Графи Кронрода–Ріба функцій Морса на 2-торі та їх автоморфізми

Богдан Фещенко
(Лабораторія топології у складі відділу алгебри і топології, Інститут математики НАН України)
E-mail: `fb@imath.kiev.ua`

Нехай M – гладка орієнтована компактна поверхня. Група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M)$ діє на просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ за таким правилом: $\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M)$, $\gamma(f,h) = f \circ h$. Відносно цієї дії визначимо стабілізатор $\mathcal{S}(f)$ та орбіту $\mathcal{O}(f)$ природним чином:

$$\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}, \qquad \mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}.$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M)$ та $C^\infty(M)$ сильними топологіями Уїтні. Ці топології індукують деякі топології на просторах $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{O}(f)$.

Нехай $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ – зв'язна компонента тотожнього відображення простору $\mathcal{D}(M)$, $\mathcal{O}_f(f)$ – компонента зв'язності $\mathcal{O}(f)$, що містить f і $\mathcal{S}'(f) = S(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ – група дифеоморфізмів M, що зберігають гладку функцію f.

Гомотопійні властивость компонент зв'язності просторів $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{O}(f)$ для функцій Морса на компактних поверхнях досліджувались у роботах Е. Кудрявцевої, С. Максименка та його учнів. Зокрема, було встановлено, що $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопійно еквівалентною фактор-простору $(S^1)^m/G(f)$ у випадку коли $M \neq S^2$ і $\mathrm{SO}(3) \times (S^1)^m/G(f)$, якщо $M = S^2$, де $G(f)$ – група автоморфізмів графу Кронрода–Ріба функції Морса на M, що є індукованими дифеоморфізмами з $\mathcal{S}'(f)$, яка вільно діє на $(S^1)^m$, $m \in \mathbb{N}$, див. огляд у [4].

С. Максименко та А. Кравченко вивчали мінімальну множину класів ізоморфізмів груп $G(f)$ для функцій Морса на компактних поверхнях крім 2-тора та підмножини цієї множини для простих та загальних (generic) функцій Морса [1, 2, 3]. Ми дамо опис мінімальної множини класів ізоморфізму груп $G(f)$ для фунцій Морса на 2-торі. Матеріал тез базується на статті [4].

Для формулювання результатів ми нагадаємо означення вінцевого добутку з циклічними групами та розглянемо декілька класів груп, що визначаються за допомогою вінцевих добутків. Нехай G – група і $n, m \geq 1$ – натуральні числа. Розглянемо дві ефективні дії $\alpha : G^n \times \mathbb{Z}_n \to G^n$ і $\beta : G^{nm} \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) \to G^{nm}$ груп $\mathbb{Z}_n$ та $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ на G^n та G^{nm} відповідно, що задані формулами:

$$\alpha((g_i)_{i=0}^{n-1}, a) = (g_{i+a})_{i=0}^{n-1}, \qquad \beta((g_{i,j})_{i,j=0}^{n-1,m-1}, (b,c)) = (g_{i+b,j+c})_{i,j=0}^{n-1,m-1},$$

де усі індекси взяті за модулями n та n, m. Напівпрямі добутки $G \wr \mathbb{Z}_n := G^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$ і $G \wr (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) := G^{nm} \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$, що відпоівдають цим діям, ми будемо називати вінцевими добутками G з $\mathbb{Z}_n$ та G з $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$ відповідно.

Для натурального n, нехай $\mathcal{P}_n$ – мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що задовольняють таким умовам:

- одинична група $\{1\}$ належить до $\mathcal{P}_n$,
- якщо $A, B \in \mathcal{P}_n$, то $A \times B$ та $A \wr \mathbb{Z}_n$ належать до $\mathcal{P}_n$.

Нехай $\mathcal{P}$ мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що містять $\mathcal{P}_n$ як підмножини для усіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай також $\mathscr{E}_i$, $i = 0, 1, 2$ – мінімальні множини класів ізоморфізму груп таких, що

- $\mathscr{E}_0$ містить групу $A_0 \wr (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn})$, $n, m \geq 1$ для будь-якої $A_0 \in \mathcal{P}$,
- $\mathscr{E}_1$ містить групу $A_1 \wr \mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$ для будь-якої $A_1 \in \mathcal{P}$,
- $\mathscr{E}_2$ містить групу $A_2 \wr \mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$ для будь-якої $A_2 \in \mathcal{P}_2$.

Відомо, що граф Кронрода–Ріба функції Морса на 2-торі є або деревом, або містить цикл. Мінімальну множину класів ізоморфізму груп $G(f)$ для функцій Морса на 2-торі графи яких є деревами позначимо через $\mathscr{G}_0(T^2)$, а в іншому випадку через $\mathscr{G}_1(T^2)$. Позначимо через $\mathscr{G}^{smp}(T^2)$ мінімальну множину класів ізоморфізмів груп $G(f)$ для простих функцій Морса на 2-торі.

Основним результатом є така теорема.

Теорема 1 (Theorem 2.5 [4]). *Мають місце рівності:*

$$\mathscr{G}_0(T^2) = \mathscr{E}_0, \qquad \mathscr{G}_1(T^2) = \mathscr{E}_1, \qquad \mathscr{G}^{gen}(T^2) = \mathscr{E}_2.$$

Література

[1] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-sphere, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 11 (2018), no. 4, pp. 72-79, arXiv:1903.09721

[2] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on compact surfaces, *European Journal of Mathematics*, (2020), 18 pages, arXiv:1808.08746

[3] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of cellular divisions of 2-sphere induced by functions with isolated critical points, (2019) 18 pages, arXiv:1911.10808

[4] A. Kravchenko and B. Feshchenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-torus, *Methods of Functional Analysis and Topology* vol. 26 (2020), no. 1, pp. 88–96, arXiv:1912.00624