QA-деформація еліптичного параболоїда

Хомич Юлія
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

В роботі досліджується нескінченно мала деформація поверхні вигляду

$$\overline{r}^*(u,v,t) = \overline{r}(u,v) + t\overline{U}(u,v),$$

де $\overline{r}(u,v)$ – її векторно-параметричне рівняння, а $\overline{U}(u,v)$ – поле зміщення, $t \longrightarrow 0$, при якій варіація елемента площі $\delta d\sigma$ є заданою функцією. Такі деформації називаються квазіареальними або коротко QA-деформаціями [1].

Варіація площі $\delta d\sigma$ при нескінченно малій деформації виражається через варіацію метричного тензора $2\varepsilon_{ij} \equiv \delta g_{ij}$ за формулою $\delta d\sigma = \varepsilon_{ij} g^{ij} d\sigma$. За допомогою рівностей $\frac{\delta d\sigma}{d\sigma} = \varepsilon_{ij} g^{ij} = -2\mu(u,v)$ вводимо функцію $\mu(u,v)$. Очевидно, задання функції $\delta d\sigma$ рівносильно заданню функції μ. Надалі будемо говорити, що функція μ виражає закон змінювання елемента площі при QA-деформації поверхні. При $\mu = 0$ така деформація є ареальною.

Задача про існування зазначеної деформації поверхні $S(K \neq 0)$ в E_3-просторі зводиться до розв'язування наступної системи рівнянь [1]

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - T^{\alpha} b^{\beta}_{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + T^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

відносно функції $\mu = \mu(u,v)$ та тензорних полів $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha} (\alpha, \beta = 1,2)$, через які виражаються частинні похідні вектора зміщення $\overline{U}$:

$$\overline{U_i} = \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta^{\beta}_{i} \right) \overline{r_{\beta}} + c_{i\alpha} T^{\alpha} \overline{n}.$$

Система рівнянь (1) представляє собою систему трьох диференціальних рівнянь відносно 6 невідомих функцій: $T^{11}, T^{12} = T^{21}, T^{22}, T^1, T^2, \mu$.

Нехай $T^{\alpha\beta} = 0$, тоді система рівнянь (1) є системою трьох рівнянь відносно трьох невідомих функцій

$$\begin{cases} -T^{\alpha} b^{\beta}_{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha}_{,\alpha} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Перший тензор деформації $2\varepsilon_{ij} \equiv \delta g_{ij}$ через $T^{\alpha\beta}$ та μ виражається у вигляді [1]

$$2\varepsilon_{ij} = T^{\alpha\beta} \left(c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta} \right) - 2\mu g_{ij}.$$

Умова $T^{\alpha\beta} = 0$ рівносильна тому, що $\varepsilon_{ij} = -\mu g_{ij}$. Функцію μ, що зустрічається в таких рівняннях, називають функцією конформності [2]. Отже, при $T^{\alpha\beta} = 0$ функція μ, що виражає закон змінювання елемента площі при QA-деформації поверхні є функцією конформності.

Нехай векторно-параметричне рівняння еліптичного параболоїда задано у вигляді

$$\overline{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, \frac{u^2}{2}\}.$$

В роботі отримано розв'язок системи рівнянь (2) для еліптичного параболоїда

$$T^1 = 0, \ T^2 = \frac{-c}{u\sqrt{1+u^2}}, \ \mu = -c\ln|u + \sqrt{1+u^2}| + c_0,$$

де $c \neq 0, c_0$ – деякі константи.

Має місце теорема.

Теорема 1. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає QA-деформацію, при якій координати поля зміщення мають вигляд*

$$\overline{U}(u,v) = \{ucosv\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)+c_1,\ usinv\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)+c_2,$$
$$\frac{u^2}{2}\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)-\frac{c}{4}\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right)+c_3\},$$

де $c\neq 0, c_1, c_2, c_3$ *– деякі сталі. При цьому функція* $\mu=-c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0$, *що виражає закон змінювання елемента площі, є функцією конформності.*

Література

[1] Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3. Proc. Intern. Geom. Center, 2014, № 7(2), С. 6 – 19.

[2] Федченко Ю. С. Нескінченно малі конформні деформації деяких класів поверхонь. Proc. Intern. Geom. Center, 2014, № 7(2), С. 20 – 25.