Фрактальні властивості неперервних перетворень квадрата, пов'язані з двосимвольними зображеннями дійсних чисел

І. М. Лисенко
(НПУ імені М.П. Драгоманова)
E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

М. В. Працьовитий
(НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Нагадаємо, що *перетворенням множини* називається бієктивне (одночасне ін'єктивне і сюр'єктивне, тобто взаємно однозначне) відображення цієї множини на себе. З групової точки зору окрема геометрична теорія вивчає інваріанти певної групи перетворень простору. З цієї точки зору *фрактальна геометрія*[1] вивчає інваріанти групи перетворень простору, які зберігають фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин (мається на увазі, що образ і прообраз мають однакову розмірність).

Використовуючи різні зображення (кодування) дійсних чисел, у ряді робіт вивчались перетворення відрізка, які мають фрактальні властивості, самоподібності, автомодельності, зберігають чи трансформують міру, розмірність або інші числові характеристики борелівських множин або певні властивості зображення чисел. Комбінації таких перетворень (прямий добуток або інші «операції») приводять до цікавих перетворень квадратів та прямокутників з фрактальними властивостями. Часто в якості інваріантних множин таких перетворень виникають графіки неперервних локально складних функцій (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних).

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей перетворень квадрата: $K = [0;1] \times [0;1]$ та $C = [0;g_0] \times [0;g_0]$, де параметр $g_0 \in (\frac{1}{2};1)$ які визначаються у термінах двосимвольних кодувань (зображень) дійсних чисел: Q_2-зображення і G_2-зображення. Нагадаємо їх зміст

$$[0;1] \ni x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$$[0;g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\alpha_k \in A = \{0,1\}$, q_0 — фіксоване число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 \equiv 1 - q_0$, $g_1 \equiv g_0 - 1$.

Лема 1. *Якщо φ_1 і φ_2 — неперервні перетворення одиничного відрізка, то формули*

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x), \\ y' = \varphi_2(y) \end{cases} \quad \textit{або} \quad \begin{cases} x' = \varphi_1(y), \\ y' = \varphi_2(x) \end{cases}$$

задають перетворення одиничного квадрата.

Більшість (у певному сенсі) неперервних перетворень одиничного відрізка мають складну локальну структуру, багаті множини різних особливостей, зокрема, диференціального характеру. Наприклад, перетворення задане формулою $I(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]\ldots}$, яке називається *інверсором* Q_2-зображення. Воно є неперервною строго спадною сингулярною функцією (має похідну рівну 0 майже скрізь у розумінні міри Лебега).

До іншого класу неперервних перетворень квадрата приводять перетворення, що зберігають хвости зображень дійсних чисел у різних системах кодування.

Приклад 2. Аналог «симетрія» відносно відрізка: $\begin{cases} x' = I(x), \\ y' = y. \end{cases}$

Інваріантні точки цього перетворення утворюють відрізок, який задається рівнянням $x = \Delta^{Q_2}_{0(1)} = \Delta^{Q_2}_{1(0)}$

Приклад 3. Аналог «симетрії» відносно точки $\gamma_1 : \begin{cases} x' = I(x), \\ y' = I(y); \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x' = I(y), \\ y' = I(x). \end{cases}$

Інваріантною точкою цього перетворення є точка з координатами $(\Delta^{Q_2}_{1(0)}; \Delta^{Q_2}_{1(0)})$.

Більш цікавими є неперервні перетворення задані формулами $\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$ де $f_i(x, y)$ неперервна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах вище зазначених двосимвольних зображень чисел. У доповіді наводяться приклади таких функцій і висвітлюються деякі їх властивості.

Суттєво складнішими є аналогічні об'єкти означенні в термінах G_2-зображення чисел, яке використовує дві різнознакові основи g_0 і $g_1 \equiv g_0 - 1$. Інверсор для такого зображення є функцією ніде не монотонною і розривною в G_2-бінарних точках. Для моделювання перетворень, пов'язаних з цим зображенням використовуються оператори лівостороннього та правостороннього зсувів і специфічні функції.

Література

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys. – 2004, 24. – P. 1–16.

[2] Isaieva T. M., Pratsiovytyi M. V. Transformations of $(0, 1]$ preserving tails Δ^{μ}-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 22 (2016). Number 1, pp. 102–115.

[3] Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., Maslova Yu. P. Group of continuous preserving tails of G_2-representation of numbers Algebra and Discrete Math., 29 (2020). no 1, pp. 99–108.

[4] Pratsiovytyi M., Chuikov A. Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199–206.

[5] Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, — С. 50–62.

[6] Осауленка Р.Ю. Група перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр Q_s-зображення чисел// Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Том 3. — С. 191–204.

[7] Працьовитий М.В., Климчук С.О. Середнє значення символів Q_s-зображення дробової частини дійсного числа і пов'язані з ним задачі // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011.— №12. – С. 186-195.

[8] Працьовитий М.В., Климчук С.О., Макарчук О.П. Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифри // Укр.мат.журн. 2014., Том 66, №3. — С. 302–310.