji},$$

де

$$Q_{hjki} = q_{[h,j]}F_{ki} + q_{[k,i]}F_{hj}.$$

Нехай узагальнено-рекурентний простiр параболiчного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає нетривiальне квазi-геодезичне вiдображення [1] на простiр $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$. Тодi в сумiснiй за вiдображенням системi координат (x^i) виконуються основнi рiвняння

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)} + \phi_{(i}(x)F^h_{j)}(x),$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad F_{ij} = g_{i\alpha}F^\alpha_j, \quad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j,$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = 0$$

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}.$$

Розглянуто випадок, коли узагальнено-рекурентний простір параболічного типу з інтегровною афінорною структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає квазі-геодезичне відображення зі збереженням вектора узагальненої рекурентності на плоский простір $\overline{V}_n = E_n$, тобто $\overline{R}^h_{ijk} = 0$. Доведено, що тоді V_n буде Річчі-плоским:

$$R_{ij} = 0,$$

вектор q_i - градієнтним

$$q_i = \frac{\partial q(x)}{\partial x^i},$$

а тензор Рімана простору V_n необхідно має вигляд

$$R_{hijk} = Ce^{-2q(x)}\Big(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}\Big)$$

при деякій сталій C.

Для рекурентно-параболічного простору, тензор Рімана якого має означену структуру, отримано компоненти метричного тензора в околі деякої точки $M_\circ$ простору V_n в спеціальній системі координат.

Література

[1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7–21, 1968.

[2] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановыих пространств. Москва:Наука, 1979.