

Поиск точных решений уравнений гидродинамической модели заряженного газа с помощью теории симметрий

С. М. Кляхандлер

(Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)

E-mail: kliakhandler.sm16@physics.msu.ru

Описание механизма возникновения разности электрических потенциалов, основанное на гидродинамической модели заряженного газа, было предложено В.И. Пустовойтом в работе [1]. Им было получено следующее нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля при одномерном движении заряженного газа:

$$\frac{\partial^2 y(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 y(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - (y(\xi, \tau) - y_0) \frac{\partial y(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right), \quad (1)$$

где $y(\xi, \tau)$ – безразмерная напряженность электрического поля, ξ, τ – пространственная и временная координаты, y_0 – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1), основанный на теории симметрий [2].

Теорема. Алгебра Ли точечных симметрий уравнения (1) бесконечномерна и порождена векторными полями

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(F_1(\tau) + \frac{\tau \xi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\dot{F}_1(\tau) + \frac{\tau u_0}{2} - \frac{\tau y}{2} + \frac{\xi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \left(F_2(\tau) + \frac{\xi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\dot{F}_2(\tau) + \frac{u_0}{2} - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3 &= F_3(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \dot{F}_3(\tau) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau)$ – произвольные функции, а точка – производная по τ .

Эта алгебра симметрий применяется для построения точных решений уравнения (1). Например, рассматривая симметрию X_2 и полагая $F_2(\tau) \equiv 1$, получим поток φ_t , порождаемый этим векторным полем. Он имеет следующий вид

$$\varphi_t = \{x \rightarrow (x+2)e^{\frac{p}{2}} - 2, \tau \rightarrow \tau e^p, y \rightarrow (y-u_0)e^{-\frac{p}{2}} + u_0\}, \quad (3)$$

где p – параметр сдвига вдоль траекторий. Тогда инвариантное решение имеет вид

$$y(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} J(z) + u_0, \quad z = \frac{x+2}{\sqrt{t}}, \quad (4)$$

где $J(z)$ – произвольная функция.

Получим редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое интегрируется в квадратурах, однако ввиду громоздкости общее решение записывать не будем. Одно из частных решений имеет вид

$$U(z) = \frac{-2(z+2) \exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4}\right) - 6\text{KummerM}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{(z+4)^2}{4}\right)}{(z+4) \exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4}\right)}, \quad (5)$$

где $\text{KummerM}(\mu, \nu, z)$ – функция Куммера, решение вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (\nu - z) \frac{dy}{dz} - \mu y = 0. \quad (6)$$

Решение исходного уравнения получим, подставив выражение z через исходные переменные системы τ, ξ

$$y(\tau, \xi) = \frac{4\sqrt{\tau} + 4\xi\sqrt{\tau} + \xi^2\sqrt{\tau} + 6\tau^{3/2} + 12\tau + 6\xi\tau + 4u_0\tau^2 + 2u_0\tau^{3/2} + u_0\xi\tau^{3/2}}{\tau^{3/2}(4\sqrt{\tau} + \xi + 2)}. \quad (7)$$

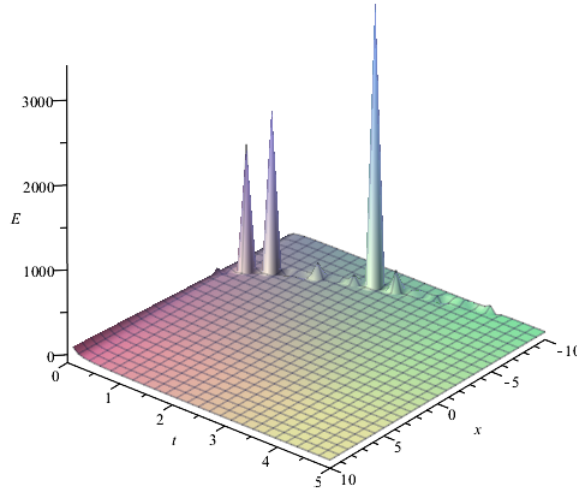


Рис. 0.1. График напряженности электрического поля

Можно увидеть, что на графике присутствует особенность в виде кривой, определяемой нулем знаменателя $4\sqrt{\tau} + \xi + 2 = 0$. Именно на этой кривой напряженность поля стремится к бесконечности – скапливаются заряды и возможно появление молнии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пустовойт В.И. О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, №8. С. 996-1002.
- [2] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.