Об инвариантных решений двумерного уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, 100174, Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \tag{1}$$

от n независимых $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и q зависимых переменных $u = (u^1, u^2, ..., u^q)$, содержащее производные от u по x до порядка m.

Определение-1 Группа G преобразований, действующая на множестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (0.1) , если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (0.1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ f$, то функция $\tilde{u} = g \circ f$, также является решением уравнения.

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям для исследований посвящены многочисленные исследования [1],[3],[2]. В работе [1] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Некоторые инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности найдены в работе [2].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \tag{2}$$

где $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geq 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$.

Рассмотрим случай когда коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в уравнении (1) являются экспоненциальными функциями температуры т.е. они имеют вид $k_1(u) = k_2(u) = exp(u)$.

Предположим, что $Q(u) = -exp(\alpha u)$, где $\alpha-$ действительное число. В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t = exp(u)\Delta u + exp(u)(\nabla u)^2 - exp(\alpha u) \tag{3}$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа,$\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ —градиент функции u.

Предположим, что $\alpha \neq 0$. В работе [1] показано, что следующее векторное поле является инфинитезимальней образующей группы симметрии уравнения (2):

$$X = 2\alpha t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} - (\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial x_2} - 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это означает, что поток этого векторного поля X порождает группу преобразований пространства переменных (t, x_1, x_2, u), элементы которого переводит решения уравнения (4) в его решения. Поток векторного поля X порождают следующую группу преобразований

$$(t, x_i, u) \to (te^{2\alpha s}, x_i e^{(\alpha-1)s}, u - 2s), s \in R \tag{4}$$

Мы найдем решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно, что [3] гладкая функция $f : M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий мы находим, что функции

$$I = e^{\frac{u}{2}} t^{\frac{1}{2\alpha}}, \xi = \frac{x_1 - x_2}{t^{\beta}},$$

где $\beta = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$, являются инвариантными фунциями группы преобразований (3), что вытекает из следущих равенств $X_1(I) = 0$, $X_1(\xi) = 0$. Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{5}$$

Подставляя функцию (5) в уравнение (3) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции V :

$$2V'' + \beta\xi \frac{V'}{V} - V^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0 \tag{6}$$

В случае, когда $\alpha = 1$ уравнение (6) имеет слудющий вид

$$2\frac{d^2V}{d\xi^2} - V + 1 = 0. \tag{7}$$

Делая замену $p(V) = \frac{dV}{d\xi}$ получим линейно уравнение первого порядка

$$2p\frac{dp}{dV} + V + 1 = 0.$$

Решая это уравнение находим, что

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}.$$

Теперь из уравнения

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}$$

находим, что

$$V - 1 + \sqrt{V^2 - 2V + C_1} = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Если $C_1 = 1$, то функцию можно написать в явной форме: $V = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} + 1$. Таким образом в общем случае, когда $\alpha \neq 0$, мы имеем следующую теорему

Теорема 1. *Инвариантные решения уравнения (3) относительно группы преобразований (4) имеют следующий вид*

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{8}$$

где $V(\xi)-$ общее решение уравнения (6).

В случае $\alpha = 1$ поскольку в уравнении есть источник поглощения тепла, из вида решения (8) вытекает, что при $0 < t \leq 1$ температура в каждой точки плоскости увеличивается. Начиная с $t \geq 1$ температура уменшается и стремится к $u = \ln V(\xi)$ при $t \to \infty$.

Литература

[1] Dorodnitsyn V.A.,Knyazeva I.V.,Svirshchevskii S. R. Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases,Differential equations,1983,vol. 19,issue 7, 1215-1223.

[2] Narmanov O.A. Invariant solutions of the two-dimensional heat equation.Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 52-60

[3] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer 1986, P. 513 p. Translated under the title *Prilojeyniya grupp Li k diiferentsialnim uravneniyam*, Moscow: Mir, 1989, 639 p.