Приклади поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю та сталою кривиною грассманового образу в просторі Мінковського

М. Гречнєва
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: grechnevamarina@gmail.com

П. Стєганцева
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: stegpol@gmail.com

Використання понять грассманового многовиду та грассманового образу поверхні дозволяє розширити коло задач диференціальної геометрії [1], [2]. В роботі [10] встановлено, що секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманового многовиду $G(2,4)$ евклідового простору R_4 приймає значення з відрізку $[0,2]$, а для простору Мінковського в [6] доведено, що ця кривина може бути будь-яким дійсним числом. Досліджені в [9],[3] поверхні евклідового простору з мінімальним та максимальним значеннями кривини грассманового многовиду вздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні (кривини грассманового образу поверхні). Для простору Мінковського аналогічне дослідження проведено в [4].

В [5] досліджені багатовимірні поверхні евклідового простору з плоскою нормальною зв'язністю та постійною кривиною грассманового многовиду. В цій роботі для таких поверхонь простору Мінковського з метрикою сігнатури $(-+++)$ отримані наступні результати.

Теорема 1. *Нехай $V^2 \subset^1 R_4$ є регулярною часоподібною поверхнею з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом сталої кривини $\bar{K}$. Тоді $\bar{K}$ приймає значення з відрізку* $[0,1]$.

Теорема 2. *Нехай $V^2 \subset^1 R_4$ є регулярною просторовоподібною поверхнею з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом сталої кривини $\bar{K}$. Тоді значення цієї кривини належать множині $(-\infty,-1]\bigcup\{0\}$, якщо грассмановий образ просторовоподібний і множині $[0,-\infty)$, якщо грассмановий образ часоподібний.*

Для обчислення кривини грассманового образу часоподібної та просторовоподібної поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю використовуємо відповідно формули, які виведені з запропонованої в роботі [8] формули для секційної кривини грассманових многовидів псевдоевклідових просторів

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(L^2_{11}L^2_{22} + L^1_{22}L^1_{11})^2}{(L^2_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{22}L^2_{11})^2 + (L^1_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{11}L^1_{22})^2} \tag{1}$$

та

$$\bar{K}(\sigma) = -\frac{(L^2_{11}L^2_{22} - L^1_{22}L^1_{11})^2}{(L^2_{11}L^2_{22})^2 - (L^1_{22}L^2_{11})^2 - (L^1_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{11}L^1_{22})^2}, \tag{2}$$

в яких L^k_{ij} - коефіцієнти других квадратичних форм відповідних поверхонь.

Наведемо приклади, ідея яких взята з роботи [7].

Приклад 3. Часоподібна поверхня задана фундаментальними формами $ds^2 = -du^2 + dv^2$, $II^1 = a^2du^2 - b^2dv^2$, $II^2 = h(du^2 + dv^2)$, $a, b, h = const$. Кривина її грассманового образу задовольняє нерівності $0 \le \bar{K}(\sigma) \le 1$ при будь-яких значеннях a, b, h.

Приклад 4. Просторовоподібна поверхня, задана фундаментальними формами $ds^2 = du^2 + dv^2, II^1 = du^2 - 4dv^2, II^2 = du^2 + dv^2$, має просторовоподібний грассмановий образ. Кривина її грассманового образу дорівнює $\bar{K}(\sigma) = -\frac{25}{12}$. Просторовоподібна поверхня, задана фундаментальними формами $ds^2 = du^2 + dv^2$, $II^1 = du^2 + 4dv^2$, $II^2 = 2du^2 + 3dv^2$, має часоподібний грассмановий образ. Кривина її грассманового образу дорівнює $\bar{K}(\sigma) = \frac{4}{21}$.

Існування розглянутих поверхонь випливає з того, що коефіцієнти їх фундаментальних форм задовольняють рівнянням Гаусса-Кодацці-Річчі.

Література

[1] Аминов Ю.А. *Геометрия подмногообразий* // К.: Наукова думка, 2002

[2] Борисенко А.А. *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий* // М.: Изд-во "Экзамен 2003

[3] Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. *О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа* // Мат. заметки. – 1990.– **48**.– (3).– С.12-19

[4] Гречнева М.А., Стеганцева П.Г. *О поверхностях со стационарными значениями секционной кривизны грассманова образа*// Proceedings of the International Geometry Centre.– 2016.– **9**.– (2).–С.42–48

[5] Лисица В.Т. *Многомерные поверхности с плоской нормальной связностью с постоянной кривизной грассманова образа* // Известия вузов. Математика.– 2004.– **5**.– С.47–51

[6] Стеганцева П.Г., Гречнева М.А. *Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства* // Известия вузов. Математика.–2017.–(2).–С.65-75

[7] Фоменко В.Т. *Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны* // Мат. заметки. –2000.–**68**.–(4).–С.579-586

[8] Маазикас И. *К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства* // Ученые записки Тартусского университета.– 1974.– 342.– С.76-82

[9] Muto Y. *The Gauss map of submanifolds in a Euclidean space.* // J. Math. Soc. Japan.–1978.– **30**.–(1).– P.85-100.

[10] Wong Y. C. *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.*// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.–1968.–**60**–(1).– P.75-79