Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі

О. А. Кадубовський
(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна)
E-mail: `kadubovs@ukr.net`

Нехай M_g – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 0$, а $C_n(M_g)$ – клас гладких функцій на M_g (з трьома критичними значеннями), які окрім локальних мінімумів та локальних максимумів мають лише одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - \lambda$, де $\lambda \geq 2$ – сумарне число локальних мінімумів та максимумів (напр. [4], [5]).

Функції f_1 і f_2 з класу $C_n(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \to M_g$ і $h' : R^1 \to R^1$ (h' зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$.

Якщо h зберігає орієнтацію, то функції f_1 та f_2 називають топологічно спряженими (напр. [4]) або ж O-топологічно еквівалентними (напр. [5]).

Через $C_{k,l}(M_g) \subset C_n(M_g)$ позначимо клас функцій на M_g, які мають точно k локальних мінімумів (максимумів), l локальних максимумів (мінімумів) та одну критичну точку типу сідла. Якщо $k = l = 1$, то функції з відповідного класу називають мінімальними; якщо ж $k = 1, l > 1$ (або $l = 1, k > 1$), то функції з відповідного класу будемо називати *напівмінімальними*.

Задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(M_g)$ ($g \geq 0$) і $C_{k,l}(M_0)$ ($k, l \in N$) було повністю розв'язано лише у 2015 р. в роботах [5] та [6] відповідно.

В загальному випадку, для натуральних g, k, l (або ж k, l і $n = 2g+k+l-1$, тобто для функцій з фіксованим сингулярним типом), задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ виявилась досить важкою та нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Як з'ясувалося (в [2] з посиланням на роботу [1]), задача про перерахування одноклітинкових двокольорових карт з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами тісно пов'язана із задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$. Відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [1] та роботі [2].

Явні формули для підрахунку числа O-топологічно нееквівалентих функцій з класу $C_n(T^2) \equiv C_n(M_1)$ анонсовано в [7]. Для фіксованих натуральних k і l задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(T^2)$ також залишається нерозв'язаною.

З урахуванням результатів робіт [2] і [3] встановлено справедливість наступних тверджень для двовимірного кренделя P^2.

Теорема 1. *Для довільного натурального $n = m + 4 \geq 5$ число $d^*(n)$ O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,m}(P^2)$ можна обчислити за формулою*

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(\frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C^6_{n+1} + \sum_{j|n,\ j \in \{2;3;4;5;6;8\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \tfrac{n}{j}\right) \right), \tag{1}$$

де: $\phi(q)$ *– функція Ейлера;* $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ *величини* $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, *а*

$\forall j \in \{2;3;4;5;6;8\} : \frac{n}{j} \in N$ *величини* $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ *визначаються за допомогою співвідношень*

$$\begin{array}{lll} \rho\left(n, \dfrac{n}{5}\right) = \dfrac{3n}{5}, & \rho\left(n, \dfrac{n}{6}\right) = \dfrac{n}{6}, & \rho\left(n, \dfrac{n}{8}\right) = \dfrac{n}{8}, \\ \rho\left(n, \dfrac{n}{3}\right) = \dfrac{n(n-3)}{6}, & \rho\left(n, \dfrac{n}{4}\right) = \dfrac{n(n-4)}{32}, & \rho\left(n, \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384}. \end{array} \tag{2}$$

Теорема 2 (основна)**.** *Для довільного натурального $n = m + 4 \geq 5$ число $d^{**}(n)$ топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,m}(P^2)$ можна обчислити за формулами*

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2}\left(d^{*}(n) + S(n)\right), \tag{3}$$

де

$$S(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-3)(n-1)(n+1)(5n+7)}{384}, & n = 2k+1 \\[2ex] \dfrac{(n-4)(n-2)\left(5n^2+34n+96\right)}{384}, & n = 2k. \end{cases} \tag{4}$$

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$	n	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$
5	8	4	4	**21**	12 087 306	575 592	288 951
6	84	16	13	**22**	17 968 566	816 858	409 959
7	469	67	44	**23**	26 212 571	1 139 677	571 516
8	1 869	237	140	**24**	37 589 475	1 566 377	785 361
9	5 985	667	366	**25**	53 068 015	2 122 723	1 063 721
10	16 401	1 649	883	**26**	73 854 495	2 840 739	1 423 367
11	39 963	3 633	1 894	**27**	101 437 245	3 756 943	1 881 702
12	88 803	7 417	3 836	**28**	137 637 045	4 915 841	2 461 957
13	183 183	14 091	7 203	**29**	184 664 025	6 367 725	3 188 185
14	355 355	25 405	12 945	**30**	245 181 573	8 173 019	4 091 833
15	654 654	43 650	22 112	**31**	322 377 804	10 399 284	5 205 312
16	1 154 062	72 166	36 503	**32**	420 045 164	13 126 768	6 570 279
17	1 958 502	115 206	58 086	**33**	542 668 764	16 444 518	8 229 569
18	3 215 142	178 678	90 018	**34**	695 524 060	20 457 020	10 237 300
19	5 126 010	269 790	135 660	**35**	884 784 516	25 279 560	12 649 062
20	7 963 242	398 242	200 162	**36**	1 117 639 908	31 046 082	15 534 091

Таблиця 2.1. Початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $d^{**}(n)$

Література

[1] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[2] Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализи его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.

[3] Goupil A., Schaeffer G. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.

[4] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface. *Topologyand its Aplications*, 119(3) : 257–267, 2002.

[5] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.

[6] Кадубовский А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*, 8(1) : 46–61, 2015.

[7] Кадубовський О.А. Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі // Тези доповідей міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». Одеса, 28 травня – 3 червня 2019. С. 65-66. 94 с.